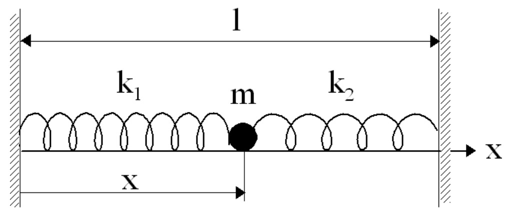
## Modulprüfung

## Theoretische Physik I – Mechanik

1. Geben Sie für folgenden Aussagen den Wahrheitswert richtig/falsch an! Richtige Aussagen sind kurz zu erläutern!
   (a) Das Hamilton-Prinzip gibt an, wie die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen aufzuschreiben sind.
   (b) Das Prinzip der kleinsten Wirkung weist einem mechanischen System den goldenen Mittelweg zwischen potenzieller und kinetischer Energie.
   (c) Eine Nebenbedingung ist eine zusätzliche Angabe zum Ablauf der Bewegung eines mechanischen Systems, wie z.B. zu den wirkenden Kräften.
   (d) Jede holonome Nebenbedingung reduziert die Zahl der Freiheitsgrade eines mechanischen Systems um eins.
   (e) Ein verallgemeinerter Impuls ist das Produkt aus der zugehörigen Masse und einer verallgemeinerten Geschwindigkeit.
   (f) Zyklische Koordinaten sind Koordinaten, die sich nach einem gewissen Zyklus wiederholen, also z.B. Winkelkoordinaten!
   (g) Eine zyklische Koordinate ist eine spezielle verallgemeinerte Koordinate und weist auf einen Erhaltungssatz hin.

   (12 Punkte)

2. Ein Massenpunkt der Masse $m$, der zwischen zwei Federn mit den elastischen Konstanten $k_1$ und $k_2$ befestigt ist, kann sich reibungsfrei entlang der $x$-Achse bewegen. Der Abstand zwischen den Wandaufhängungen sei $l$, die Ruhelängen der Federn sind vernachlässigbar.




   (a) Bestimmen Sie die potenzielle Energie $U(x)$ des Massenpunktes $m$, wenn sich der $x$-Nullpunkt an der linken Wand befindet, und finden Sie seine Gleichgewichtslage $x_G$!
   (b) Geben Sie die Nebenbedingungen an, denen die Masse $m$ unterworfen ist, und wählen Sie die richtige Anzahl von geeigneten verallgemeinerten Koordinaten.
   (c) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L$ für die Bewegung der Masse $m$ auf sowie die daraus resultierenden Lagrange'schen Gleichungen 2.Art!
   (d) Lösen Sie die Differenzialgleichung der Bewegung und diskutieren Sie die Lösung!
   (e) Gibt es bei der Bewegung Erhaltungsgrößen? Wenn ja, welche? (Begründung)
   (f) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und stellen Sie die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen auf!
   (g) Skizzieren Sie die Phasenraumbahnen der Bewegung!

   (18 Punkte)

3. Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (y + az,\ z + bx,\ x + cy)$ !
   (a) Bestimmen Sie die Konstanten $a, b, c$ so, dass $\vec{F}(\vec{r})$ ein Potenzial besitzt!

(b) Finden Sie das zugehörige Potenzial!
(c) Berechnen Sie die Arbeit für die Verschiebung eines Massenpunktes der Masse $m = 6$ im Kraftfeld vom Punkt $\vec{P}_1 = (1, 2, 3)$ zum Punkt $\vec{P}_2 = (4, 5, 6)$! Lässt sich diese Verschiebungsarbeit durch Wegoptimierung möglicherweise minimieren? (Begründung)
(d) Wie groß ist die Quellendichte des Kraftfeldes?
(e) Ist dieses Kraftfeld ein Zentralkraftfeld?
(f) Was können Sie über seine Äquipotenzialflächen sagen?
(14 Punkte)

4. Zentralkraftfelder
   (a) Nennen Sie die wesentlichen Eigenschaften eines Zentralkraftfeldes!
   (b) Welche Erhaltungssätze gelten für die Bewegung eines Massenpunktes in Zentralkraftfeldern? (Begründung)
   (c) Untersuchen Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (x \sin r, y \sin r, z \sin r)$, ob es ein Zentralkraftfeld darstellt!
   (d) Gibt es zu diesem Kraftfeld Äquipotenzialflächen, und wenn ja von welcher Gestalt?
   (10 Punkte)
5. Welche Eigenschaft muss ein Kraftpotenzial $U(\vec{r})$ besitzen,
   (a) damit in ihm periodische Bewegungen, also Schwingungen, möglich sind?
   (b) Wann heißen solche Schwingungen harmonisch und warum?
   (c) Untersuchen Sie das eindimensionale Potenzial $U(x) = x^4 - 4x^2$ auf die Möglichkeit von harmonischen Schwingungen!
   (d) Berechnen Sie mögliche Kreisfrequenzen $\omega$ solcher Schwingungen!
   (e) Wie sehen die Phasenraumbahnen für diese Bewegungen aus? (Skizze)
   (12 Punkte)

## Formelsammlung

### "Quadrate" des Nabla-Operators

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U = (\nabla \cdot \nabla)U = \Delta U$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,U = (\nabla \times \nabla)U = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta \vec{A}$$

### Produktregeln

$$\mathrm{grad}\,(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi\ \nabla\psi + \psi\ \nabla\varphi = \varphi\ \mathrm{grad}\,\psi + \psi\ \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla\varphi = \varphi\ \mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\vec{A}) = \nabla \times (\varphi\vec{A}) = \varphi\ \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla\varphi = \varphi\ \mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A} \times \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B}$$

$$\mathrm{rot}\,(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot \mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B} \cdot \mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\mathrm{grad}\,(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \mathrm{rot}\,\vec{B} + \vec{B} \times \mathrm{rot}\,A + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$