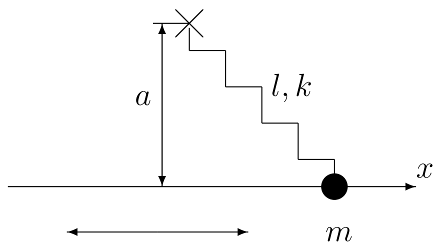
Lagrange-Formalismus – Variationsrechnung
Erhaltungsgößen – Phasenraum

1. Ein Massenpunkt m gleite reibungsfrei eine Wasserrutsche hinab. Die Form der Rutsche sei durch die Funktion $R^2 = x^2 + z^2$ $(x, z \in [-R, 0],\ R > 0)$ als Viertelkreis angenommen, wobei z die vertikale Koordinate bezeichnet. Eine Seitwärtsbewegung von m sei durch die Schalenform der Rutsche verhindert.
   - Geben Sie die Nebenbedingungen an, die die Bewegung von m einschränken! Wie groß ist die Zahl der Freiheitsgrade von m?
   - Bestimmen Sie in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten die Lagrange-Funktion und daraus die Bewegungsgleichungen!
   - Prüfen Sie, ob es zyklische Koordinaten gibt und welche Erhaltungsgrößen!
   - Skizzieren Sie die Potenzialfunktion über der verallgemeinerten Koordinaten
   - und die Phasenraumbahn, wenn m am oberen Rand aus der Ruhe startet!
2. Ein Massenpunkt m gleite reibungsfrei entlang der x-Achse, wobei er von einer Feder (Ruhelänge l, elastische Konstante k), die im Abstand a neben der Achse befestigt ist, gehalten wird.



   - Bestimmen Sie die Freiheitsgrade und mit geeigneten verallgemeinerten Koordinaten die Lagrange-Funktion, und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab!
   - Welche Erhaltungsgrößen gibt es?
   - Skizzieren Sie die Potentialfunktion $U(x)$, d.h. die potentiellen Energie der während der Bewegung deformierten Feder. Bestimmen Sie damit den Charakter der Bewegung (z.B. (in-)finit, (a-)periodisch etc.)! Unterscheiden Sie die Fälle $a < l$ und $a > l$. (Hilfreich ist die Darstellung der Phasenraumbahnen.)
   - Für Schwingungen um bestimmte Gleichgewichtslagen im Potenzial (wo sind diese?) ist die Kreisfrequenz ω in harmonischer Näherung zu bestimmen.
3. Bestimmen Sie für ein Potenzial $U(x) = |x|^\alpha$ alle reellen Werte α, für die die Schwingungsdauer nicht von der Gesamtenergie E abhängt! Begründen und verwenden Sie dazu die aus dem Energierhaltungssatz folgende Beziehung:

$$T = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}$$

4. Für folgende Funktionale sind stationäre Lösungen $y(x)$ mit Hilfe der Euler-Lagrange'schen Gleichungen zu finden! Wo keine Randwerte gegeben sind, benutze man sogenannte natürliche Randbedingungen, d.h. an den festen Grenzen der Integration sei die gesuchte Funktion Null.

$$J_1(y) = \int_0^1 (y'^{\,2} + x^2 y)dx \quad : \quad y(0) = 0;\quad y(1) = 1$$

$$J_2(y) = \int_0^1 (\frac{1}{2}y'^{\,2} + yy' + y' + y)dx$$

$$J_3(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 \pm y'^{\,2} - 2y\sin x)dx$$