Schwingungen – Hamilton-Formalismus – Phasenraum

1. Die Bewegung eines Massenpunktes m sei in der verallgemeinerten Koordinate durch folgende Lagrange-Funktion beschrieben:

   $$L = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) \qquad (k, \gamma = \text{ const.})$$

   (a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung her.

   (b) Gibt es zyklische Koordinaten? Gibt es Erhaltungsgrößen?

   (c) Geben Sie ein physikalisches Beispiel an, welches diese Bewegungsgleichung erfüllt.

2. Bestimmen Sie für das Potenzial $\mathrm{U}(x) = -2\ \cos(x)$

   - das Potenzialkraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ mit seinen Gleichgewichtslagen,
   - die Bewegungsgleichung für eine Masse $m = 2$ in diesem Feld! (Lagrangeformalismus)
   - die Kreisfrequenzen ω für Schwingungen um dafür geeignete Gleichgewichtslagen in harmonischer Näherung (kleine Amplitude)?
   - Skizzieren Sie für die Gesamtenergien $E = -2, -1, 2, 4$ die Phasenraumkurven!

   Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse für die Bewegung der Masse $m = 2$ in diesem Potenzial und mit diesen die Hamilton-Funktion! Leiten Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Hamilton'schen kanonischen Gleichungen her!

3. Die Lagrange-Funktion eines Systems sei gegeben in der Form

   $$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{h}{2}(x^2 + y^2).$$

   - Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion in Zylinderkoordinaten und stellen Sie in diesen die Lagrange'schen Gleichungen (2. Art) auf!
   - Finden Sie zyklische Variable und die damit verbundenen Erhaltungsgrößen!
   - Bestimmen Sie die kanonischen Impulse und mit diesen die Hamilton-Funktion!
   - Stellen Sie die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen auf!
   - Finden Sie ein effektives Potenzial für die Bewegung entlang der radialen Koordinate $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ senkrecht zur z-Achse und skizzieren Sie Phasenraumbahnen in der $(p_\rho, \rho)-$Ebene!

4. Bestimmen Sie für das dargestellte 2-Massensystem mit drei Federn (Ruhelängen l_1, l mit $2\ l_1 + l < L$) die Ruhelagen der Massen, die potenzielle Energie des Systems und das Schwingungsspektrum! Untersuchen Sie die Spezialfälle $m_1 = m_2$, sowie $k_1 = k$ (bei $l_1 = l$)! Benutzen Sie den Lagrange-Formalismus!