Partielle Ableitungen - Totales Differenzial - Integrierender Faktor

Hängt eine Funktion $U(x,y)$ von zwei unabhängigen Zustandsvariablen x und y ab, so ist ihr totales Differenzial, d.h. ihre vollständige differenzielle Änderung bei beliebiger Änderung von x oder y, gegeben durch
$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$ Die Indizes sollen hier die beim partiellen Ableiten festzuhaltende(n) Variable(n) zusätzlich deutlich machen .
Ist ein differenzieller Ausdruck der Gestalt $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ gegeben, so ist nicht von vornherein klar, ob es sich dabei um ein im obigen Sinn vollständiges Differenzial handelt. Dazu müssen die Über-Kreuz-Ableitungen $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y$ gleich sein!
Falls das nicht der Fall ist, kann man möglicherweise eine Funktion $\mu(x,y)$ finden, mit der $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ multipliziert die Bedingung für ein totales Differenzial erfüllen. Diese Funktion heißt dann integrierender Faktor.

1. Finden Sie für die folgenden vorerst als unvollständige Differenziale anzunehmenden Ausdrücke heraus, ob es sich um vollständige Differenziale handelt oder bestimmen Sie einen integrierenden Faktor! Bestimmen Sie anschließend die zugehörige "Potenzialfunktion" (Zustandsfunktion) U!
   a) $W_1(x,y) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$
   b) $W_2(x,y) = ay\mathrm{d}x - bx\mathrm{d}y$
   c) $W_3(x,y) = \left(\frac{y^2}{x} - 2\right)\mathrm{d}x + \left(3y - \frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y$
   d) $W_4(x,y) = y^3\mathrm{d}x + (2xy^2+1)\mathrm{d}y$
2. Berechnen Sie mit den Beziehungen zwischen kartesischen und sphärischen Koordinaten $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$ $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ $z = r\cos\vartheta$
   $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\tan\varphi = \frac{y}{x}$
   die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial r}$ und $\frac{\partial r}{\partial z}$!
3. Berechnen Sie explizit die Koeffizienten α_p, β_V und κ_T wie auch $\alpha_{ad.}$, β_{ad} und κ_{ad} für ein ideales Gas mit Hilfe der Zustandsgleichung $f(p,V,T) = pV - nRT = 0$ und im adiabatischen Fall der passenden Adiabatengleichung, z.B. $p\,V^\gamma = \mathrm{const.}$ Vergleichen Sie die entsprechenden Koeffizienten!
4. Durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ ist eine implizite Funktion zwischen den drei Größen x, y und z definiert. Beweisen Sie die folgende Identität:
   $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$
   Welche Verknüpfung folgt daraus für die Koeffizienten aus der Aufgabe zuvor, wenn also $x = p$, $y = V$ und $z = T$ gilt?
5. Zeigen Sie, falls zusätzlich durch eine zweite Gleichung $S(x,y,z) = \mathrm{const}$ eine Zustandsänderung (z.B. adiabatisch) beschrieben wird, dass dann gilt:
   $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_S \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_S \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_S = 1$$
   Wie sieht damit der geänderte Zusammenhang zwischen den adiabatischen Koeffizienten $\alpha_{ad.}$, β_{ad} und κ_{ad} aus?