Wiederholung Mathematischer Grundlagen

Vektoren, Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation

1. Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = (4, 2, 1)$ und $\vec{b} = (2, 5, 3)$ ihre Beträge $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ sowie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$! Welchen Winkel schließen die Vektoren miteinander ein? Wie sind Skalarprodukt und Vektorprodukt geometrisch zu interpretieren? Welche Eigenschaften haben sie bei Vertauschung der Faktoren?

2. Für die drei Vektoren $\vec{x}_1 = (0, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, 0, 2)$, $\vec{x}_3 = (2, 1, 0)$ sind die Skalarprodukte $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$, $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3$, $\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1$ und die Vektorprodukte $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2$, $\vec{x}_2 \times \vec{x}_3$, $\vec{x}_3 \times \vec{x}_1$ zu berechnen. Berechnen Sie auch die doppelten Vektorprodukte $\vec{x}_1 \times (\vec{x}_2 \times \vec{x}_3)$ und $(\vec{x}_1 \times \vec{x}_2) \times \vec{x}_3$ und machen Sie sich den Unterschied klar. $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}))$ Wie groß ist das Volumen des von $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, und $\vec{x}_3$ aufgespannten Parallelepipeds? Sind die drei Vektoren linear unabhängig?

3. Berechnen Sie die Gradientenfelder für die Potentiale/Skalarfelder:
   $U(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25}$
   $V(x, y, z) = a(x^2 + y^2) + bz^2 \qquad (a, b \quad \text{positiv})$
   $W(x, y, z) = \dfrac{x^3 - 12x}{16} + y^2 + z^2$
   $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2$
   $\Phi(\vec{r}) = 1/r \qquad (r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
   $\Lambda(\vec{r}) = \vec{c} \cdot \vec{r}$
   Welche Gestalt haben die zugehörigen Äquipotentialflächen?

4. Berechnen Sie für die in Aufgabe 3.) bestimmten Gradientenfelder die Divergenz (Quellendichte) und die Rotation (Wirbeldichte)!

5. Berechnen Sie für folgende Vektorfelder die Divergenz und die Rotation:
   $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = (x, y, z) \qquad$ "Ortsvektorfeld"
   $\vec{A}_1(\vec{r}) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 - z^2, x^2)$
   $\vec{A}_2(x, y, z) = (-y\omega, x\omega, 0) \quad (\ \omega = \text{const})$
   $\vec{A}_3(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\ \vec{\omega} = c\vec{o}nst)$
   $\vec{A}_4(\vec{r}) = 3x^2y\vec{e}_x + yz^2\vec{e}_y - xz\vec{e}_z$

6. Verdeutlichen Sie sich anhand der Integralsätze von Gauß und Stokes die Vektordifferentialoperatoren div und rot !

7. Untersuchen Sie folgende Vektorfelder hinsichtlich der Existenz eines Potentials und bestimmen Sie dieses, falls es existiert!
   $\vec{F}_1(\vec{r}) = (2xy + z^3, x^2 + 2y, 3xz^2 - 2)$
   $\vec{F}_2(\vec{r}) = (yz, xz, xy) \qquad \vec{F}_3(\vec{r}) = (a \cdot x\ ,\ b \cdot y\ ,\ c \cdot z)$
   $\vec{F}_4(\vec{r}) = A\ \vec{r} \cdot e^{-\gamma\ r^2} \qquad \vec{F}_5(\vec{r}) = 5\ \vec{r} \cdot \sin(\gamma\ r^2)$
   $\vec{F}_6(\vec{r}) = \dfrac{a\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{F}_7(\vec{r}) = \dfrac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}$
   $\vec{F}_8(\vec{r}) = (w \cdot y^2, -w \cdot x^2, -mg) \qquad \vec{F}_9(\vec{r}) = (\ 2\ (x^2 + y^2),\ -3\ (x^2 + y^2),\ -mg)$
   $(a, b, c, A, \gamma, w, m, g, \vec{\mu}$ alles Konstanten!)