Modulprüfung

Theoretische Physik I – Mechanik

Auf die beiden ersten Fragen gibt es für jede richtige Aussage 1 bis 3 Punkte, für jede falsche Aussage 1 Punkt, wenn sie entsprechend markiert werden (richtig/falsch)!

1. Ein zentraler Begriff in der Mechanik ist der des Potenzials. Welche Eigenschaften besitzt es?

   (a) Das Potenzial beschreibt die Potenz eines mechanischen Systems, Arbeit zu verrichten!

   (b) Dort wo das Potenzial gleich Null ist, befindet sich ein mechanisches System im Gleichgewicht.

   (c) Ein Potenzial ist eine von den Raumkoordinaten abhängige skalare Funktion, aus der sich Kräfte in Richtung des Gefälles ableiten.

   (d) Die Gipfel einer Potenziallandschaft sind Gleichgewichtslagen.

   (e) Für die Bewegung in einem reinen Potenzialkraftfeld gilt Energieerhaltung.

   (f) Damit auch der mechanische Impuls erhalten bleibt (während der Bewegung), dürfen nur Potenzialkräfte wirken.

   (7 Punkte)

2. Energie, Impuls und Drehimpuls spielen in der Mechanik eine große Rolle, vor allem, wenn sie während der Bewegung erhalten bleiben. Welche Erhaltungsgrößen gibt es in den folgenden Beispielen? Man beachte, dass einige Größen vektorieller Natur sind und somit mehrere Komponenten haben!

   (a) Ein Körper (z.B. Satellit oder Mond) bewege sich im Newtonschen Gravitationsfeld der Erde (die Atmosphäre sei vernachlässigbar dünn).

   (b) Ein Stück Kreide, dass durch den Hörsaal fliegt, also durch das erdoberflächennahe homogene Schwerefeld der Erde (ohne Luftreibung).

   (c) Die Bewegung eines Planeten um die Sonne unter dem gleichzeitigen gravitativen Einfluss weiterer Himmelskörper.

   (d) Der nichtzentrale Zusammenstoß zweier identischer idealer Billardkugeln auf einem idealen Billardtisch (ohne Reibung).

   (e) Das Rollen einer Murmel in einem ganz normalen Murmelloch im Sand.

   (11 Punkte)

3. Ein harmonischer Oszillator sei dadurch realisiert, dass eine Masse $m = 0.01$ kg an einer Schraubenfeder (elastische Konstanten $k = 0.04$ N/m) entlang der x-Achse, reibungsfrei gleiten kann!

   (a) Formulieren Sie die Nebenbedingungen und wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten zur Beschreibung der Bewegung!

   (b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie daraus die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen ab!

   (c) Untersuchen Sie das System auf zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen!

(d) Bestimmen Sie die kanonischen Impulse und skizzieren Sie die Phasenraumbahnen!

(e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall, dass die Bewegung aus der Ruhe und mit einer Anfangsauslenkung von 10 cm startet!

(f) Wie groß ist die Anfangsenergie des Oszillators?

(15 Punkte)

4. Für die Bewegung eines Massenpunktes m sei die Hamiltonfunktion in den Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gegeben:

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mz^2} + mgz \qquad (m, g = \text{const.})$$

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat der Massenpunkt?

(b) Untersuchen Sie H auf zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen!

(c) Geben Sie die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen für die Bewegung an!

(d) Wie lässt sich unter Ausnutzung der Erhaltungssätze die Bewegung des Massenpunktes qualitativ beschreiben?

(12 Punkte)

5. Finden Sie für das Potenzial $V(\vec{r}) = z^2 e^{(x^2 + y^2)}$

(a) die kartesischen Komponenten des Kraftfeldes F_x, F_y und F_z

(b) die Quellendichte und die Wirbeldichte von $\vec{F}(\vec{r})$!

(c) Welche Gestalt haben die Äquipotenzialflächen?

(d) Wo gibt es im Kraftfeld Gleichgewichtslagen?

(e) Welcher Unterschied besteht zwischen der Arbeitsverrichtung zur Verschiebung einer Masse $m = 4$ gegen das Kraftfeld
I) von $P_1 = (1, 1, 1)$ nach $P_2 = (1, 1, 2)$ bzw.
II) von P_1 nach $P_3 = (1, 1, -2)$?

(f) Ist das Kraftfeld ein Zentralkraftfeld (Begründung)?

(12 Punkte)

6. Eine Punktmasse m fällt in einen Schacht, der die Erde in Ihrem Mittelpunkt durchbohren soll.

(a) Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung für m auf, wenn bekannt ist, dass die Kraft m immer zum Erdmittelpunkt zieht, so als wäre dort die gesamte innere Masse der Erde konzentriert. Die innere Masse ist die Masse innerhalb der Kugel mit dem Radius r des momentanen Abstandes der Masse m vom Erdmittelpunkt. Die Massendichte ρ_E der Erde werde als konstant angenommen.

(b) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit erreicht die Masse m den Erdmittelpunkt?

Die Gravitationskonstante ist G $= 6.674 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, die Masse und der Radius der Erde haben die Werte M$_E = 5.974 \cdot 10^{-24}$ kg und R$_E$ = 6371 km.

(8 Punkte)

Formelsammlung

"Quadrate" des Nabla-Operators

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = (\nabla\cdot\nabla)U = \Delta U$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A})$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,U = (\nabla\times\nabla)U = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Produktregeln

$$\mathrm{grad}\,(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi\;\nabla\psi + \psi\;\nabla\varphi = \varphi\;\mathrm{grad}\,\psi + \psi\;\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla\cdot(\varphi\vec{A}) = \varphi\;\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\varphi = \varphi\;\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla\times(\varphi\vec{A}) = \varphi\;\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\varphi = \varphi\;\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\times\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}\times\vec{B}) = \nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

$$\mathrm{rot}\,(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\cdot\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\mathrm{grad}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\times\mathrm{rot}\,A + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$