Theoretische Physik I – Mechanik

Als Hilfsmittel sind mathematische Tafelwerke und Formelsammlungen zugelassen, z.B. Göhler, Merziger et al. sowie Taschenrechner. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten!

1. Bestimmen Sie die Lösung $z(t)$ der Differenzialgleichung
   $\ddot{z}(t) + 14\ \dot{z}(t) + 50\ z(t) = 0 \quad !$
   Interpretieren Sie die von dieser Differenzialgleichung beschriebene Bewegung eines Massenpunktes m mit der Masse $m = 1$ physikalisch, d.h. von welcher Art sind die Kräfte, gibt es ein Potenzial, gelten Erhaltungssätze?
   Wie ändert sich die Lösung der Differenzialgleichung qualitativ (ohne Rechnung), wenn auf der rechten Seite der inhomogene Term $\cos 5t$ hinzukommt?

2. Bestimmen Sie zu den Potenzialen $U = 4x^2 + 4y^2 + z^2$ und $W(\vec{r}) = \cos r$ (mit $\mathrm{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

   (a) die zugehörigen Kraftfelder und von diesen
   (b) die Quellendichte (Divergenz) und die Wirbeldichte (Rotation)!
   (c) Welche Gestalt haben die Äquipotenzialflächen von U und W?

3. Ein Massenpunkt bewege sich entlang der Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = (R\cos\Omega t, \quad R\sin\Omega t, \quad G\frac{\Omega t}{2\pi})$$

   - Welche geometrische Gestalt hat die Bahnkurve? Welche Bedeutung haben die Größen R, Ω und G?
   - Berechnen Sie die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung! Welche Richtung haben diese zueinander?

4. Bestimmen Sie für das Potenzial $\mathrm{U}(x) = -2\ \cos(x)$

   (a) die Gleichgewichtslagen und die Kraft, die auf einen Massenpunkt $m = 2$ wirkt!
   (b) die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt $m = 2$ in diesem Feld (Lagrangeformalismus)! Gibt es Erhaltungsgrößen?
   (c) die Kreisfrequenzen ω für Schwingungen um dafür geeignete Gleichgewichtslagen in harmonischer Näherung (kleine Amplitude)!
   (d) Skizzieren Sie für die Gesamtenergien $E = -2, -1, 0, 4$ die Phasenraumkurven!
   (e) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse für die Bewegung der Masse $m = 2$ in diesem Potenzial. Berechnen Sie die Hamiltonfunktion und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Zeigen Sie die Äquivalenz der Euler-Lagrange-Gleichungen mit den Hamiltonschen Gleichungen.

5. * Zusatzaufgabe
Bestimmen Sie von folgenden Kraftfeldern die Quellendichte und Wirbeldichte und finden Sie für die konservativen Kraftfelder unter ihnen ein Potenzial!
$\vec{F}_1(\vec{r}) = (2y^2\ ,\ -3x^2\ , -10)$
$\vec{F}_2(\vec{r}) = \vec{r} \cdot e^{-\ r^2}$

Formelsammlung

"Quadrate" des Nabla-Operators

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, U \;= (\nabla \cdot \nabla) U \;=\; \Delta U$

$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \vec{A} \;=\; \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, U = (\nabla \times \nabla) U = \vec{0}$

$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \vec{A} \;=\; \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \;=\; 0$

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \vec{A} \;=\; \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \;=\; \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \vec{A} - \Delta \vec{A}$

Produktregeln

$\mathrm{grad}\,(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi\ \nabla\psi + \psi\ \nabla\varphi = \varphi \ \mathrm{grad}\ \psi + \psi \ \mathrm{grad}\ \varphi$

$\mathrm{div}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla\varphi = \varphi \ \mathrm{div}\ \vec{A} + \vec{A} \cdot \mathrm{grad}\ \varphi$

$\mathrm{rot}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla \times (\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla\varphi = \varphi \ \mathrm{rot}\ \vec{A} - \vec{A} \times \mathrm{grad}\ \varphi$

$\mathrm{div}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\ \vec{A} - \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\ \vec{B}$

$\mathrm{rot}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot \mathrm{div}\ \vec{B} - \vec{B} \cdot \mathrm{div}\ \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$

$\mathrm{grad}\,(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \mathrm{rot}\ \vec{B} + \vec{B} \times \mathrm{rot}\ A + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$