## Theoretische Physik I – Mechanik

1. Bestimmen Sie für folgende Kraftfelder
   $\vec{F}_1(\vec{r}) = (5\ x^2 - 3\ y^2,\ 2\ x^2 - 2\ y + 5,\ 2\ x^2 - z^2)$ und
   $\vec{F}_2(\vec{r}) = 3\vec{r} \cdot e^{-2r^2}$ (mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$)
   (a) die Quellendichte,
   (b) die Wirbeldichte und
   (c) das dazugehörige Potenzial, falls eines existiert.
   (d) Welche Gestalt haben die Äquipotenzialflächen für (c)?

2. Ein Massenpunkt der Masse $m = 1$ sei an einer Feder mit der Federkonstante $k = 13$ befestigt und gleite entlang der $x-$Achse (Horizontale). Der Massenpunkt unterliege einer Reibungskraft proportional zum Betrag der Geschwindigkeit $v$ und entgegengerichtet zu dieser; der Proportionalitätsfaktor sei $\gamma = 4$. Stellen Sie für den Fall einer Auslenkung von $m$ aus der Ruhelage die Bewegungsgleichung mit Hilfe des Kraftansatzes nach Newton auf und lösen Sie diese! Interpretieren Sie die von dieser Differenzialgleichung beschriebene Bewegung des Massenpunktes physikalisch, d.h. von welcher Art sind die Kräfte, gibt es ein Potenzial, gelten Erhaltungssätze?

3. Eine gelagerte Perle (Massenpunkt $m$) gleitet reibungsfrei im Erdschwerefeld auf einem halbkreisförmig gebogenen Draht, dessen Gestalt durch die Funktion $R^2 = x^2 + z^2$ $(x \in [-R, R], z \in [-R, 0],\ R > 0)$beschrieben wird ( $x$ die horizontale und $z$ ist die vertikale Achse).
   (a) Fertigen Sie eine Skizze vom Draht mit der Perle im $x$-$z$ Koordinatensystem an. Geben Sie die Nebenbedingungen für die Bewegung von $m$ und die Zahl der Freiheitsgrade an!
   (b) Stellen Sie in verallgemeinerten Koordinaten die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen!
   (c) Welche zyklischen Koordinaten und welche Erhaltungsgrößen gibt es bei dieser Bewegung?
   (d) Skizzieren Sie die Potenzialfunktion abhängig von den verallgemeinerten Koordinaten. Skizzieren Sie die Phasenraumbahn, falls $m$ aus der Ruhe und von einem Punkt mit $x = R$ und $z = 0$ startet!
   (e) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse und mit diesen die Hamilton-Funktion!
   (f) Stellen Sie die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen auf!

4. Bestimmen Sie für das Potenzial $U(x) = (\sin x)^2$
   (a) das Kraftfeld $F_x(x)$ mit seinen Gleichgewichtslagen,
   (b) die Bewegungsgleichung einer Masse $m = 8$ in diesem Kraftfeld $F_x(x)$,
   (c) die Kreisfrequenzen $\omega_0$ für Schwingungen von $m$ um dafür geeignete Gleichgewichtslagen (harmonische Näherung)!
   (d) Skizzieren Sie für die Gesamtenergien $E = 0$ ; $\dfrac{1}{2}$ ; 1 und $\dfrac{3}{2}$ die Phasenraumbahnen zusammen mit dem Potenzial $U(x)$!

## Formelsammlung

### "Quadrate" des Nabla-Operators

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = (\nabla\cdot\nabla)U = \Delta U$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A})$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,U = (\nabla\times\nabla)U = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

### Produktregeln

$$\mathrm{grad}\,(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi\ \nabla\psi + \psi\ \nabla\varphi = \varphi\ \mathrm{grad}\,\psi + \psi\ \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla\cdot(\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\varphi = \varphi\ \mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla\times(\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\varphi = \varphi\ \mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{B}) = \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

$$\mathrm{rot}\,(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\cdot\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\mathrm{grad}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\times\mathrm{rot}\,A + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$