Modulprüfung

Theoretische Physik I – Mechanik

1. Markieren Sie die folgenden Aussagen mit richtig bzw. falsch!
   (a) Für die Bewegung in einem reinen Potenzialkraftfeld gilt Energieerhaltung.
   (b) Dort, wo das Potenzial gleich Null ist, befindet sich ein mechanisches System im Gleichgewicht.
   (c) Ein Potenzial ist eine von Raumkoordinaten abhängige skalare Funktion, aus der sich Kräfte in Richtung des Gefälles ableiten.
   (d) Die Gipfel einer Potenziallandschaft sind Gleichgewichtslagen.
   (e) Damit auch der mechanische Impuls erhalten bleibt (während der Bewegung), dürfen nur Potenzialkräfte wirken.
   (f) Jede zyklische Koordinate ist eine verallgemeinerte Koordinate.
   (g) Jede verallgemeinerte Koordinate ist natürlich auch eine zyklische Koordinate.
   (h) Eine zyklische Koordinate ist eine spezielle Koordinate und kann deshalb keine verallgemeinerte Koordinate sein.
   (i) Zyklische Koordinaten sind Koordinaten, die sich nach einem gewissen Zyklus wiederholen, also z. B. Winkelkoordinaten.
   (j) Eine zyklische Koordinate ist eine spezielle verallgemeinerte Koordinate und weist auf einen Erhaltungssatz hin.

   (10 Punkte)

2. Wissensfragen
   (a) Wie bewegt sich bei Impulserhaltung der Schwerpunkt eines Systems?
   (b) Was verstehen Sie unter dem Begriff „Homogenität der Zeit“ und mit welcher Erhaltungsgröße ist er verknüpft?
   (c) Wie hängen die Lagrangefunktion $L(q_1...q_m,\ \dot{q}_1...\dot{q}_m,\ t)$ und die zugehörige Hamiltonfunktion $H(q_1...q_m,\ p_1...p_m,\ t)$ miteinander zusammen?
   (d) Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen?

   (8 Punkte)

3. Die Bahn eines Punktes P sei in kartesischen Koordinaten gegeben als $\vec{r}(t) = (\sin(2t^2/\pi), \cos t, 3t)$. Bestimmen Sie seinen Geschwindigkeitsvektor und den Betrag seiner Geschwindigkeit zur Zeit $t = \pi$.
   (4 Punkte)

4. Kraftfelder
   (a) Wann ist ein Kraftfeld konservativ? Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen!
   (b) Beweisen Sie, dass ein Zentralkraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$, wirbelfrei ist!
   (c) Untersuchen Sie das Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r}) = (ay, ax, b)$, wobei a und b positive Konstanten sind, ob es ein konservatives Kraftfeld ist!
   (d) Bestimmen Sie die Quellendichte des Kraftfeldes $\vec{K}(\vec{r})$!

   (8 Punkte)

5. Die Bewegung eines Massenpunktes m sei in der verallgemeinerten Koordinate q durch folgende Lagrange-Funktion beschrieben:

$$L = e^{\gamma t}(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2) \qquad (m, k, \gamma = \text{ const.})$$

   (a) Wieviele Freiheitsgrade hat der Massenpunkt?
   (b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung her.
   (c) Gibt es zyklische Koordinaten? Gibt es Erhaltungsgrößen?
   (d) Geben Sie ein physikalisches Beispiel an, welches diese Bewegungsgleichung erfüllt.

   (8 Punkte)

6. Lösen Sie das Bewegungsproblem eines ebenen mathematischen Pendels (Fadenlänge l, Masse m; l und $m =$ const.). Geben Sie in einer Skizze die von Ihnen verwendeten Koordinaten an!

   (a) Geben Sie die Nebenbedingungen für die Pendelbewegung, die Zahl der Freiheitsgrade und die gewählten verallgemeinerten Koordinaten an!
   (b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion!
   (c) Gibt es zyklische Koordinaten? Welche Erhaltungsgrößen der Bewegung gibt es (Begründung)?
   (d) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Impulse und geben Sie die Hamiltonfunktion für das Pendel an.
   (e) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Hamilton'schen kanonischen Gleichungen her!
   (f) Wie sehen die Bahnkurven für die Pendelbewegung im Phasenraum aus?

   (12 Punkte)

Formelsammlung

"Quadrate" des Nabla-Operators

$$\text{div grad } U = (\nabla \cdot \nabla)U = \Delta U$$

$$\text{grad div } \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\text{rot grad } U = (\nabla \times \nabla)U = \vec{0}$$

$$\text{div rot } \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \text{grad div } \vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Produktregeln

$$\text{grad } (\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi\ \nabla\psi + \psi\ \nabla\varphi = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi$$

$$\text{div } (\varphi\vec{A}) = \nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla\varphi = \varphi \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } \varphi$$

$$\text{rot } (\varphi\vec{A}) = \nabla \times (\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla\varphi = \varphi \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad } \varphi$$

$$\text{div } (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{rot } (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot \text{div } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } A + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$