

VORLESUNG
Theoretische Physik
Kontinuumsmechanik

12. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	5
2	Kinematik elastischer Medien	7
2.1	Verschiebungsfeld, Verschiebungstensor, Deformationstensor	7
2.2	Rotationsanteil	9
2.3	Deformationen	10
3	Dynamik elastischer Medien	15
3.1	Der Spannungstensor	15
3.2	Die statischen Gleichgewichtsbedingungen	18
3.3	Die Bewegungsgleichungen	20
4	Elastostatik	21
4.1	Das Hooke'sche Gesetz	21
4.2	Isotroper Körper	23
4.3	Das elastische Potential	27
4.4	Kristallelastizität	32
4.5	Torsion	33
4.6	Balkenbiegung	35
5	Wellen in elastischen Medien	41
5.1	Die Bewegungsgleichungen des isotrop elastischen Körpers	41
5.2	Die Wellengleichung für den isotrop elastischen Körper	43
5.3	Spezielle Lösungen der Wellengleichung	44
5.4	Ebene harmonische elastische Wellen	46
5.5	Elastische Wellen im Stab	47
5.6	Elastische Wellen in Platten	49
5.7	Schwingende Saite	50
5.8	Reflexion und Brechung elastischer Wellen	55
5.9	Oberflächenwellen (Rayleigh-Typ)	59
5.10	Oberflächenwellen (Love-Typ)	63
6	Kinematik von Flüssigkeiten und Gasen	67
6.1	Die lokale Betrachtungsweise	67
6.2	Die Kontinuitätsgleichung	68

7	Dynamik von Flüssigkeiten und Gasen	71
7.1	Der Spannungstensor in Flüssigkeiten und Gasen	71
7.2	Zustandsgleichungen	72
7.3	Euler'sche und Navier-Stokes'sche Gleichungen	73
8	Hydro- und Aerostatik	77
8.1	Grundgleichungen	77
8.2	Anwendungen	78
9	Druckgleichung und Bernoulli-Gleichung	83
9.1	Grundbegriffe	83
9.2	Die Druckgleichung	84
9.3	Die Bernoulli-Gleichung	84
10	Potentialströmungen	87
10.1	Allgemeine Potentialströmung	87
10.2	Die ebene Potentialströmung	87
11	Wirbelströmungen	95
12	Laminare Strömungen	99
12.1	Die Hagen-Poiseuille'sche Strömung	99
12.2	Strömung eines Gases durch ein Rohr	102
12.3	Stokes'sches Widerstandsgesetz	103
12.4	geneigter Flüssigkeitsfilm	104
13	Ähnlichkeitsgesetze	107
14	Turbulente Strömungen	109
15	Wellen in Flüssigkeiten und Gasen	113
15.1	Oberflächenwellen: Schwerewellen	113
15.2	Oberflächenwellen: Kapillarwellen	118
15.3	Schallwellen	118
16	Sickerströmungen	121
17	Rheologische Gleichungen	125

Kapitel 1

Vorbemerkungen

Achtung: Das Skript ist nur ein Entwurf, der noch nicht fertiggestellt ist und sicher noch Fehler enthält. Entdeckte Mängel bitte mir mitteilen. Gert Irmer, irmer@physik.tu-freiberg.de, Tel. 2006/2777

Mechanik deformierbarer Medien.

Vergleiche mit starrem Körper: Abstände der N Teilchen voneinander fest, M Nebenbedingungen, $f = 3N - M = 6$, 3 Translationen und 3 Rotationen.

Beschreibungsmöglichkeiten für ein deformierbares Medium:

1. Medium besteht aus N diskreten Massenpunkten. Wechselwirkungskräfte aus Potentialfunktionen ableitbar, Veranschaulichung durch Federkräfte. Bsp.: Kristallgittertheorien, Molekulardynamik, ab initio- Rechnungen
2. Homogenes Medium. Beschreibung durch makroskopische Größen wie Massendichte, Druck, Geschwindigkeit. Die makroskopischen Größen sind stetige Funktionen des Ortes und der Zeit. Das Volumenelement muß hinreichend groß sein (genügend viele MP enthalten, damit Begriffe wie Massendichte sinnvoll sind), aber auch hinreichend klein sein, um mit Differentialen rechnen zu können.

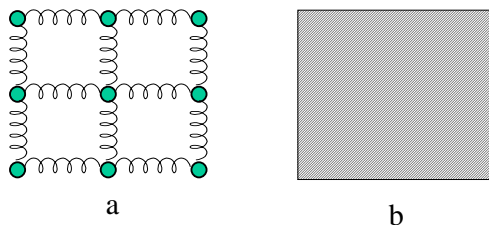


Abb. 1.1:

Zwei Modelle des Festkörpers

- a) Punktmassen und Federkräfte
- b) Homogenes Kontinuum

Kapitel 2

Kinematik elastischer Medien

2.1 Verschiebungsfeld, Verschiebungstensor, Deformationstensor

Lagrange'sche und Euler'sche Darstellung

Euler:

Der Zustand des Fluids am Ort \vec{r} zur Zeit t wird betrachtet, z.B. $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Die Herkunft des Teilchens am Ort \vec{r} zur Zeit t ist uninteressant.

Anwendung: Flüssigkeiten und Gase.

Lagrange'sche „substantielle“ Betrachtungsweise:

Jedes Massenelement („Punkt“) wird mit einem „Namen“ versehen, z. B. dem Ort \vec{r} des ME zur Zeit $t = 0$. Die Bewegung des Massenelementes wird verfolgt: $\vec{s}(\vec{r}, t)$

Anwendung: Festkörper. In den Kapiteln zu elastischen Medien wird die Lagrange'sche Betrachtungsweise angewendet.

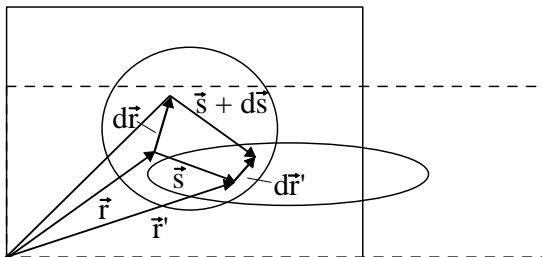
Zur Zeit t' befindet sich das Massenelement \vec{r} am Ort \vec{r}' . Verrückung zweier benachbarter ME: Beispiel Kreis mit Pfeil auf Radiergummi.

$\vec{s}(\vec{r})$ ist der Verschiebungsvektor. Die Deformation der Umgebung des ME wird durch $d\vec{s}$ beschrieben.

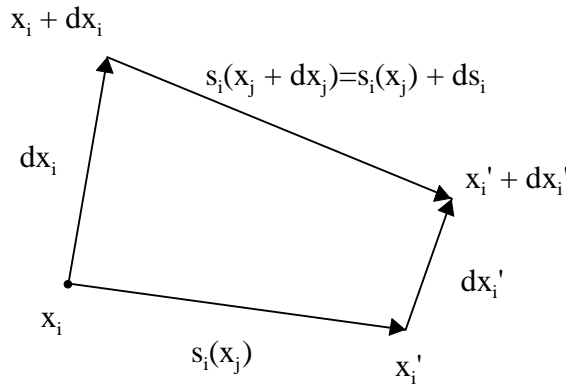
$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{s} \\ d\vec{r}' &= d\vec{r} + d\vec{s} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Abb. 2.1:

Deformation eines Radiergummis



Der Kreis auf dem Radiergummi geht bei der Deformation in eine Ellipse über. Aus dem Pfeil $d\vec{r}$ wird der Pfeil $d\vec{r}'$

**Abb. 2.2:**

Darstellung der infinitesimalen Verschiebung aus Abb. 2.1 in Komponenten-Schreibweise

Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned}
 \vec{s}(\vec{r} + d\vec{r}) &= \vec{s}(\vec{r}) + d\vec{s} = \vec{s}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{s}}{\partial x_j} dx_j = \vec{s}(\vec{r}) + \left(dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \vec{s} = \\
 &= \vec{s}(\vec{r}) + \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \vec{s} = \\
 &= \vec{s}(\vec{r}) + \underbrace{(d\vec{r} \cdot \text{grad})}_{\text{Vektorgradient}} \vec{s}
 \end{aligned}$$

Komponentenschreibweise:

$$s_i(x_j + dx_j) = s_i(x_j) + ds_i = s_i(x_j) + \frac{\partial s_i}{\partial x_j} dx_j + \dots$$

Vektorgradient:

Annahme: $\left| \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right|$ sei klein ($\ll 1$), *lineare Elastizitätstheorie*

$$ds_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} dx_j = a_{ij} dx_j, \quad d\vec{s} = (d\vec{r} \cdot \text{grad}) \vec{s} \quad (2.2)$$

Verschiebungstensor:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{\partial s_x}{\partial y} & \frac{\partial s_x}{\partial z} \\ \frac{\partial s_y}{\partial x} & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{\partial s_y}{\partial z} \\ \frac{\partial s_z}{\partial x} & \frac{\partial s_z}{\partial y} & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

beschreibt die Verschiebung: Deformation + Rotation des Volumenelementes, keine Translation (für diese ist $\vec{s} = \text{const.}$). Zerlegung dieses Tensors in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil:

$$a_{ij} = a_{ij}^a + a_{ij}^s = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = a_{ij}^a + \varepsilon_{ij}$$

Rotationstensor:

$$\tilde{a}^a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

Deformationstensor:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$ds_i = 0 \quad \rightarrow$ Translation, alle x_i haben dasselbe s_i

Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} ds_i &= \frac{\partial s_i}{\partial x_j} dx_j = a_{ij} dx_j = ds_i^a + ds_i^D \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \\ &= a_{ij}^a + \varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2 Rotationsanteil

\tilde{a}^a kann ein axialer Vektor zugeordnet werden:

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{s} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z}, \frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x}, \frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right)$$

$\vec{\varphi}$ ist klein wegen $\left| \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right| \ll 1$, Abbildung $\vec{\varphi} \Leftrightarrow \tilde{a}^a$

Es ist $d\vec{s}^a = \vec{\varphi} \times d\vec{r}$.

$$\begin{aligned} d\vec{s}^a &= \{ \varphi_y dz - \varphi_z dy, \varphi_z dx - \varphi_x dz, \varphi_x dy - \varphi_y dx \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) dz - \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) dy, \dots, \dots \right\} \\ &= \{ a_{1j}^a dx_j, \dots, \dots \} \end{aligned}$$

Abbildung des antisymmetrischen Tensors auf einen axialen Vektor

$$\begin{aligned} d\vec{s}^a &= \vec{\varphi} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{s}) \times d\vec{r} \\ ds_i^a &= a_{ij}^a dx_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

Unterschied axialer Vektor - polarer Vektor: bei Inversion am Koordinatenursprung ergibt sich

axialer Vektor \rightarrow axialer Vektor, polarer Vektor \rightarrow - polarer Vektor

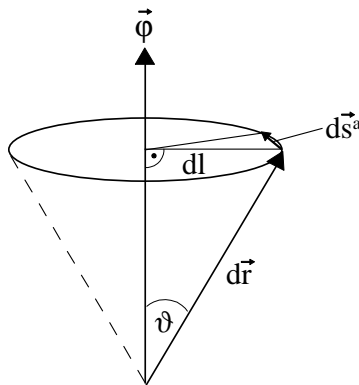


Abb. 2.3:
Drehung des Volumenelementes um einen kleinen Winkel φ

$$d\vec{s}^a = |\vec{\varphi} \times d\vec{r}| = \varphi dr \sin \vartheta = \varphi dl$$

2.3 Deformationen

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + s_i \\ dx'_i &= dx_i + ds_i \end{aligned}$$

$$ds_i = a_{ij}^a dx_j + ds_i^D$$

Im folgenden werden keine Rotationen, nur Deformationen betrachtet:

$$ds_i^D = \varepsilon_{ij} dx_j \quad (2.5)$$

Ein kleines Volumenelement dV mit den Kanten dx_i wird deformiert zu dV' :

$$dx'_i = dx_i + \varepsilon_{ij} dx_j$$

Ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} dx'_1 &= (1 + \varepsilon_{11})dx_1 + \varepsilon_{12}dx_2 + \varepsilon_{13}dx_3 \\ dx'_2 &= \varepsilon_{21}dx_1 + (1 + \varepsilon_{22})dx_2 + \varepsilon_{23}dx_3 \\ dx'_3 &= \varepsilon_{31}dx_1 + \varepsilon_{32}dx_2 + (1 + \varepsilon_{33})dx_3 \end{aligned}$$

Längenänderungen:

Beispiel: Ein Radiergummi mit aufgedrucktem Pfeil wird durch reine Streckung bzw. Stauchung deformiert

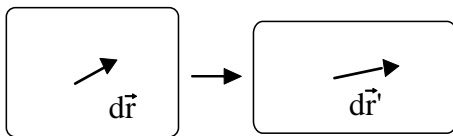


Abb. 2.4:

Deformation eines Radiergummis durch Dehnung und Stauchung

In Richtung der x_1 - Achse ergibt sich :

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx_1, 0, 0) \\ d\vec{r}' &= (dx'_1, dx'_2, dx'_3) = (1 + \varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})dx_1 \\ \varepsilon_{11} &= \frac{dx'_1 - dx_1}{dx_1}, \end{aligned}$$

entsprechendes gilt für $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$

Die $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ sind die relativen Längenänderungen in Richtung der Achsen x_1, x_2, x_3 .

Winkeländerungen:

Beispiel: Ein Radiergummi mit aufgedrucktem Pfeil wird durch reine Scherung deformiert

Abb. 2.5:

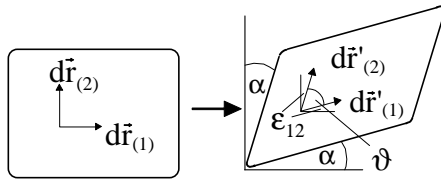
Deformation eines Radiergummis
durch Scherung

$$d\vec{r}_{(1)} = (dx_1, 0, 0)$$

$$d\vec{r}_{(2)} = (0, dx_2, 0)$$

$$d\vec{r}'_{(1)} = (1 + \varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31})dx_1$$

$$d\vec{r}'_{(2)} = (\varepsilon_{12}, 1 + \varepsilon_{22}, \varepsilon_{32})dx_1$$



Die Winkeländerungen sind:

$$\cos \vartheta = \frac{d\vec{r}'_{(1)} \cdot d\vec{r}'_{(2)}}{|d\vec{r}'_{(1)}| \cdot |d\vec{r}'_{(2)}|} \approx \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{11})} \cdot \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{22})}} \approx 2\varepsilon_{12}$$

$$\cos \vartheta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12} \approx 2\varepsilon_{12},$$

da $|\varepsilon_{12}|$ klein ($\ll 1$).

Der Zusammenhang von ε_{12} mit der Scherung (Gleitung, Schiebung) $\gamma_{12} = \pi/2 - \vartheta$ ist

$$\varepsilon_{12} \approx \frac{\gamma_{12}}{2} = \alpha.$$

Entsprechend gilt

$$\varepsilon_{23} \approx \frac{\gamma_{23}}{2}, \quad \varepsilon_{13} \approx \frac{\gamma_{13}}{2}.$$

Hauptachsentransformation:

Durch Koordinatentransformation kann der Deformationstensor auf die Form

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Die ε_i sind die Eigenwerte von $\tilde{\varepsilon}$, die sogenannten **Hauptdilatationen**. Das bedeutet, jede Deformation kann durch drei Dehnungen (bzw. Stauchungen) in drei aufeinander senkrechten Richtungen ausgedrückt werden.

Beispiel: kleine Kugel wird zu Ellipsoid verformt:

$$dx' = (1 + \varepsilon_1)dx$$

$$dy' = (1 + \varepsilon_2)dy$$

$$dz' = (1 + \varepsilon_3)dz$$

Kugel

Ellipsoid

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dR)^2$$

$$\frac{(dx')^2}{(1 + \varepsilon_1)^2} + \frac{(dy')^2}{(1 + \varepsilon_2)^2} + \frac{(dz')^2}{(1 + \varepsilon_3)^2} = (dR)^2$$

Volumenänderung:

Im Hauptachsensystem:

$$dV' = dx'dy'dz' = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)dxdydz \approx dV + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)dV$$

$$\begin{aligned} \frac{dV' - dV}{dV} &= \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{Sp } \tilde{\varepsilon} \\ &= \varepsilon_{ii} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} = \text{div } \vec{s} = \text{relative Volumenänderung} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \text{Sp } \tilde{\varepsilon} = \text{div } \vec{s}} \quad (2.6)$$

Kapitel 3

Dynamik elastischer Medien

3.1 Der Spannungstensor

Deformationen durch Kräfte verursacht:

a) Volumenkräfte

$$F_i = \int f_i(x_j, t) d^3r, \quad \text{vektoriell:} \quad \vec{F} = \int \vec{f}(\vec{r}, t) d^3r \quad (3.1)$$

f ist die Kraftdichte (N/m^3)

- Beispiele: Schwerkraft, Zentrifugalkraft
Übertragung durch Felder

Beispiel: Kraftdichte der Schwerkraft, die am Massenelement $\Delta m = \rho \Delta V$ angreift. Die $z(x_3)$ -Achse ist nach oben gerichtet.

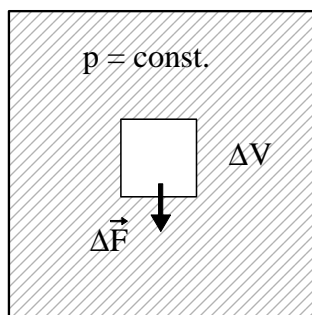


Abb. 3.1:
Schwerkraft als Volumenkraft

$$\Delta F_3 = -\rho \Delta V g = -\Delta m g$$

$$\Delta F_1 = \Delta F_2 = 0$$

$$\rightarrow f_3 = -\rho g$$

b) Flächenkräfte

$$F_i = \int \sigma_{ij} dA_j, \quad \text{vektoriell:} \quad \vec{F} = \int \vec{\sigma} d\vec{A} \quad (3.2)$$

σ_{ij} : Spannungstensorkomponente (N/m^2)

- **Beispiele:**
Spannung, Druck, Oberflächenspannung
Übertragung durch Druck oder Reibung

Beispiel: Druck, den eine Flüssigkeit im Schwerfeld auf eine Platte der Fläche $A = a \cdot a$ ausübt. Die Normalkraft F_3 ergibt sich als Gewicht der Flüssigkeitssäule über der Fläche A .

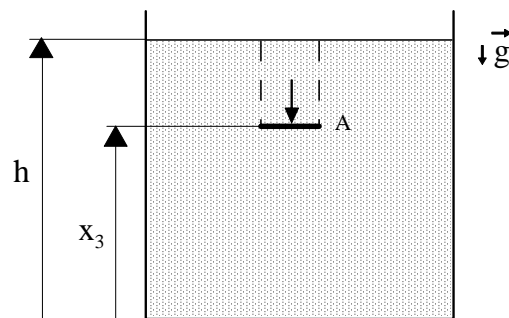


Abb. 3.2:

Flächenkraft, die durch Druck in einer Flüssigkeit auf eine Platte übertragen wird

$$\begin{aligned} F_3 &= -mg = \\ &= -\rho A(h - x_3)g = \\ &= -pA = \sigma A \\ \rightarrow p &= \rho g(h - x_3) \end{aligned}$$

Druck p :
$$\tilde{\sigma} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Platte senkrecht: $dA_2 = a dx_3$

$$F_1 = -a \int_{h_1}^{h_2} \rho g(h - x_3) dx_3$$

c) Zusammenhang zwischen Volumen- und Flächenkräften, Euler'sches Schnittprinzip

- **Beispiel:**
gespannter Gummi, herausgeschnittene Figuren werden verformt und durch Flächenkräfte wieder auf die ursprüngliche Form gebracht

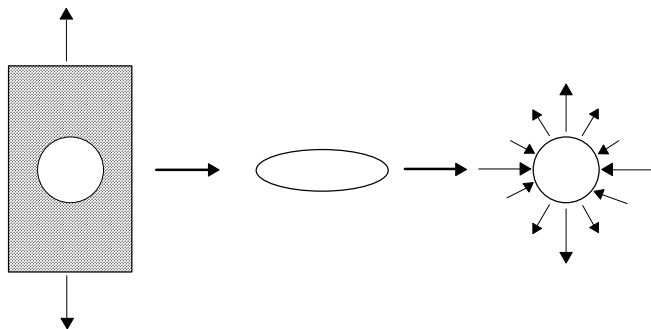


Abb. 3.3:

Deformation eines Gummis durch Streckung und Anwendung des Schnittprinzips

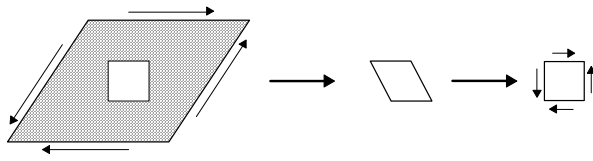


Abb. 3.4:
Deformation eines Gummis durch Scherung und Anwendung des Schnittprinzips

• **Euler'sches Schnittprinzip:**

Herausgeschnittenes Volumenelement ΔV , an der Fläche ΔA_1 greife die Kraft $\Delta \vec{F}$ an: Zerlegung der Kraft in eine Normal- und eine Tangentialkomponente, die Tangentialkomponente kann weiter zerlegt werden:

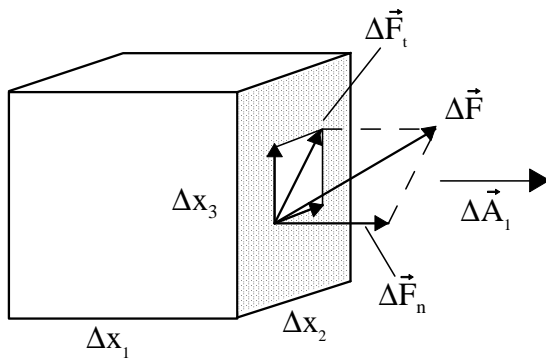


Abb. 3.5:
Zerlegung von Flächenkräften

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= \Delta \vec{F}_n + \Delta \vec{F}_t = \\ &= \Delta \vec{F}_1 + \Delta \vec{F}_2 + \Delta \vec{F}_3 \end{aligned}$$

Normalspannung: $\sigma_n = \frac{\Delta F_n}{\Delta x_2 \Delta x_3}$ positiv, wenn $\Delta \vec{F}_n \parallel \Delta \vec{A}_1$, $\Delta \vec{A}_1$ nach außen

Tangential(Schub-)spannung: $\sigma_t = \frac{\Delta F_t}{\Delta x_2 \Delta x_3}$

• **Indexkonvention für σ_{ij} :**

1. Index kennzeichnet die Krafrichtung (Komponente \parallel zur Achse x_i)
 2. Index kennzeichnet die Fläche (Schnitt senkrecht zur Achse x_j)
- hier: $\sigma_n \Rightarrow \sigma_{11}$, $\sigma_t \rightarrow \sigma_{21}, \sigma_{31}$

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \sigma_{11} \Delta x_2 \Delta x_3 = \sigma_{11} \Delta A_1 \\ \Delta F_2 &= \sigma_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 = \sigma_{21} \Delta A_1 \\ \Delta F_3 &= \sigma_{31} \Delta x_2 \Delta x_3 = \sigma_{31} \Delta A_1 \end{aligned}$$

$$\Delta F_i = \sigma_{i1} \Delta A_1$$

Normalspannungen: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$

Schubspannungen, Tangentialspannungen: $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ ($\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, siehe unten)

Der Spannungstensor läßt sich auf Hauptachsen transformieren:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

3.2 Die statischen Gleichgewichtsbedingungen

(Vergleich zum starren Körper)

- 1) $\sum_k \vec{F}_k = 0$ Kräftegleichgewicht
- 2) $\sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = 0$ Momentengleichgewicht)

hier:

$\int f_i dV + \oint \sigma_{ij} dA_j = 0 \quad \int \vec{f} dV + \oint \tilde{\sigma} d\vec{A} = 0 \quad \text{Kräftegleichgewicht}$ $\int \vec{r} \times \vec{f} dV + \oint \vec{r} \times (\tilde{\sigma} d\vec{A}) = 0 \quad \text{Momentengleichgewicht}$	(3.3)
--	-------

zu 1) **Kräftegleichgewicht**

Betrachtung der x-Komponente

$$\int f_1 dV + \oint \sigma_{1j} \cdot dA_j = 0$$

$\vec{\sigma}_1 = \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ wird als Vektor aufgefaßt

$$\begin{aligned} \int f_1 dV + \oint \vec{\sigma}_1 d\vec{A} &= \int f_1 dV + \int \text{div } \vec{\sigma}_1 dV = 0 \\ \rightarrow \int (f_1 + \text{div } \vec{\sigma}_1) dV &= 0 \rightarrow f_1 + \text{div } \vec{\sigma}_1 = f_1 + \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

allgemein:

$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \vec{f} + \text{Div } \tilde{\sigma} = 0$	(3.4)
--	-------

äußere Kraft innere Kraft Div „Vektordivergenz“
 pro Volumen pro Volumen

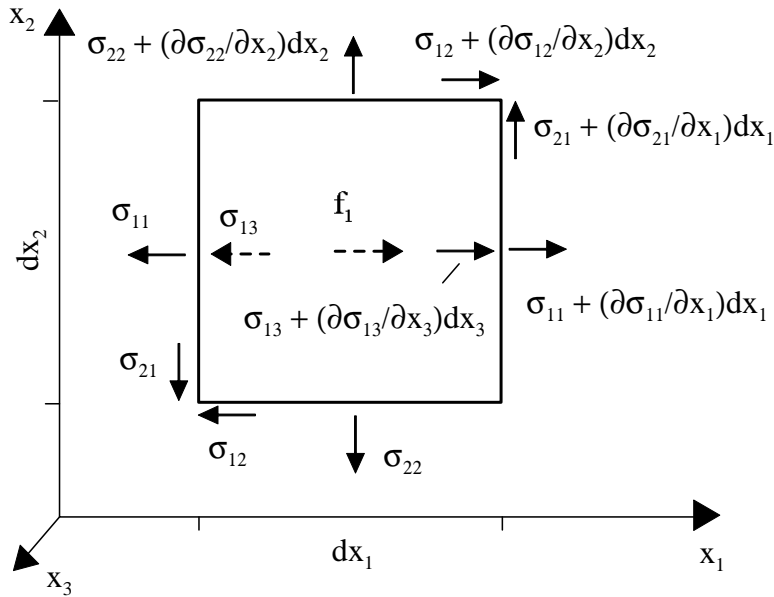


Abb. 3.6:

Kräftegleichgewicht am herausgeschnittenen Würfel dV Kräftegleichgewicht in Richtung x_i

- σ_{ij} : 1. Index kennzeichnet die Richtung der zugeordneten Kraft
2. Index kennzeichnet die Fläche

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + \\ & - \sigma_{11} dx_2 dx_3 - \sigma_{12} dx_1 dx_3 - \sigma_{13} dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \\ & \rightarrow \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) + f_1 = 0 \end{aligned}$$

Zu 2): Momentengleichgewicht

$$\int \vec{r} \times \vec{f} dV + \oint \vec{r} \times (\tilde{\sigma} d\vec{A}) = 0$$

x-Komponente:

$$\int (x_2 f_3 - x_3 f_2) dV + \oint [x_2 (\tilde{\sigma} d\vec{A})_3 - x_3 (\tilde{\sigma} d\vec{A})_2] = 0$$

$$(\tilde{\sigma} d\vec{A})_3 = (\sigma_{3j} da_j) = (\vec{\sigma}_3 \cdot d\vec{A}), \quad (\tilde{\sigma} d\vec{A})_2 = (\sigma_{2j} da_j) = (\vec{\sigma}_2 \cdot d\vec{A})$$

$$\rightarrow \oint x_2 (\tilde{\sigma} d\vec{A})_3 = \int \text{div}(x_2 \vec{\sigma}_3) dV = \int (x_2 \text{div} \vec{\sigma}_3 + \vec{\sigma}_3 \cdot \text{grad } x_2) dV = \int (x_2 \text{div} \vec{\sigma}_3 + \sigma_{32}) dV$$

$$\rightarrow \oint x_3 (\tilde{\sigma} d\vec{A})_2 = \int \text{div}(x_3 \vec{\sigma}_2) dV = \int (x_3 \text{div} \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2 \cdot \text{grad } x_3) dV = \int (x_3 \text{div} \vec{\sigma}_2 + \sigma_{23}) dV$$

$$\int [x_2(f_3 + \operatorname{div} \vec{\sigma}_3) + \sigma_{32} - x_3(f_2 + \operatorname{div} \vec{\sigma}_2) - \sigma_{23}] dV = 0 \rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

allgemein: wegen $f_1 + \operatorname{div} \vec{\sigma}_1 = 0$ ergibt sich

$$\boxed{\sigma_{ji} = \sigma_{ij}} \quad (3.5)$$

3.3 Die Bewegungsgleichungen

Wenn kein statisches Gleichgewicht am Volumenelement dV vorhanden ist:

$$\rho a_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \rho \vec{a} = \vec{f} + \operatorname{Div} \tilde{\sigma}$$

$\rho = \frac{dm}{dV}$ = Massendichte, \vec{a} Beschleunigung des Volumenelementes

in substantieller Betrachtungsweise $x'_i = x_i + s_i(x_j, t)$, $a_i = \frac{d^2 s_i}{dt^2}$

$$\boxed{\rho \ddot{s}_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \rho \vec{\ddot{s}} = \vec{f} + \operatorname{Div} \tilde{\sigma}} \quad (3.6)$$

Wenn die f_i und die σ_{ij} bekannt sind, lassen sich im Prinzip die s_i ausrechnen. Die σ_{ij} hängen mit den s_i über die Materialgleichung $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})$ zusammen.

Kapitel 4

Elastostatik

4.1 Das Hooke'sche Gesetz

Zunächst: eindimensionale Betrachtung

Zugversuch:

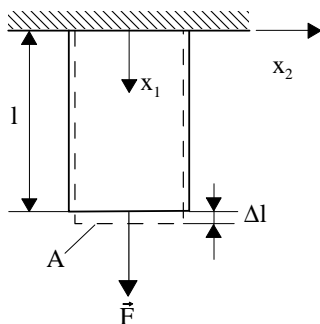


Abb. 4.1:

Dehnung eines Stabes unter Einfluss der Kraft \vec{F}

$$\text{Zugspannung } \sigma = \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} = E \varepsilon$$

$$\text{Dehnung } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

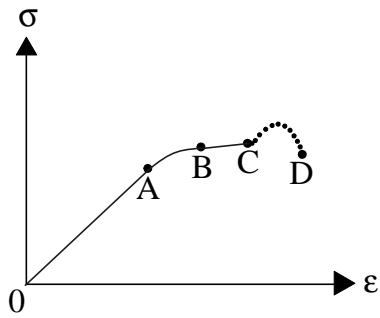
Hooke'sches Gesetz mit der Elastizitätskonstanten E :

$$\boxed{\sigma = E \varepsilon} \tag{4.1}$$

Spannungs- Dehnungsdiagramm:

Abb. 4.2:

Schematische Darstellung der
Spannungs- Dehnungs- Beziehung



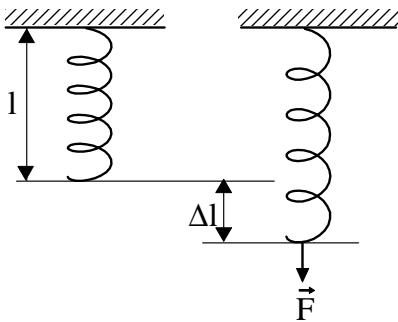
0 ... A: Hooke

A ... B: elastisch/nichtlinear

B ... C: Fließen

C ... D: Verfestigung, Bruch

Beispiel für lineares, elastisches Verhalten:

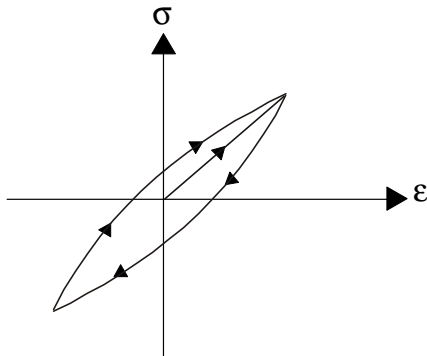
**Abb. 4.3:**

Dehnung einer elastischen Schraubenfeder
unter Einfluss der Kraft \vec{F}

Die Ausdehnung Δl der Feder ist der
Kraft F proportional, k ist die Federkonstante

$$F = k\Delta l$$

Oft kein rein elastisches Verhalten auch bei kleinem σ :

**Abb. 4.4:**

Elastische Hysterese

Im Folgenden wird angenommen, dass die Deformationen Zustandsfunktionen sind, d. h. unabhängig von der Vorgeschichte.

Zusammenhang: $\tilde{\sigma}(\tilde{\epsilon})$:

allgemein:

$$\sigma_{11} = f_{11}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{33})$$

$$\sigma_{12} = \dots$$

\vdots

$$\sigma_{33} = \dots$$

Taylorentwicklung für linearen Bereich:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= f_{11}(0, \dots, 0) + \frac{\partial f_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} \varepsilon_{11} + \dots + \frac{\partial f_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} \varepsilon_{12} + \dots \\ \sigma_{12} &= \dots\end{aligned}$$

$f_{ij}(0, \dots, 0) = 0$ (ohne Deformationen keine Spannungen)

allgemein:

$$\boxed{\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn}} \quad \text{Tensor vierter Stufe} \quad (4.2)$$

Die C_{ijmn} sind die elastischen Moduln (81 Konstanten)

Einführung der Voigt'schen Konstanten unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Deformations- und des Spannungstensors ($\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}, \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + 2C_{14}\varepsilon_{23} + 2C_{15}\varepsilon_{31} + 2C_{16}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= C_{21}\varepsilon_{11} + \dots \\ \sigma_{33} &= \dots \\ \sigma_{23} &= \dots \\ \sigma_{31} &= \dots \\ \sigma_{12} &= \dots\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j} \quad 36 \text{ Konstanten } C_{ij} \quad (4.3)$$

weitere Reduktion der Anzahl der voneinander unabhängigen Konstanten möglich → siehe unten!

4.2 Isotroper Körper

keine ausgezeichnete Richtung

Beispiel:

polykristalline, amorphe, glasartige Körper, Flüssigkeiten

keine Einkristalle (diese können aber optisch isotrop sein, z. B. kubische)

Im Folgenden Annahme:

Achsen || Hauptachsen

$$\sigma_1 = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + b\varepsilon_3$$

$$\sigma_2 = b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3$$

$$\sigma_3 = b\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + a\varepsilon_3$$

wegen Gleichwertigkeit aller Richtungen gibt es nur zwei elastische Konstanten:

a für Deformationen || zur wirkenden Spannung und b für Deformationen \perp zur wirkenden Spannung

Lamèsche Moduln:

$$a - b = 2\mu$$

$$b = \lambda$$

$$\sigma_1 = 2\mu\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\sigma_2 = 2\mu\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\sigma_3 = 2\mu\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

Übergang vom Hauptachsensystem zu beliebigem orthogonalem Koordinatensystem (Die α_{ik} sind die Richtungskosinus):

$$\sigma_k = 2\mu\varepsilon_k + \lambda \text{Sp} \tilde{\varepsilon}, \quad (\sigma_k = \delta_{kl}\sigma_{kl}, \quad \varepsilon_k = \delta_{kl}\varepsilon_{kl})$$

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\sigma_{kl} = \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk}\sigma_k$$

$$\varepsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{kl} = \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk}\varepsilon_k$$

$$\alpha_{ik} = \cos \angle (x'_i, x_k)$$

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk}\varepsilon_k + \lambda \text{Sp} \tilde{\varepsilon} \underbrace{\sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk}}_{\delta_{ij}}$$

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\varepsilon'_{ij} + \lambda\delta_{ij}\text{Sp} \tilde{\varepsilon}'$$

$$\text{wegen } \text{Sp} \tilde{\varepsilon}' = \text{Sp} \tilde{\varepsilon} .$$

Index' weggelassen:

$$\boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij} \cdot \text{Sp} \tilde{\varepsilon}} \quad (4.4)$$

Hooke'sches Gesetz für den elastisch isotropen Körper, „strain stress relation“

Umkehrung:

$$\begin{aligned}
\text{Sp} \tilde{\sigma} &= 2\mu \text{Sp} \tilde{\varepsilon} + 3\lambda \text{Sp} \tilde{\varepsilon} \\
&= (2\mu + 3\lambda) \text{Sp} \tilde{\varepsilon} \\
\rightarrow \text{Sp} \tilde{\varepsilon} &= \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \text{Sp} \tilde{\sigma} \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \cdot \text{Sp} \tilde{\sigma}}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}
\end{aligned}$$

$\varepsilon_{ij} = 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \delta_{ij} \cdot \text{Sp} \tilde{\sigma}$ <p>mit $2\mu' = \frac{1}{2\mu}, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}$</p>
--

Zusammenhang der Lamé'schen Konstanten mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν :

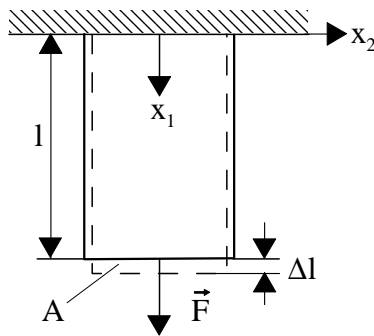


Abb. 4.5:

Dehnungen und Querkontraktionen beim Zugversuch

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu \varepsilon_{11} + \lambda \cdot \text{Sp} \tilde{\varepsilon} \\
0 &= 2\mu \varepsilon_{22} + \lambda \cdot \text{Sp} \tilde{\varepsilon} \\
0 &= 2\mu \varepsilon_{33} + \lambda \cdot \text{Sp} \tilde{\varepsilon} \\
0 &= 2\mu \varepsilon_{23} \\
0 &= 2\mu \varepsilon_{31} \\
0 &= 2\mu \varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \text{Sp} \tilde{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu} (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) = -\frac{\lambda \varepsilon_{11}}{2(\mu + \lambda)}$$

$$\text{Sp} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{11} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right) = \frac{\mu \varepsilon_{11}}{\mu + \lambda}$$

$$\sigma_{11} = \left(2\mu + \frac{\lambda \mu}{\mu + \lambda}\right) \varepsilon_{11} = E \varepsilon_{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}} \quad \text{Young'scher Elastizitätsmodul} \quad (4.5)$$

Querkontraktionen:

$$\frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \nu$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}} \quad \text{Poisson'sche Querkontraktionszahl} \quad (4.6)$$

Zusammenhang der Lamé'schen Konstanten mit dem Schubmodul G :

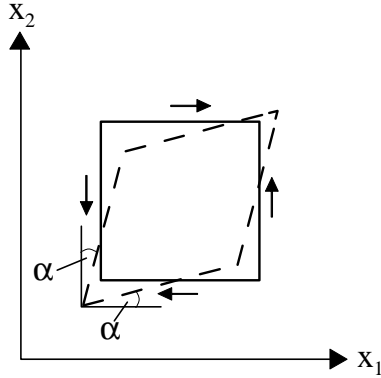


Abb. 4.6:
Scherung eines Würfels

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = G\gamma_{12}$$

$$\gamma_{12} = 2\alpha = 2\varepsilon_{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \mu} \quad \text{Schubmodul } G \quad (4.7)$$

Zusammenhang der Lamé'schen Konstanten mit dem Kompressionsmodul κ :

Beispiel: Ein Würfel ist in einer Flüssigkeit allseitigem Druck $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ ausgesetzt und wird um ΔV zusammengedrückt:

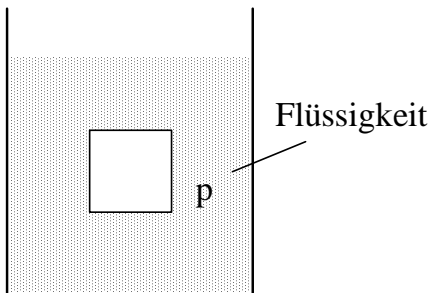


Abb. 4.7:
Kompression eines Würfels

$$\sigma_{11} = -p = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\text{Sp}\tilde{\varepsilon}$$

$$\sigma_{22} = -p = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\text{Sp}\tilde{\varepsilon}$$

$$\sigma_{33} = -p = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\text{Sp}\tilde{\varepsilon}$$

$$\sigma_{23} = 0 = 2\mu\varepsilon_{23}$$

$$\sigma_{31} = 0 = 2\mu\varepsilon_{31}$$

$$\sigma_{12} = 0 = 2\mu\varepsilon_{12}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$$

$$-3p = (2\mu + 3\lambda)\text{Sp}\tilde{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{p} \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\text{Sp}\tilde{\varepsilon}}{p} = \frac{3}{2\mu + 3\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}} \quad \text{Kompressionsmodul } \kappa \quad (4.8)$$

Elastische Konstanten einiger Stoffe:

	Dichte ρ	Lamé- scher Modul λ	Lamé- scher Modul μ (Schub- modul G)	Young- scher Modul E	Quer- kontrakt.- zahl ν	Kompres- sions- modul κ	longitud. Schall- geschw. c_l	transv. Schall- geschw. c_t
	g/cm^3	$10^{11} N/m^2$	$10^{11} N/m^2$	$10^{11} N/m^2$		$10^{11} N/m^2$	km/s	km/s
Stahl	7,8	0,97	0,76	1,95	0,28	1,48	5,7	3,1
Kupfer	8,9	1,09	0,47	1,26	0,35	1,40	4,8	2,3
Aluminium	2,7	0,57	0,27	0,72	0,34	0,75	6,4	3,2
Glas	2,2	0,17	0,33	0,76	0,17	0,38	6,1	3,8

4.3 Das elastische Potential

Elastische Deformation erfordert Verrichten von Arbeit und führt zur Änderung des elastischen Potentials.

Hooke-Bereich: keine Wärmeentwicklung, keine Reibung

Beispiele:

a) gespannte Feder

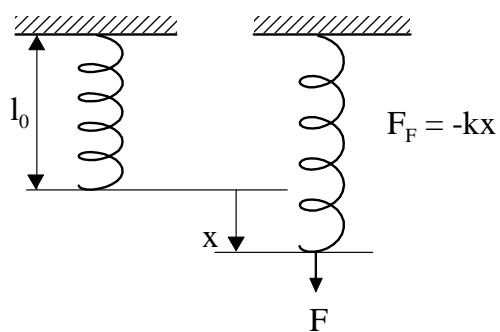


Abb. 4.8:

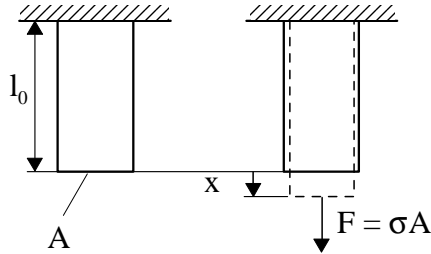
Elastische Energie einer gespannten Feder

$$W = \int_{x=0}^{\Delta l} F dx = \int_0^{\Delta l} kx dx = k \frac{(\Delta l)^2}{2}$$

b) Zugversuch

Abb. 4.9:

Elastische Energie eines gespannten Stabes



$$\sigma = \varepsilon E = \frac{x}{l_0} E, \quad V = Al_0$$

$$W = \int_{x=0}^{\Delta l} \frac{x}{l_0} E A dx = \frac{(\Delta l)^2 EA}{2l_0} = \frac{E \varepsilon^2 V}{2}$$

$$\frac{W}{V} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$$

Die elastische Energie ist in den Volumenelementen des elastischen Körpers gespeichert. Energiedichte der Deformationsenergie:

$$\phi = \frac{dW}{dV} = \phi(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{33})$$

Ein Körper habe die Energiedichte ϕ . Wie ändert sich ϕ bei einer kleinen Deformation?

Beispiel:

Ein Volumenelement ΔV wird in x_1 -Richtung gedehnt unter Einfluss der Zugspannung σ_1 , so dass es die Energiedichte $\phi = \frac{\Delta W}{\Delta V}$ erhält. Dann wird es zusätzlich durch $d\sigma_1$ belastet (Vernachlässigung der Querkontraktion, $\sigma_1 = \sigma_1(x_1)$)

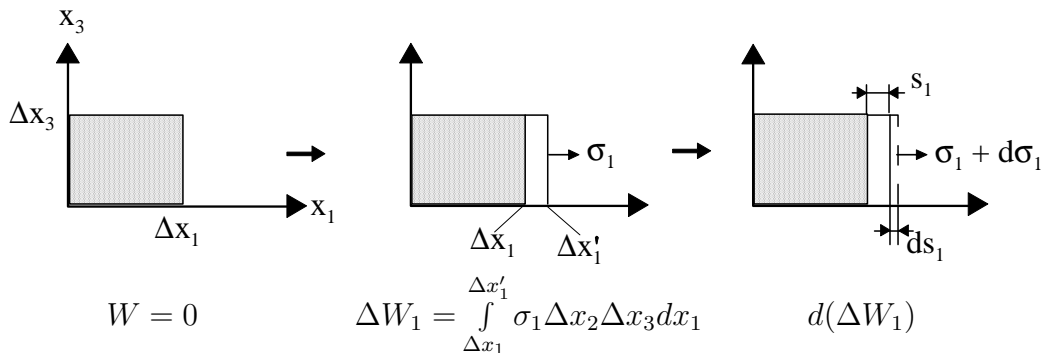


Abb. 4.10:

Änderung der elastischen Energie eines vorgespannten Körpers unter Einfluss einer kleinen Spannungsänderung

$$\begin{aligned} d(\Delta W_1) &= (\sigma_1 + d\sigma_1) \Delta x_2 \Delta x_3 d(\Delta x'_1 - \Delta x_1) \\ &\approx \sigma_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta x_1 d\left(\frac{\Delta x'_1 - \Delta x_1}{\Delta x_1}\right) = \sigma_1 \Delta V d\varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow d\phi = d\left(\frac{\Delta W_1}{\Delta V}\right) = \sigma_1 d\varepsilon_1$$

allgemeiner:

An einem Körper (Volumen V) greifen an der Oberfläche (A) Kräfte $d\vec{F}$ an, die ihn etwas deformieren. Welche Arbeit wird geleistet und wie ändert sich sein elastisches Potential?

$$\begin{aligned} dW &= \oint_{(A)} dF_i ds_i \\ &= \oint \sigma_{ij} dA_j ds_i = \oint \overbrace{(\sigma_{ij} ds_i)}^{\text{Vektor } a_j} dA_j \\ &= \int \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} ds_i) dV \\ &= \int \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)}_{=0 \text{ (Kräftegleichgewicht)}} ds_i dV + \int \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right) dV \end{aligned}$$

$$dW = \int \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right) dV = \underbrace{\frac{1}{2} \int \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) dV}_{(\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \text{ wegen Momentengleichgewicht})}$$

$$dW = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \cdot dV = \int d\phi dV$$

$$\Rightarrow \boxed{d\phi = \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}} \quad (4.9)$$

$$\phi = \phi(\varepsilon_{ij}) \quad , \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} d\varepsilon_{ij}$$

vollständiges Differential der gespeicherten Energiedichte (ϕ ist Zustandsgröße, nur vom Deformationszustand, nicht von der Vorgeschichte abhängig)

Anzahl voneinander unabhängiger elastischer Moduln:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

1. wegen $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}}$$

\Rightarrow statt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Konstanten nur $6 \cdot 6 = 36$ Konstanten

2. wegen Vertauschbarkeit der Ableitungen (Schwartz):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} :$$

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{klij}}$$

⇒ statt 36 Konstanten nur 21 Konstanten

in Voigt'scher Schreibweise mit

$$\begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\} \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}\} \\ \sigma_i &= C_{ij} \varepsilon_j \\ d\phi &= \sum_{i=1}^6 \sigma_i d\varepsilon_i = \sum_{i,j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_i = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i} d\varepsilon_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sigma_i &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} &= C_{ij} \\ C_{ij} &= C_{ji} \end{aligned}$$

(21 voneinander unabhängige Konstanten wegen Vertauschbarkeit der Ableitungen)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{C_{11}}{2} \varepsilon_1^2 + C_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \dots + C_{16} \varepsilon_1 \varepsilon_6 \\ &+ \frac{C_{22}}{2} \varepsilon_2^2 + \dots \end{aligned}$$

elastisches Potential des isotrop elastischen Körpers:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\text{Sp}\tilde{\varepsilon}$$

$$d\phi = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \sum_i \sum_j \{2\mu\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\text{Sp}\tilde{\varepsilon}d\varepsilon_{ij}\}$$

$$\phi = \sum_i \sum_j \left\{ \mu\varepsilon_{ij}^2 + \lambda \int \text{Sp}\tilde{\varepsilon}d\varepsilon_{ii} \right\}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \mu \{[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2] + 2[\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{12}^2]\} + \\ &\quad + \lambda \left\{ \left[\frac{\varepsilon_{11}^2}{2} + \varepsilon_{11}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \frac{\varepsilon_{22}^2}{2} + \varepsilon_{22}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + \frac{\varepsilon_{33}^2}{2} + \varepsilon_{33}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right] \right\} \\ &= \mu \{[\quad] + 2[\quad]\} + \frac{\lambda}{2} [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2] + 2\lambda [\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}] \\ &= \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2] + 2\mu [\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2] + 2\lambda [\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}] \\ &\text{(Integrationskonstante} = 0 \text{ wegen } \phi = 0, \text{ wenn } \varepsilon_{ij} = 0) \end{aligned}$$

a) nur Scherungen $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$
 $\Rightarrow \mu > 0$ wegen $\phi > 0$

b) nur Volumenänderungen $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$
 $\Rightarrow \lambda > -\frac{2}{5}\mu$ wegen $\phi > 0$

experimentell: $\mu > 0$, $\lambda > 0$

Wegen $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ ergibt sich auch $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

4.4 Kristallelastizität

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad | \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_j$$

elastische Konstanten C_{ijkl} bzw. C_{ij} .

7 Kristallsysteme	Anzahl elastischer Konstanten	
triklin	21	
monoklin	13	
rhombisch	9	
trigonal	7 bzw. 6	}je nach Kristallklasse
tetragonal	7 bzw. 6	
hexagonal	5	
kubisch	3	

Beispiel:

kubische Kristalle (optisch isotrop, elastisch anisotrop) in Voigt'scher Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{61} & \cdots & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

4.5 Torsion

Torsion eines isotrop elastischen Zylinders (Drahtes) mit dem Radius R , Lamè'sche Konstanten μ und λ

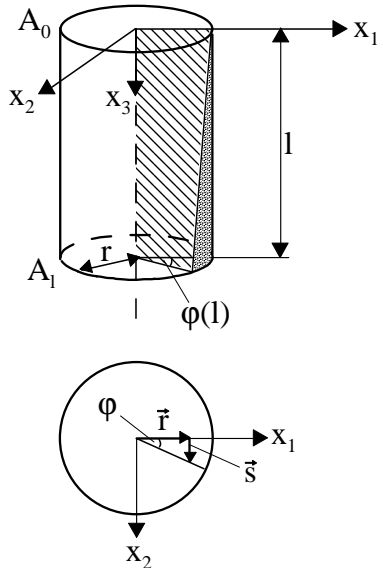


Abb. 4.11:

Torsion eines Drahtes mit zylindrischem Querschnitt

Gegeben ist die Deformation:

parallele Querschnitte sind gegeneinander verdreht.

Die Fläche A_0 sei fixiert, an der Fläche A_l wirkt

ein Drehmoment, der Mantel sei kräftefrei.

Maximaler Verdrehungswinkel $\varphi(l) = \varphi_l$

Gesucht ist das Drehmoment, das diese diese Verzerrung bewirkt.

$$\vec{\varphi} = (0, 0, \varphi(x_3))$$

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{s} = \vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$$s_1 = -x_2 \varphi(x_3)$$

$$s_2 = x_1 \varphi(x_3)$$

$$s_3 = 0$$

Verschiebungsfeld (s_1, s_2, s_3)

Deformationstensor:

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} x_1 \varphi'(x_3) = \varepsilon_{32}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_3}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{1}{2} x_2 \varphi'(x_3) = \varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$$

Die Torsion erfolgt ohne Volumenänderung wegen $\text{Sp} \tilde{\varepsilon} = 0$.

Spannungstensor:

$$\begin{aligned}\sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} = \mu x_1 \varphi'(x_3) = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} &= 2\mu\varepsilon_{31} = -\mu x_2 \varphi'(x_3) = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0\end{aligned}$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ &\rightarrow \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ &\rightarrow \varphi''(x_3) = 0\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\varphi_l}{l} x_3} \quad (4.10)$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned}\sigma_{23} &= \mu x_1 \varphi_l / l \\ \sigma_{13} &= -\mu x_2 \varphi_l / l\end{aligned}} \quad (4.11)$$

σ_{23} und σ_{13} unabhängig von x_3

Welche Oberflächenkräfte sind den Spannungstensorkomponenten zuzuordnen?

Am Mantel greifen keine Kräfte an (senkrecht oder tangential zur Manteloberfläche) wegen

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0..$$

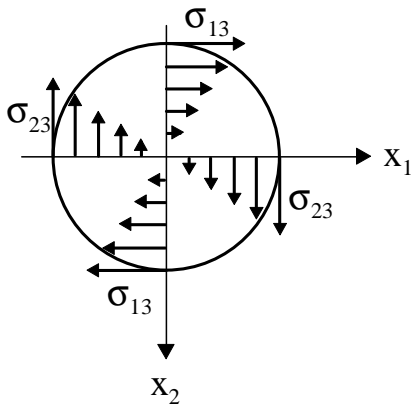


Abb. 4.12:

Tangentialkräfte an der unteren Zylinderkreisfläche

An der Fläche A_l greifen Tangentialkräfte an:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \mu r \varphi_l / l \quad \text{Schubspannung}$$

mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \mu r \varphi_l / l$$

mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Auf einen Kreisring mit dem Radius r und der Breite dr wirkt das Drehmoment

$$\begin{aligned} dM &= r \cdot dF = r \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{2\pi\mu\varphi_l r^3 dr}{l} \\ \rightarrow M &= \frac{\pi\mu R^4 \varphi_l}{2l} = \frac{\pi G R^4 \varphi_l}{2l} \end{aligned}$$

($\mu = G =$ Torsionsmodul = Schubmodul)

$$\rightarrow \boxed{\varphi_l = \frac{M}{D}} \quad (4.12)$$

mit $D = \frac{\pi G R^4}{2l} =$ Richtmoment

Bestimmung von G aus einem Torsionsexperiment möglich.

4.6 Balkenbiegung

Oft ist es möglich, Näherungslösungen anzugehen, die auf vereinfachenden Annahmen beruhen, ausreichend für viele technische Anwendungen.

Beispiel ist die Theorie der Balkenbiegung, die auf Bernoulli zurückgeht.

Annahme: nur $\sigma_{11} \neq 0$, gleichförmige Biegung, neutrale Schicht, kleine Verbiegungen, ebene Querschnitte, keine Verwölbung

$$\begin{aligned} dx_1 &= R d\varphi \\ dx_1 + ds_1 &= (R + x_3) d\varphi \\ \varepsilon_{11} &= \frac{ds_1}{dx_1} = \frac{x_3 d\varphi}{dx_1} = \frac{x_3}{R}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} = -\frac{\nu x_3}{R} \end{aligned}$$

oberhalb der neutralen Faser Dehnungen, unterhalb Stauchungen längs des Balkens. Bei den folgenden Ableitungen wird angenommen, dass die Durchbiegung nur gering ist, so dass die Koordinate der neutralen Faser längs des Balkens mit der Koordinate x_1 gleichgesetzt werden kann.

Hooke:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = \frac{E}{R}x_3, \quad \text{alle anderen } \sigma_{ij} = 0$$

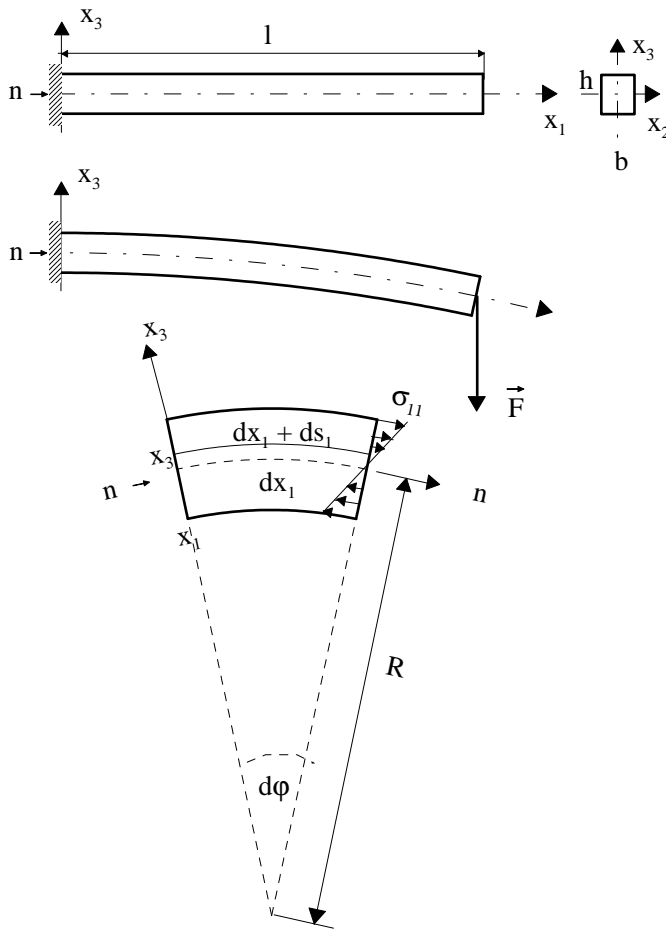


Abb. 4.13:
Biegung eines Balkens
unter Einfluss
der Kraft \vec{F}

Die Gleichgewichtsbedingung ist erfüllt:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Am Flächenelement $dx_2 dx_3 = dA$ greift die Kraft $\sigma_{11} dA$ an. Da der Balken sich im Ganzen nicht dehnt, gilt:

$$\int \sigma_{11} dA = \frac{E}{R} \int x_3 dA = 0$$

Diese Beziehung ist erfüllt, wenn sich die neutrale Faser in Balkenmitte befindet. Das auf den Querschnitt wirkende Drehmoment (Biegemoment) ist:

$$\boxed{M_B = \int x_3 \sigma_{11} dA = \frac{E}{R} \int x_3^2 dA} \quad (4.13)$$

mit $I = \int x_3^2 dA =$ „Flächenträgheitsmoment“.

Beispiel: Rechteckquerschnitt

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_2 dx_3 = \frac{bh^3}{12}$$

Das Drehmoment M_B hält dem äußeren Drehmoment $M(x_1)$ der Kraft \vec{F} das Gleichgewicht (s. Abb. 4.14)

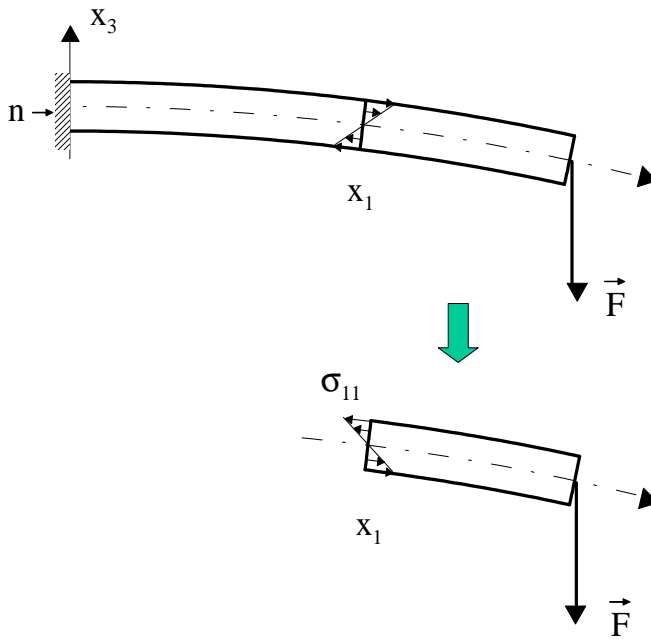


Abb. 4.14:

Die Spannungen σ_{11} bewirken ein Drehmoment im Gleichgewicht mit dem Drehmoment der Kraft \vec{F}

$$M_B = \frac{E}{R} I = M(x_1) = F(l - x_1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{R} = \frac{F}{EI} (l - x_1) \quad (4.14)$$

Die Spannung σ_{11} ergibt sich zu

$$\sigma_{11} = \frac{E}{R} x_3 = \frac{F}{I} x_3 (l - x_1) \quad (4.15)$$

σ_{11} hängt nur von der Kraft F und der Querschnittsform ab (I), nicht vom Material (E).
maximale Spannung für $x_3 = \frac{h}{2}$, $x_1 = 0$

$$\rightarrow \sigma_{11}^{\max} = \frac{hlF}{2I}$$

Der Krümmungsradius R der neutralen Faser $x_3 = x_3(x_1)$ ergibt sich aus :

$$\frac{1}{R} = \frac{x_3''}{(1 + x_3'^2)^{3/2}},$$

bei kleinen Verbiegungen gilt $x_3'^2 \ll 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = x_3'' &= \frac{F}{EI}(l - x_1) \\ \rightarrow x_3 &= -\frac{F}{EI}\left(\frac{l}{2}x_1^2 - \frac{x_1^3}{6}\right) + Ax_1 + B \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$x_1 = 0 : \quad x_3 = 0, \quad x_3' = 0 \quad (\text{neutrale Faser})$$

$$\rightarrow \boxed{x_3 = -\frac{F}{2EI}x_1^2\left(l - \frac{x_1}{3}\right)} \quad (4.16)$$

$x_3(x_1)$ ist die „elastische Linie“ des Balkens. Der Balken ist für $x_1 = l$ um die Strecke $x_3(l) = -\frac{l^3 F}{3EI}$ verbogen.

zweifach unterstützter und in der Mitte durch eine Kraft beanspruchter Balken:

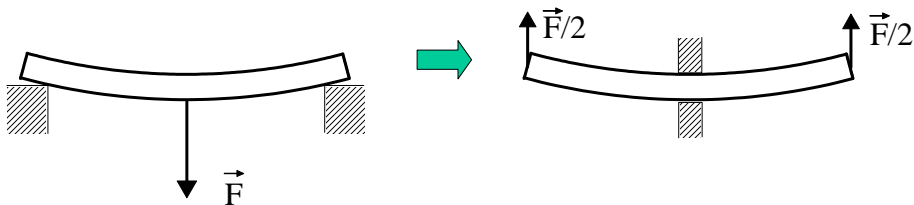
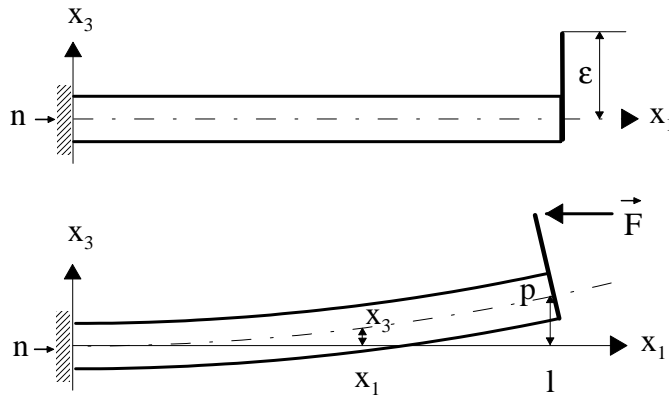


Abb. 4.15:

Biegung des zweifach unterstützten Balkens und des "Kragträgers"

kann auf das Problem des „Kragträgers“ zurückgeführt werden.

Stabknickung:**Abb. 4.16:**

Knickung eines Stabes

Eine horizontal wirkende Kraft greift an einem Hebel der Länge ε („Exzentrizität“) an und bewirkt eine Biegung (in der Abb. übertrieben stark gezeichnet)

$$x_3(l) = p$$

Das Drehmoment $M = F \cdot [\varepsilon + p - x_3(x_1)]$ bezüglich Stelle x_1 ist mit dem Biegemoment $M_B = \frac{E}{R}I = EI x_3''(x_1)$ im Gleichgewicht:

$$F[\varepsilon + p - x_3(x_1)] = EI x_3''(x_1)$$

Abkürzung: $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$,

$$\rightarrow x_3''(x_1) + \lambda^2 x_3(x_1) = \lambda^2(\varepsilon + p)$$

Lösung:

$$x_3(x_1) = \varepsilon + p + c_1 \cos(\lambda x_1) + c_2 \sin(\lambda x_1)$$

$$\text{RB: } x_3(0) = 0, \quad x_3'(0) = 0, \quad x_3(l) = p$$

$$\rightarrow c_1 = -(\varepsilon + p), \quad c_2 = 0, \quad p = \varepsilon \frac{1 - \cos(\lambda l)}{\cos(\lambda l)}$$

$$\rightarrow \boxed{x_3(x_1) = \frac{\varepsilon}{\cos(\lambda l)} (1 - \cos(\lambda x_1)) = p \frac{1 - \cos(\lambda x_1)}{1 - \cos(\lambda l)}} \quad (4.17)$$

Gleichung für die neutrale Faser

Diskussion:

Maximales Biegemoment für $x_1 = 0$, $x_3(0) = 0$:

$$M_{\max} = F(\varepsilon + p) = \frac{\varepsilon F}{\cos(\lambda l)}$$

kritische Last:

für $\lambda l = \pi/2$ wächst $x_3(x_1)$ über alle Grenzen (Instabilität), es muss $F < F_{kr}$ sein, sonst Knicken des Stabes

$$\rightarrow \boxed{F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}} \quad (4.18)$$

Das gilt auch für sehr kleine ε . Auch ein axial gedrückter Stab ($\varepsilon \rightarrow 0$) wird instabil für $F > F_{kr}$, weil geringste seitliche Störkräfte Knicken einleiten.

Schubspannungen im Träger

Bisher Annahme $\sigma_{ij} = 0$ außer σ_{11} . Eine bessere Näherung berücksichtigt auch die Schubspannungen $\sigma_{13} = \sigma_{31}$:

Aus $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ ergibt sich

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} = 0$$

Mit $\sigma_{11} = \frac{F}{I} x_3(l - x_1)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= -\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = +\frac{F x_3}{I} \\ \rightarrow \sigma_{13} &= \frac{F x_3^2}{2I} + C \end{aligned}$$

Randbedingung: $\sigma_{13}(\pm \frac{h}{2}) = 0$
(Verschwinden der Schubspannungen an der Balkenoberfläche)

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{13} = \frac{F}{2I} \left(x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right)} \quad (4.19)$$

maximale Schubspannung für $x_3 = 0$:

$$\sigma_{13}^{\max} = -\frac{F h^2}{8I}$$

(Vergleich mit $\sigma_{11}^{\max} = \frac{h l F}{I}$)

Kapitel 5

Wellen in elastischen Medien

5.1 Die Bewegungsgleichungen des isotrop elastischen Körpers

$$\boxed{\rho \ddot{s}_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}} \quad (\rho \ddot{\vec{s}} = \vec{f} + \text{Div } \vec{\sigma})$$

$$\rho \ddot{s}_i = f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \text{Sp} \tilde{\varepsilon})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{Sp} \tilde{\varepsilon} = \frac{\partial s_j}{\partial x_j}$$

$$\rho \ddot{s}_i = f_i + \mu \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 s_j}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial s_j}{\partial x_j}$$

x_1 -Komponente: $i = 1$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{s}_1 &= f_1 + \mu \left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 s_3}{\partial x_3 \partial x_1} \right) + \\ &+ \lambda \left(\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 s_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = \\ &= f_1 + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) s_1 + \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \right) = \\
= & f_1 + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)}_{\Delta} s_1 + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \right)}_{\operatorname{div} \vec{s}}
\end{aligned}$$

analog für $i = 2, i = 3$.

Zusammenfassung:

$$\begin{array}{l}
\rho \ddot{s}_i = f_i + \mu \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 s_j}{\partial x_i \partial x_j} \\
\rho \ddot{\vec{s}} = \vec{f} + \mu \Delta \vec{s} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}
\end{array} \tag{5.1}$$

3 lineare partielle Dgl. für $s_i(x_j, t)$, $i, j = 1 \cdots 3$
Vorgabe von Randbedingungen und Anfangsbedingungen notwendig

Randbedingungen:

1. \vec{s} (Rand) vorgegeben, z.B. $s_i|_{\text{Rand}} = 0$ (feste Einspannung)
2. σ_{ij} (Rand) vorgegeben (Flächenkräfte auf Rand)
3. gemischte Randbedingungen

oft günstig, zunächst von $\rho \ddot{s}_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ auszugehen, dann Anwendung des Hooke'schen Gesetzes.

5.2 Die Wellengleichung für den isotrop elastischen Körper

Annahme: $f_i = 0$.

Einführung neuer Konstanten:

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Aus Gleichung (5.1) ergibt sich:

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\vec{s}} = c_l^2 \Delta \vec{s} + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \vec{s}} \quad (5.2)$$

\vec{s} : Verschiebung = Rotation + Deformation

$$\vec{s} = \vec{s}_t + \vec{s}_l$$

$$\text{rot } \vec{s} = \text{rot } \vec{s}_t = 2\vec{\varphi}, \quad \text{div } \vec{s}_t = 0$$

(Drehung des Volumenelementes, keine Volumenänderung)

$$\text{div } \vec{s} = \text{div } \vec{s}_l = \frac{\Delta V}{V}, \quad \text{rot } \vec{s}_l = 0$$

(Volumenänderung, keine Drehung des Volumenelementes)

$$\ddot{\vec{s}}_l + \ddot{\vec{s}}_t = c_l^2 \Delta (\vec{s}_l + \vec{s}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \vec{s}_l$$

($\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$)

$$\rightarrow \ddot{\vec{s}}_l + \ddot{\vec{s}}_t = c_l^2 \Delta (\vec{s}_l + \vec{s}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \vec{s}_l$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\vec{s}}_l &= c_l^2 \Delta \vec{s}_l \\ \ddot{\vec{s}}_t &= c_t^2 \Delta \vec{s}_t \end{aligned}} \quad (5.3)$$

Wellengleichung

\vec{s}_t : keine Volumenänderung, Scherungswellen, S-Wellen (secunda unda), transversale Wellen

\vec{s}_l : keine Rotationen, nur Volumenänderungen, Kompressionswellen, P-Wellen (prima unda), longitudinale Wellen

c_l, c_t : Ausbreitungsgeschwindigkeit

5.3 Spezielle Lösungen der Wellengleichung

a) allgemeine eindimensionale Lösung

Annahme: Es sei $\psi = \psi(x, t)$ mit z.B. $\psi = s_{t1}, s_{t2}, \dots, s_{t1}, \dots$

Die Wellengleichung ist dann

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (5.4)$$

Lösungsansatz: $\psi = \psi(x \pm ct)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial(\cdot)} \cdot \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \psi' \cdot (\pm c) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c^2 \cdot \psi'' \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 1 \cdot \psi'' \end{aligned}$$

→ die Wellengleichung ist erfüllt.

Die allgemeine Lösung lässt sich als Superposition von zwei beliebigen Funktionen darstellen, in die x und t nur in der Kombination $(x - ct)$ bzw. $(x + ct)$ eingehen.

$$\boxed{\psi = \psi_1(x - ct) + \psi_2(x + ct)} \quad (5.5)$$

Die Anfangs- und Randbedingungen legen die Funktionen ψ_1 und ψ_2 fest.

Ausbreitungsrichtung der Wellen:

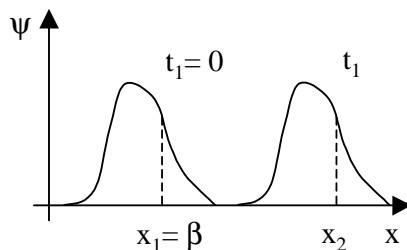


Abb. 5.1:

Ausbreitung einer eindimensionalen Welle

Wie bewegt sich eine konstante Auslenkung $\psi_1(x - ct) = \text{const.}$?

Dann muss auch die Phase $\beta = x - ct = \text{const.}$ sein, deren Wanderungsgeschwindigkeit ergibt sich aus

$$\frac{d\beta}{dt} = 0 = \frac{dx}{dt} - c \rightarrow \frac{dx}{dt} = c > 0 .$$

$\psi_1(x - ct)$ läuft in positive x-Richtung
 $\psi_2(x + ct)$ läuft in negative x-Richtung.

harmonische Welle als Spezialfall:

$$\begin{aligned} \psi &= a \cos [k(\pm x - ct) + \alpha] \\ &= a \cos [\pm kx - \omega t + \alpha] \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit:

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Wellenzahl
λ	Wellenlänge
$c = \lambda \cdot \nu$	Ausbreitungsgeschwindigkeit
ν	Frequenz
$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz
T	Schwingungsdauer
α	Phasenwinkel

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt:

$$c = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k} \quad (5.7)$$

weitere Darstellungen:

$$\begin{aligned} \psi &= a \operatorname{Re} e^{i(\pm kx - \omega t + \alpha)} \\ \psi &= \operatorname{Re}\{A e^{i(\pm kx - \omega t)}\} \quad \text{mit } A = a e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Periodizität:

$$\begin{aligned} \psi[k(x \pm \lambda)] &= \psi(kx \pm 2\pi) = \psi(kx) \\ \psi[\omega(t \pm T)] &= \psi(\omega t \pm 2\pi) = \psi(\omega t) \end{aligned}$$

b) **ebene Welle als spezielle dreidimensionale Lösung:**

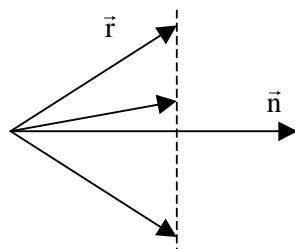


Abb. 5.1:

Ebenen konstanter Auslenkung
senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \vec{n}

$$\psi = \psi(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) \quad (5.8)$$

harmonische ebene Welle als Spezialfall:

$$\begin{aligned}\psi &= a \cos [k(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) + \alpha] \\ \psi &= \operatorname{Re}\{Ae^{ik(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)}\}\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi = \operatorname{Re}\{Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\}} \quad (5.9)$$

mit:

$\vec{k} = k\vec{n}$ Wellenvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle.

5.4 Ebene harmonische elastische Wellen

Darstellung der Verschiebung aus Longitudinal- und Transversalanteil:

$$\boxed{\vec{s} = \vec{s}_l + \vec{s}_t} \quad (5.10)$$

mit

$$\begin{aligned}\vec{s}_l &= \vec{A}_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{s}_t &= \vec{A}_t e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{rot} \vec{s}_l = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{s}_l &= \nabla \times (\vec{A}_l f(r)) = \nabla f(r) \times \vec{A}_l \\ &= e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{k}_l \times \vec{A}_l = 0 \\ &\rightarrow \vec{k}_l \times \vec{A}_l = 0, \quad \vec{k}_l \parallel \vec{A}_l \\ &(\vec{s}_l \text{ ist Longitudinalwelle})\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{div} \vec{s}_t = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{s}_t &= \nabla \cdot (\vec{A}_t f(r)) = \nabla f(r) \cdot \vec{A}_t \\ &= e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{k}_t \cdot \vec{A}_t = 0 \\ &\rightarrow \vec{k}_t \cdot \vec{A}_t = 0, \quad \vec{k}_t \perp \vec{A}_t\end{aligned}$$

(\vec{s}_t ist Transversalwelle)

Bemerkung: Das Auftrennen in rein longitudinale und transversale Wellen ist nur für elastisch isotrope Medien möglich. Im Allgemeinen liegen Wellen gemischten Typs vor (gilt auch für kubische Einkristalle abgesehen von speziellen Ausbreitungsrichtungen).

Ausbreitungsgeschwindigkeit in elastisch isotropen Medien:

$$\boxed{c_l = \frac{\omega}{k_l} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_t = \frac{\omega}{k_t} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} \quad (5.11)$$

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}} > \sqrt{2}$$

Die Poisson'sche Querkontraktionszahl ν liegt im Bereich $0 < \nu \leq 1/2$
Mit $\nu \approx 1/3$ ergibt sich $c_l \approx 2c_t$.

5.5 Elastische Wellen im Stab

$$l \gg \sqrt{A}$$

Longitudinalwellen: im Querschnitt homogene Deformation des Stabes, keine Kräfte auf Seitenflächen, Ausbreitung von Dehnungen und Kompressionen (Querkontraktionen breiten sich ungehindert aus, in elastisch angekoppelter Umgebung werden Gegenspannungen hervorgerufen). $\sigma_{11} \neq 0$, sonst $\sigma_{ij} = 0$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = E \frac{\partial s_1}{\partial x_1}$$

$$\rho \ddot{s}_1 = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = E \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}} \quad (5.12)$$

$$\rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (5.13)$$

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$

$$c < c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$$

c ist kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen in unbegrenzten Medien.

$c = c_l$ für Querkontraktionszahl $\nu = 0$.

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + 2\nu}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$2\mu + \lambda \rightarrow E \quad \text{für } \nu = 0$$

Ableitung anders:

Hooke :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) \\ 0 &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda(2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}) \end{aligned}$$

aus Symmetriegründen $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{22}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}\varepsilon_{11} \\ \sigma_{11} &= \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}\varepsilon_{11} = E\varepsilon_{11} \\ \rho\ddot{s}_1 &= \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = E \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Longitudinalwelle}$$

keine Transversalwellen ($\sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{12} = 0$) vorhanden,
aber „Biegungswellen“ existieren, Herleitung komplizierter !

5.6 Elastische Wellen in Platten

Die Platte sei in (x_1, x_2) - Richtung unendlich ausgedehnt, freie Oberflächen in x_3 - Richtung „ebener Spannungszustand“:

$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$, Deformation in x_3 -Richtung vorhanden, aber homogen

(im Gegensatz dazu:

„ ebene Deformation“:

$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$, z.B. ebene transv. Wellen im unbegrenzten elastischen dreidimensionalen Medium)

Hooke:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\text{Sp } \tilde{\varepsilon} \\ \sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\text{Sp } \tilde{\varepsilon} \\ 0 &= 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\text{Sp } \tilde{\varepsilon} \\ 0 &= 2\mu\varepsilon_{23} \\ 0 &= 2\mu\varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}\end{aligned}$$

Eliminieren von ε_{33} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{11} &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{11} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{22} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial s_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen sind mit $\rho\ddot{s}_i = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned}\rho\ddot{s}_1 &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda}\frac{\partial s_1^2}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{2\mu + \lambda}\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1\partial x_2} \\ \rho\ddot{s}_2 &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda}\frac{\partial s_2^2}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2} + \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{2\mu + \lambda}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1\partial x_2}\end{aligned}$$

„ebene Wellen“ in Richtung x_1 -Achse, die Auslenkungen sollen nur von x_1 abhängen.

$$\rho \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \frac{\partial s_1^2}{\partial x_1^2} = \rho c^2 \frac{\partial s_1^2}{\partial x_1^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2} = \rho c_t^2 \frac{\partial s_2^2}{\partial x_1^2}$$

Die longitudinale Welle hat kleinere Geschwindigkeit als die longitudinale Welle im unbegrenzten Medium.

Vergleich:

	Geschwindigkeit der long. Welle
Stab	$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
Platte	$\sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{(1 - \nu^2)}}$
unbegrenztes Medium	$\sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{(1 - \nu^2)} \cdot \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu}} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} = c_l$

E : Elastizitätsmodul,

ν : Poisson'sche Querkontraktionszahl ($0 < \nu < 1/2$)

5.7 Schwingende Saite

begrenztes elastisches Medium:

Mehrfachreflexionen elastischer Wellen an den Grenzflächen, Bewegungszustand kompliziert zu beschreiben.

Vereinfachungen möglich, wenn in einer Richtung (Platten, Membranen) oder zwei Richtungen (Saite) die Ausdehnung relativ klein ist.

Saite: Querdimension klein gegenüber Länge (kein Biegungswiderstand, besteht aus „neutraler Faser“), Querschnittsfläche A , in der Abb. sind die Auslenkungen $s(x)$ stark übertrieben gezeichnet.

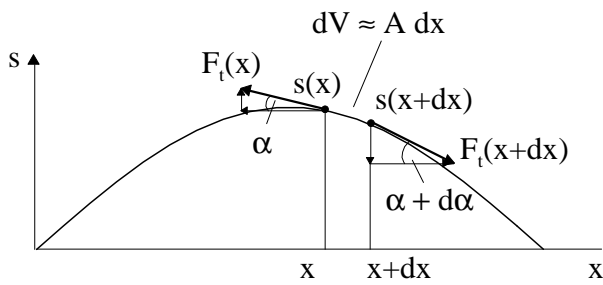


Abb. 5.3:
Schwingende Saite: Auslenkungen und Tangentialkräfte

Das Seil wird mit der Kraft σA gespannt.

Die resultierende Kraft in Richtung s auf das ausgelenkte Saitenelement ist
 $dF_s = \sigma A [\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha] = \sigma A d\alpha$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \tan \alpha \approx \alpha, \quad d\alpha = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

$$dF_s = dF_T = \text{Trägheitskraft} = \rho A dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}} \quad \text{Dgl. der schwingenden Saite} \quad (5.14)$$

$$\text{mit } \boxed{v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}} \quad (5.15)$$

Produktansatz: $s(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$

$$\rightarrow \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \text{const.} = -k^2$$

$$\rightarrow \varphi''(x) + k^2 \varphi(x) = 0$$

$$\psi''(t) + k^2 v^2 \psi(t) = 0$$

Ortsabhängigkeit:

Randbedingungen $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0$:

$$\varphi = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$$

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 && \rightarrow c_1 = 0 \\ \varphi(l) &= 0 && \rightarrow \boxed{kl = \nu\pi}, \quad \nu = 1, 2, \dots \\ (\nu = 0) &: && \text{Trivialfall ruhende Saite)}\end{aligned}$$

Lösung:

$$\boxed{\varphi_\nu(x) = c_{2\nu} \sin(k_\nu x) \quad \text{mit} \quad k_\nu = \frac{\nu\pi}{l}} \quad (5.16)$$

$\varphi_\nu(x)$ Eigenfunktionen
 k_ν Eigenwerte

Zeitabhängigkeit:

$$\psi_\nu(t) = c_{3\nu} \cos(k_\nu vt) + c_{4\nu} \sin(k_\nu vt)$$

Lösung für $s(x, t)$:

$$\boxed{\begin{aligned}s_\nu(x, t) &= \varphi_\nu(x)\psi_\nu(t) \\ &= \sin(k_\nu x) [A_\nu \cos(k_\nu vt) + B_\nu \sin(k_\nu vt)]\end{aligned}} \quad (5.17)$$

$$\text{mit } A_\nu = c_{2\nu}c_{3\nu}, \quad B_\nu = c_{2\nu}c_{4\nu}$$

Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}s(x, 0) &= s_0(x), \\ \dot{s}(x, 0) &= \dot{s}_0(x)\end{aligned}$$

Wegen der Linearität der Wellengleichung gilt auch:

$$\boxed{s(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin(k_\nu x) [A_\nu \cos(k_\nu vt) + B_\nu \sin(k_\nu vt)]} \quad (5.18)$$

Die Koeffizienten A_ν und B_ν dieser Fourier-Reihe werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned}s(x, 0) &= s_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \sin(k_\nu x) \\ \dot{s}(x, 0) &= \dot{s}_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu k_\nu v \sin(k_\nu x)\end{aligned}$$

mit

$$A_\nu = \frac{2}{l} \int_0^l s_0(x) \sin(k_\nu x) dx$$

$$B_\nu = \frac{2}{\pi \nu v} \int_0^l \dot{s}_0(x) \sin(k_\nu x) dx$$

$s(x, t)$ stellt stehende Wellen dar (Überlagerung von jeweils zwei nach rechts bzw. links laufenden Wellen). Es ist nämlich

$$\sin(k_\nu x) \cos(k_\nu vt) = \frac{1}{2} \{ \sin [k_\nu(x + vt)] + \sin [k_\nu(x - vt)] \}$$

$$\sin(k_\nu x) \sin(k_\nu vt) = \frac{1}{2} \{ \cos [k_\nu(x + vt)] + \cos [k_\nu(x - vt)] \}$$

Die Randbedingungen bestimmen die Frequenz der Schwingungsmoden: $\omega_\nu^2 = k_\nu^2 v^2$

$$\rightarrow \omega_\nu = k_\nu v = \frac{\nu \pi v}{l} = \frac{\nu \pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = 2\pi f_\nu$$

$$\boxed{f_\nu = \frac{\nu}{2l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}} \quad (5.19)$$

Grundschiwingung: $\nu = 1$ (Tonhöhe)

Oberschwingungen: $\nu = 2, 3, \dots$ (Klangfarbe)

Blasinstrumente: $2\nu, 4\nu, 6\nu, \dots$ betont, Streichinstrumente $3\nu, 5\nu, 7\nu, \dots$ betont

Flügel: Anschlag des Hammers auf die Saite bei $1/9L$: Oberton 9ν fehlt im Spektrum

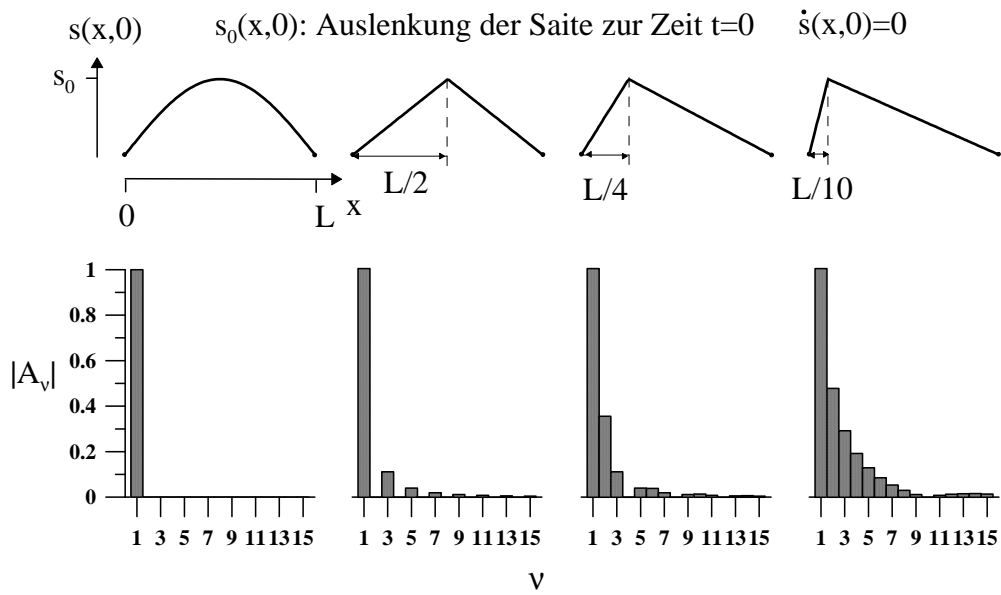


Abb. 5.4:
 Schwingende Saite:
 Verhältnis der Amplituden der Obertöne $\nu = 2, 3, \dots$ relativ zum Grundton $\nu = 1$ bei verschiedenen Ausgangsauslenkungen $s_0(x, 0)$

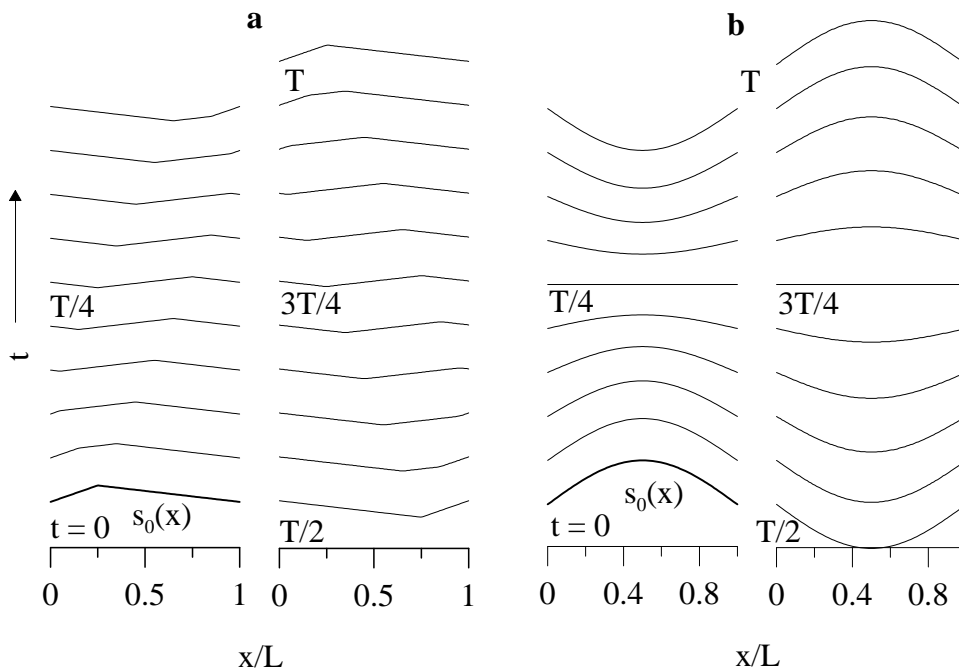


Abb. 5.4:
 Schwingende Saite: $s(x, t)$ für zwei verschiedene Ausgangsauslenkungen

Anfangsbedingungen $s(t = 0) = s_0(x), v(t = 0) = 0$
 Randbedingungen $s(x = 0) = s(x = L) = 0$

5.8 Reflexion und Brechung elastischer Wellen

Annahme: ebene, harmonische, monochromatische Wellen in elastisch isotropen Medien I und II

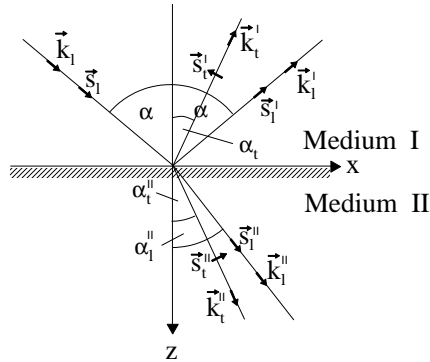


Abb. 5.5:
Reflexion und Brechung einer longitudinalen ebenen Welle

$$\begin{aligned}\vec{s}_l &= \vec{s}_{l0} e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega t)} & \vec{s}'_t &= \vec{s}'_{t0} e^{i(\vec{k}'_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{s}'_l &= \vec{s}'_{l0} e^{i(\vec{k}'_l \cdot \vec{r} - \omega t)} & \vec{s}''_t &= \vec{s}''_{t0} e^{i(\vec{k}''_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{s}''_l &= \vec{s}''_{l0} e^{i(\vec{k}''_l \cdot \vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{k}_l &= k_l (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \\ \vec{k}'_l &= k_l (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha) \\ \vec{k}'_t &= k'_t (\sin \alpha'_t, 0, -\cos \alpha'_t) \\ \vec{k}''_l &= k''_l (\sin \alpha''_l, 0, \cos \alpha''_l) \\ \vec{k}''_t &= k''_t (\sin \alpha''_t, 0, \cos \alpha''_t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{s}_{l0} &= A_l (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) \\ \vec{s}'_{l0} &= A'_l (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha) \\ \vec{s}''_{l0} &= A''_l (\sin \alpha''_l, 0, \cos \alpha''_l) \\ \vec{s}'_{t0} &= A'_t (-\cos \alpha'_t, 0, -\sin \alpha'_t) = \vec{e}_2 \times \vec{k}'_t (A'_t / k'_t) \\ \vec{s}''_{t0} &= A''_t (\cos \alpha''_t, 0, -\sin \alpha''_t) = \vec{e}_2 \times \vec{k}''_t (A''_t / k''_t)\end{aligned}$$

Randbedingungen:

allgemein:

 s_x, s_y, s_z stetig in der Grenzfläche $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ stetig in der Grenzfläche

wenn Medium I Flüssigkeit oder Gas:

 $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ in der Grenzfläche

wenn Medium I Vakuum:

 $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ in der Grenzfläche

$$\boxed{\vec{s}_l + \vec{s}'_l + \vec{s}''_l = \vec{s}''_l + \vec{s}''_t \quad \text{für } z = 0} \quad (5.20)$$

$$\vec{s}_{l0} e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{s}'_{l0} e^{i(\vec{k}'_l \cdot \vec{r} - \omega t)} + \dots = \dots \quad \text{für } z = 0$$

$$\vec{s}_{l0} e^{i(k_l \sin \alpha x - \omega t)} + \vec{s}'_{l0} e^{i(k'_l \sin \alpha x - \omega t)} + \dots = \dots \quad \text{für } z = 0$$

Die Randbedingung darf nicht von x und nicht von t abhängen.

$$\rightarrow k_l \sin \alpha = k''_l \sin \alpha''_l = k'_l \sin \alpha'_l = k'_l \sin \alpha'_l = k''_t \sin \alpha''_t$$

wegen $k = \frac{\omega}{c}$ gilt daher

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_\alpha}{c_\beta}}, \quad (5.21)$$

beschreibt Brechung und Reflexion longitudinaler und transversaler Wellen.

Amplituden:

aus

$$\vec{s}_{l0} + \vec{s}'_{l0} + \vec{s}'_{t0} = \vec{s}''_{l0} + \vec{s}''_{t0} \quad \text{für } z = 0$$

folgt

$$\boxed{A_l \sin \alpha + A'_l \sin \alpha - A'_t \cos \alpha'_t = A''_l \sin \alpha''_l + A''_t \cos \alpha''_t} \quad (5.22)$$

$$\boxed{A_l \cos \alpha - A'_l \cos \alpha - A'_t \sin \alpha'_t = A''_l \cos \alpha''_l - A''_t \sin \alpha''_t} \quad (5.23)$$

unbekannt: A'_l, A'_t, A''_l, A''_t weitere 2 Gleichungen ergeben sich aus der Stetigkeit von σ_{zz} und σ_{xz} in der Grenzfläche $z = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{s}^I &= \vec{s}_l + \vec{s}'_l + \vec{s}'_t \\ s_x^I &= \{A_l \sin \alpha e^{ik_l (\sin \alpha x + \cos \alpha z)} + A'_l \sin \alpha e^{ik_l (\sin \alpha x - \cos \alpha z)} - \\ &\quad - A'_t \cos \alpha'_t e^{ik'_t (\sin \alpha'_t x - \cos \alpha'_t z)}\} e^{-i\omega t} \\ s_y^I &= 0 \\ s_z^I &= \{A_l \cos \alpha e^{ik_l (\sin \alpha x + \cos \alpha z)} - A'_l \cos \alpha e^{ik_l (\sin \alpha x - \cos \alpha z)} - \\ &\quad - A'_t \sin \alpha'_t e^{ik'_t (\sin \alpha'_t x - \cos \alpha'_t z)}\} e^{-i\omega t} \\ \vec{s}^{II} &= \vec{s}''_l + \vec{s}''_t \\ s_x^{II} &= \{A''_l \sin \alpha''_l e^{ik''_l (\sin \alpha''_l x + \cos \alpha''_l z)} + A''_t \cos \alpha''_t e^{ik''_t (\sin \alpha''_t x + \cos \alpha''_t z)}\} e^{-i\omega t} \\ s_y^{II} &= 0 \\ s_z^{II} &= \{A''_l \cos \alpha''_l e^{ik''_l (\sin \alpha''_l x + \cos \alpha''_l z)} - A''_t \sin \alpha''_t e^{ik''_t (\sin \alpha''_t x + \cos \alpha''_t z)}\} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

für $z = 0$ ergibt sich (die Exponentialausdrücke sind weggelassen):

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_x^I}{\partial x} &= (A_l + A'_l) k_l \sin^2 \alpha - A'_t \cos \alpha'_t \sin \alpha'_t k'_t = \varepsilon_{xx}^I \\ \frac{\partial s_z^I}{\partial z} &= (A_l + A'_l) k_l \cos^2 \alpha + A'_t \cos \alpha'_t \sin \alpha'_t k'_t = \varepsilon_{zz}^I \\ \frac{\partial s_x^I}{\partial z} &= (A_l - A'_l) k_l \sin \alpha \cos \alpha + A'_t \cos^2 \alpha'_t k'_t \\ \frac{\partial s_z^I}{\partial x} &= (A_l - A'_l) k_l \cos \alpha \sin \alpha - A'_t \sin^2 \alpha'_t k'_t \\ \varepsilon_{xz}^I &= (A_l - A'_l) k_l \cos \alpha \sin \alpha + A'_t k'_t \frac{(1 - 2 \sin^2 \alpha'_t)}{2} \\ \text{Sp } \tilde{\varepsilon}^I &= \varepsilon_{11}^I + \varepsilon_{33}^I = (A_l + A'_l) k_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_z^{II}}{\partial z} &= A_l'' \cos^2 \alpha_l'' k_l'' - A_t'' \sin \alpha_t'' \cos \alpha_t'' k_t'' = \varepsilon_{zz}^{II} \\
\frac{\partial s_x^{II}}{\partial x} &= A_l'' \sin^2 \alpha_l'' k_l'' + A_t'' \cos \alpha_t'' \sin \alpha_t'' k_t'' = \varepsilon_{xx}^{II} \\
\frac{\partial s_x^{II}}{\partial z} &= A_l'' \sin \alpha_l'' \cos \alpha_l'' k_l'' + A_t'' \cos^2 \alpha_t'' k_t'' \\
\frac{\partial s_z^{II}}{\partial x} &= A_l'' \cos \alpha_l'' \sin \alpha_l'' k_l'' - A_t'' \sin^2 \alpha_t'' k_t'' \\
\varepsilon_{xz}^{II} &= A_l'' \sin \alpha_l'' \cos \alpha_l'' k_l'' + A_t'' k_t'' \frac{(1 - 2 \sin^2 \alpha_t'')}{2} \\
\text{Sp } \tilde{\varepsilon}^{II} &= \varepsilon_{xx}^{II} + \varepsilon_{zz}^{II} = A_l'' k_l''
\end{aligned}$$

Hooke'sches Gesetz:

$$\sigma_{ij} = \rho \{ 2c_t^2 \varepsilon_{ij} + (c_l^2 - 2c_t^2) \delta_{ij} \text{Sp } \tilde{\varepsilon} \}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^I &= \sigma_{zz}^{II} \\
\sigma_{zz} &= \rho \{ c_l^2 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) - 2c_t^2 \varepsilon_{xx} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho' \{ c_l'^2 k_l (A_l + A_l') - 2c_t'^2 k_l (A_l + A_l') \sin^2 \alpha + 2c_t'^2 k_t' A_t' \cos \alpha_t' \sin \alpha_t' \} = \\
\rho'' \{ c_l''^2 A_l'' k_l'' - 2c_t''^2 A_l'' \sin^2 \alpha_l'' k_l'' - 2c_t''^2 A_t'' \cos \alpha_t'' \sin \alpha_t'' k_t'' \}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\sigma_{xz}^I = \sigma_{xz}^{II}$$

$$\begin{aligned}
\rho' \{ k_l (A_l - A_l') c_t'^2 \sin 2\alpha + k_t' A_t' c_t'^2 \cos 2\alpha_t' \} = \\
\rho'' \{ k_l'' A_l'' c_t''^2 \sin 2\alpha_l'' + A_t'' k_t'' c_t''^2 \cos 2\alpha_t'' \}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Aus den 4 Gleichungen (22) - (25) lassen sich die relativen Amplituden

$$\frac{A_l'}{A_l}, \frac{A_l''}{A_l}, \frac{A_t'}{A_l} \quad \text{und} \quad \frac{A_t''}{A_l}$$

bestimmen.

Anwendungen (seismische Wellen) → siehe Seminar

5.9 Oberflächenwellen (Rayleigh-Typ)

Gesucht werden Lösungen der Bewegungsgleichungen, die elastische Wellen beschreiben, die sich in Nähe der Oberfläche des elastischen Halbraums ausbreiten und nur wenig in das Körperinnere eindringen.

Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\ddot{\psi} = c^2 \Delta \psi} \quad (5.26)$$

ψ ist irgendeine Komponente von \vec{s}_t oder \vec{s}_l .

Ansatz für eine ebene monochromatische Oberflächenwelle, die sich in x-Richtung ausbreitet:

$$\boxed{\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} f(z)} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } \ddot{\psi} &= -\omega^2 \psi \\ \text{und } \Delta \psi &= -k^2 \psi + \frac{\psi}{f} f''(z) \quad \text{ergibt sich} \\ -\omega^2 \psi &= c^2 \left(-k^2 + \frac{f''}{f}\right) \psi. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$f'' - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f = 0$$

hat für $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ Lösungen, die im Körperinneren exponentiell abklingen:

$$f(z) \sim e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} z}$$

Gl. (27) wird daher

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &= \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{-\kappa z} \\ \text{mit } \kappa &= \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \end{aligned}} \quad (5.28)$$

Der Verschiebungsvektor $\vec{s} = \vec{s}_t + \vec{s}_l$, dessen einzelne Komponenten die Gl. (26) mit $c = c_t$ bzw. c_l , erfüllen, wird aus den Randbedingungen bestimmt. Es ergibt sich, dass die Verschiebung der Oberflächenwelle nicht einfach in zwei Anteile mit Verschiebung parallel bzw. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zerlegt werden kann wie bei Volumenwellen. Die Anteile \vec{s}_t und \vec{s}_l des Verschiebungsvektors werden als quellenfrei bzw. rotationsfrei angenommen.

Randbedingungen:

$$\boxed{\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0} \quad \text{für } z = 0 \quad (5.29)$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = 0 &= 2\rho c_t^2 \varepsilon_{zz} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ &= \rho c_l^2 \varepsilon_{zz} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xz} = 0 &= 2\rho c_t^2 \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} = 0 &= 2\rho c_t^2 \varepsilon_{yz} \end{aligned}$$

$$\boxed{c_l^2 \frac{\partial s_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial s_x}{\partial x} = 0} \quad (5.30)$$

$$\boxed{\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} = 0} \quad (5.31)$$

$$\boxed{\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = 0} \quad (5.32)$$

(Wegen des Ansatzes (27), keine Abhängigkeit der Verschiebungsvektorkomponenten von y , folgt:

$$\frac{\partial s_y}{\partial z} = 0 \rightarrow s_y = \text{const.} = 0),$$

d.h., der Vektor \vec{s} liegt in der (x, z) -Ebene.

Beziehungen zwischen den Komponenten des **'Transversal'**- und des **'Longitudinal'**anteils:

'Transversal'anteil:

Wegen

$$\text{div } \vec{s}_t = 0 = \frac{\partial s_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{tz}}{\partial z} = 0$$

folgt mit $\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}$ und $s \sim e^{ikx - \kappa_t z}$

$$iks_{tx} - \kappa_t s_{tz} = 0.$$

Ansatz mit zu bestimmender Konstanten a :

$$\boxed{\begin{aligned} s_{tx} &= +\kappa_t a e^{ikx - \kappa_t z - i\omega t} \\ s_{tz} &= +ika e^{ikx - \kappa_t z - i\omega t} \end{aligned}} \quad (5.33)$$

'Longitudinal'anteil:

Wegen

$$\text{rot } \vec{s}_l = 0 \rightarrow \frac{\partial s_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial s_{lz}}{\partial x} = 0$$

folgt mit $\kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}$ und $s \sim e^{i(kx - \kappa_l z)}$

$$ik s_{lz} + \kappa_l s_{lx} = 0.$$

Ansatz mit zu bestimmender Konstanten b :

$$\begin{array}{l} s_{lx} = k b e^{ikx - \kappa_l z - i\omega t} \\ s_{lz} = +i\kappa_l b e^{ikx - \kappa_l z - i\omega t} \end{array} \quad (5.34)$$

Bestimmung der Konstanten a und b :

Die Komponenten der gesamten Verschiebung $s_x = s_{lx} + s_{tx}$, $s_z = s_{lz} + s_{tz}$ müssen den Gln. (30) und (31) genügen. (Gl. (32) wurde bereits verarbeitet):

$$\begin{array}{l} a(k^2 + \kappa_t^2) + 2bk\kappa_l = 0 \\ -c_l^2 b \kappa_l^2 - 2ac_t^2 k \kappa_t + c_t^2 b k^2 - 2c_t^2 b k^2 = 0 \end{array} \quad (5.35)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\kappa_l^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \quad \text{und} \quad \kappa_t^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}$$

sowie mit den Abkürzungen

$$\eta = \frac{c_t}{c_l}, \quad \xi = \frac{c_R}{c_t} = \frac{1}{c_t} \frac{\omega}{k} \quad (5.36)$$

ergibt sich

$$\kappa_l = k\sqrt{1 - \xi^2 \eta^2} \quad \text{und} \quad \kappa_t = k\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (5.37)$$

Aus dem Gleichungssystem (15) wird

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{1 - \xi^2} \cdot a + (2 - \xi^2) \cdot b = 0 \\ (2 - \xi^2) \cdot a + 2\sqrt{1 - \xi^2 \eta^2} \cdot b = 0 \end{array} \quad (5.38)$$

$c_R = \frac{\omega}{k}$ ist die Geschwindigkeit der Rayleighwelle.

Das homogene Gleichungssystem Gl. (38) hat nichttriviale Lösungen (Verschwinden der Determinante) für

$$4\sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi^2 \eta^2} = (2 - \xi^2)^2 \quad (5.39)$$

Es gibt nur eine Wurzel dieser Gleichung mit den Bedingungen ξ positiv reell, $\xi < 1$ (κ_l und κ_t müssen reell sein).

Das Verhältnis der Amplituden von Transversal- und Longitudinalanteil ist

$$\frac{a}{b} = -\frac{\text{sqr}1 - \xi^2}{2} \quad (5.40)$$

Diskussion:

$$\eta \approx 0,25 \cdots 0,65$$

$$\rightarrow \xi = 0,955 \cdots 0,90, \quad c_R = \xi c_t$$

Die Bewegung der Teilchen erfolgt auf Ellipsen (siehe Seminar)

Abnahme der Welle mit der Tiefe: $e^{-\kappa_t z} = e^{-1} = \frac{1}{2,71} = 0,37$

Eindringtiefe:

$$\rightarrow d_t = \frac{1}{\kappa_t} = \frac{1}{k\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$d_t \approx 0,5 \cdot \lambda$$

Entsprechend ergibt sich $d_l \approx 0,18 \cdot \lambda$.

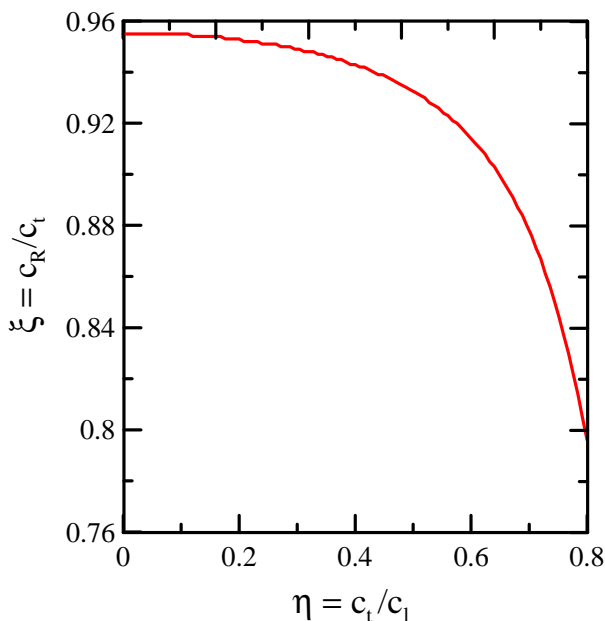


Abb. 5.7:

Ausbreitungsgeschwindigkeit c_R der Oberflächenwelle (Rayleigh-Typ)

Lösung (reell, $0 < \xi < 1$) der Gleichung $\xi^6 - 8\xi^4 + (24 - 16\eta^2)\xi^2 + 16(\eta^2 - 1) = 0$

5.10 Oberflächenwellen (Love-Typ)

Oberflächenwellen vom Love-Typ (Love 1911) sind Scherwellen, die sich in einer Schicht (Medium) unterhalb der Oberfläche ausbreiten (s. Abb.).

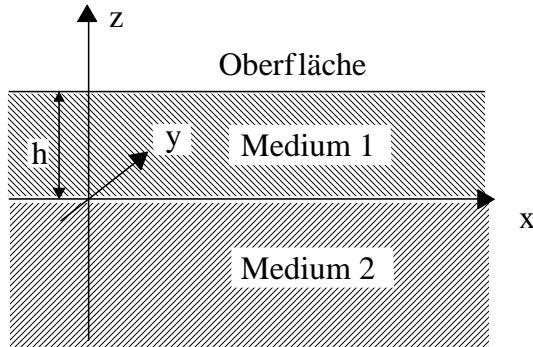


Abb. 5.8:

Ausbreitung von Love-Wellen als Scherwellen im Medium 1 in Richtung der x-Achse

Ansatz mit ebenen Wellen, die sich in x-Richtung ausbreiten:

Medium 1:

$$\begin{aligned} s_{1x} &= s_{1z} = 0 \\ s_{1y} &= ae^{i(kx-\omega t)} f(z) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Medium 2:

$$\begin{aligned} s_{2x} &= s_{2z} = 0 \\ s_{2y} &= be^{i(kx-\omega t)} e^{\kappa_2 z} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Aus der Wellengleichung ergibt sich:

Medium 1:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{1y} &= c_{t1}^2 \Delta s_{1y} \\ -\omega^2 s_{1y} &= c_{t1}^2 \left(-k^2 + \frac{f''}{f}\right) s_{1y} \\ \rightarrow f'' + \left(\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2\right) f &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wenn man für die Lösung dieser Differentialgleichung sin / cos-Funktionen ansetzt, ergibt sich

$$s_{1y} = [a_1 \sin(\kappa_1 z) + a_2 \cos(\kappa_1 z)] e^{i(kx-\omega t)} \quad (5.44)$$

mit

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2} \quad (5.45)$$

Medium 2:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{2y} &= c_{t2}^2 \Delta s_{2y} \\ -\omega^2 s_{2y} &= c_{t2}^2 (-k^2 + \kappa_2^2) s_{2y}.\end{aligned}$$

Daher ist

$$s_{2y} = b e^{\kappa_2 z} e^{i(kx - \omega t)} \quad (5.46)$$

mit

$$\kappa_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}} \quad (5.47)$$

Reine Scherwellen sind ohne Medium 2 als Oberflächenwellen nicht möglich. Sonst wäre nämlich die Bedingung zu erfüllen, dass $s_{1y}(z \rightarrow -\infty)$ verschwindet. Das ist bei einem Ansatz mit \sin/\cos -Funktionen nicht gewährleistet. Bei einem Ansatz $f = c_1 e^{\kappa_1 z} + c_2 e^{-\kappa_2 z}$ sind nicht gleichzeitig $f(h) = 0$ und $f(-\infty) = 0$ erfüllbar.

Randbedingungen:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h} : \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}&\rightarrow \frac{\partial s_{1y}}{\partial z} = 0 \\ \rightarrow a_1 \cos(\kappa_1 h) - a_2 \sin(\kappa_1 h) &= 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} : \quad s_{1y} = s_{2y} \quad (5.49)$$

$$\rightarrow a_2 = b$$

$$\sigma_{yz} |_1 = \sigma_{yz} |_2 \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \mu_1 \frac{\partial s_{1y}}{\partial z} &= \mu_2 \frac{\partial s_{2y}}{\partial z} \\ \rightarrow \mu_1 \kappa_1 a_1 &= \mu_2 \kappa_2 b\end{aligned}$$

Die Randbedingungen führen auf das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\cos(\kappa_1 h) \cdot a_1 - \sin \kappa_1 h \cdot a_2 &= 0 \\ a_2 - b &= 0 \\ \mu_1 \kappa_1 \cdot a_1 - \mu_2 \kappa_2 b &= 0\end{aligned}$$

Aus der Bedingung, dass die Determinante des Gleichungssystems verschwinden muss, folgt die Gleichung

$$\boxed{\tan(\kappa_1 h) = \frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1}}. \quad (5.51)$$

Mit den Abkürzungen

$$\xi = \frac{c_L}{c_{t2}} = \frac{\omega/k}{c_{t2}}, \quad \eta = \frac{c_{t1}}{c_{t2}} \quad (5.52)$$

ergibt sich

$$\kappa_1 = k\sqrt{\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1}, \quad \kappa_2 = k\sqrt{1 - \xi^2}$$

und

$$\frac{\mu_2 \kappa_2}{\mu_1 \kappa_1} = \frac{\mu_2 \eta}{\mu_1} \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{\xi^2 - \eta^2}} = \tan \left[\frac{kh}{\eta} \sqrt{\xi^2 - \eta^2} \right].$$

Reelle Lösungen dieser Gleichung ergeben sich für $\eta < \xi < 1$.

Daher ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Love-Welle kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von S-Wellen im Medium 2 und größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von S-Wellen im Medium 1:

$$c_{t1} < c_L < c_{t2} \quad (5.53)$$

Beispiel:

	$\rho(g/cm^3)$	$c_t(km/s)$
Medium 1: Eis	0,9	1,8
Medium 2: Granit	2,6	3,0

angenommene Schichtdicke: $h = 100$ m

λ/m	$kh = 2\pi h/\lambda$	ξ
100	2π	0,932
1000 m	0,63	0,985
10 km	0,063	0,9999

Bei kleiner Wellenlänge nähert sich c_L der Geschwindigkeit c_{t1} in der Schicht (Medium 1), bei großer Wellenlänge der Geschwindigkeit c_{t2} im Untergrund (Medium 2).

Kapitel 6

Kinematik von Flüssigkeiten und Gasen

6.1 Die lokale Betrachtungsweise

In diesem Kapitel werden als nichtelastische Medien insbesondere Flüssigkeiten und Gase behandelt. **substantielle** Betrachtungsweise (**Lagrange**):

$$s_i = s_i(x_j, t) \quad x_j: \quad \text{„Name“ des Massenpunktes (Ort bei } t = 0)$$
$$s_i = x'_i - x_i \quad \text{Verschiebung des MP, der zu } x_i \text{ gehört}$$

In diesem Sinne s_i bisher verwendet in lin. Elast. theorie, wenn Teilchen wieder in Ausgangslage zurückkehren
Aber: bei Betrachtung der Strömung in Flüssigkeiten und Gasen ist es meist unwichtig, die Bahn individueller Teilchen zu verfolgen

lokale Betrachtungsweise (**Euler**):

$$s_i = s_i(x_j, t) \quad x_j: \quad \text{Ort}$$
$$s_i: \quad \text{Verschiebung des MP, der sich zur Zeit } t = 0 \text{ gerade bei } x_j \text{ befand}$$

In verschiedenen Zeiten ist s_i die Verschiebung verschiedener MP.

Gefragt ist nicht Zustand des Teilchens, sondern Zustand am Ort, gesucht werden $v_i = \frac{ds_i}{dt}$ und $a_i = \frac{d^2s_i}{dt^2}$ am Ort x_j . (s_i ist nicht interessant)

Änderung von $s_i =$ lokale Änderung + räumliche Änderung

$$v_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s_i(x_j + \Delta s_j, t + \tau) - s_i(x_j, t)}{\tau} = \frac{ds_i}{dt}$$
$$a_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v_i(x_j + \Delta s_j, t + \tau) - v_i(x_i, t)}{\tau} = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2s_i}{dt^2}$$
$$a_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left\{ v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta s_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} \tau - v_i(x_j, t) \right\}$$

$$\boxed{\frac{dv_i}{dt} = a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v}} \quad (6.1)$$

Gilt auch für andere Feldgrößen

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{(\vec{v} \text{ grad}) A}_{\text{Änderg. infolge örtl. Variation}}$$

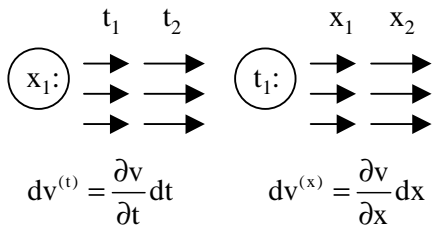


Abb. 6.1:
zeitliche und räumliche
Veränderung der Geschwindigkeit

Beispiel: Wasserfall:

Nur $\vec{a} = (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} \neq 0$, aber wäre z.B. die Erdbeschleunigung g veränderlich, wäre auch $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$

„Reisegleichung“: $A = T = \text{Temperatur}$

Temperaturänderung für Reisenden: Lokale Änderung + Änderung infolge örtlicher Variation (Wetter, Klima)

6.2 Die Kontinuitätsgleichung

Massenerhaltung:

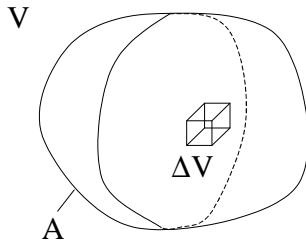
Abb. 6.2:Massendichte $\rho(x_j, t)$ eines Volumenelementes ΔV

$$\rho = \rho(x_j, t)$$

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

$$M = \int \rho dV$$

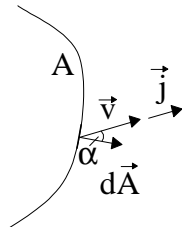


Strom durch die Oberfläche:

Massenstromdichte j :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \rho \vec{v} \\ j_i(x_j, t) &= \rho(x_j, t) v_i(x_j, t) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$|\vec{j}| = \frac{\text{Masse}}{\text{Vol}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Masse}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$

Abb. 6.3:Massenstrom dI durch ein Flächenelement $d\vec{A}$ 

$$\begin{aligned} dI &= \vec{j} \cdot d\vec{A} \\ &= |\vec{j}| |d\vec{A}| \cos \alpha \\ &= \rho v_i dA_i \end{aligned}$$

Massenabnahme durch Massenstrom über das Flächenelement $d\vec{A}$ in der Zeit dt :

$$-\frac{\text{partial } m}{\text{partial } t} = \rho v_i dA_i$$

gesamter Massestrom aus V :

$$-\frac{\text{partial } M}{\text{partial } t} = \oint j_i dA_i = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}} \quad (6.3)$$

Gauß'scher Satz:

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \operatorname{div} \vec{j} dV \rightarrow \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0$$

→

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_j}{\partial x_j} = 0$$

Kontinuitätsgleichung (6.4)

lokale Form der Massenerhaltung:

Die Masse entsteht oder verschwindet nur durch Strom.

Kontinuitätsgleichung für andere Größen : Ladung, Energie, Impuls, Drehimpuls, Entropie

geschlossenes Gefäß:

$$\oint j_i dA_i = 0 \rightarrow \frac{dM}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = 0 \end{aligned}$$

$\operatorname{div} \vec{v}$ = Volumendilatationsgeschwindigkeit

$$\operatorname{div} \vec{s} = \frac{\Delta V}{V}$$

inkompressibles Medium: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho &= \frac{d\rho}{dt} = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho \quad (\text{"Reisegleichung"}) \end{aligned}$$

Kapitel 7

Dynamik von Flüssigkeiten und Gasen

7.1 Der Spannungstensor in Flüssigkeiten und Gasen

a) ruhendes Medium

außer Widerstand gegen Volumenänderung kein Widerstand gegen Formänderung
→ keine Tangentialspannungen

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \\ \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p\end{aligned}$$

p = Druck = negative Spannung, wirkt allseitig

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}} \quad (7.1)$$

b) bewegtes Medium

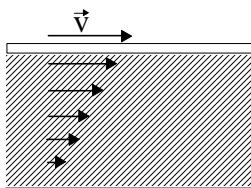


Abb. 7.1:

Übertragung von Tangentialspannungen

Bsp.: Platte über einem Flüssigkeitsfilm wird mit \vec{v} gegenüber einer festen Oberfläche bewegt.

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}} \quad (7.2)$$

$\sigma'_{ij} = 0$ für ideale Flüssigkeiten

$\sigma'_{ij} \neq 0$ bei $v_i \neq 0$ für zähe Flüssigkeiten

Die Bewegung von Flüssigkeitsteilchen relativ zueinander führt zu σ'_{ij} , nicht Translationen und Rotationen, sondern Deformationen sind entscheidend.

Deshalb Ansatz (linear, isotrop) $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij})$

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2 \eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \eta' \delta_{ij} Sp \dot{\varepsilon}} \quad (7.3)$$

η, η' : Reibungskoeffizienten, temperaturabhängig. η Viskosität

ideale Flüssigkeit: $\eta = \eta' = 0$

inkompressible Flüssigkeit: $Sp \dot{\varepsilon} = div \vec{v} = 0$

7.2 Zustandsgleichungen

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Druck und der Deformation: $p = p(\varepsilon_{ij})$?

Betrachtung für ideale Flüssigkeit (ideales Gas): $\eta = \eta' = 0$. Dann ist $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$. Andererseits folgt aus dem Hooke'schen Gesetz mit $\mu = 0$ (kein Widerstand gegen Scherung)

$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} Sp \tilde{\varepsilon}$ und es ist

$$\rightarrow E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} = 0$$

$$\rightarrow c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 0, \quad c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \neq 0$$

$$\rightarrow \kappa = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \lambda$$

Zusammenhang mit der Kompressibilität $K = \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$, κ Kompressionsmodul :

a) Flüssigkeit

Grosse Drucke bewirken nur kleine Volumenänderungen. Eine Erhöhung des Druckes von 0 auf Δp bewirkt eine Volumenänderung um ΔV .

Es ergibt sich mit $-\Delta p = \lambda Sp \tilde{\varepsilon} = \lambda \frac{\Delta V}{V}$ und $\frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\lambda = \kappa}$$

κ kann berechnet werden, wenn die Zustandsgleichung $p = p(V, T)$ bekannt ist. Inkompressibilität oft gute Näherung:

$$K = 0, \quad \kappa \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

b) Gase

Kleine Druckunterschiede bewirken grosse Volumenänderungen. Oft ist die thermodynamische Zustandsgleichung bekannt.

Bsp.: ideales Gas:

$$\boxed{pV = \nu RT} \quad (7.4)$$

$R = \text{Gaskonstante} = 8,3143 \cdot 10^3 \frac{J}{K \text{ kmol}}$

Mit $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V}{\mu} = \text{Molzahl}$ und $\mu = \text{Molmasse}$ ergibt sich

$$p = \frac{\rho RT}{\mu}$$

Berechnung des Kompressionsmoduls κ :

isothermer Vorgang: $p = \text{const} \cdot \rho = a\rho$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho a} = \frac{1}{p}$$

$$\rightarrow \kappa = p = \lambda$$

adiabatischer Vorgang: $p = \text{const} \cdot \rho^\gamma = b\rho^\gamma$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen}$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{1/\gamma}{b^{1/\gamma} p^{1/\gamma-1}} = \frac{1}{\gamma p}$$

$$\rightarrow \kappa = \gamma p = \lambda$$

Schallausbreitung ist adiabatischer Vorgang (c_l Schallgeschwindigkeit):

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

7.3 Euler'sche und Navier-Stokes'sche Gleichungen

Ausgang für die Ableitung ist die Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho a_i &= \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho \vec{a} &= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{f} + \text{Div } \tilde{\sigma} \end{aligned}} \quad (7.5)$$

mit den Spannungstensorkomponenten

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \eta \dot{\epsilon}_{ij} + \eta' \delta_{ij} \operatorname{Sp} \dot{\epsilon}.$$

a) ideale Flüssigkeit (Gas):

Wegen $\eta = \eta' = 0$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= -\delta_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \operatorname{Div} \tilde{\sigma} &= -\operatorname{grad} p \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Eulerschen Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= f'_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} &= \vec{f}' - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \end{aligned}} \quad (7.6)$$

Die Kraftdichte \vec{f}' ist auf die Masse bezogen: $\vec{f}' = \vec{f}/\rho = \frac{\text{Kraft}}{\text{Volumen}} / \text{Dichte} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$

Wenn man \vec{f}' als gegeben annimmt, sind die fünf Unbekannten v_1, v_2, v_3, p und ρ als Funktionen von Ort und Zeit zu bestimmen. Neben den drei Euler'schen Gleichungen stehen noch die Zustandsgleichung und die Kontinuitätsgleichung zur Verfügung:

Zustandsgleichung:

$$\boxed{\rho = \rho(p)} \quad (7.7)$$

Beispiele sind:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{const.} \\ p &= \text{const} \cdot \rho \\ p &= \text{const.} \cdot \rho^\gamma \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0} \quad (7.8)$$

b) zähe Flüssigkeit (Gas):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\eta \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + \eta' \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} Sp \dot{\varepsilon}$$

Mit

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad Sp \dot{\varepsilon} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

ergibt sich

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\eta + \eta') \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung führt zu den Navier- Stokes'schen Gleichungen:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f'_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{(\eta + \eta')}{\rho} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{f}' - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \frac{(\eta + \eta')}{\rho} \text{grad div } \vec{v} \quad (7.10)$$

Zusammen mit der Zustandsgleichung

$$\rho = \rho(p) \quad (7.11)$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (7.12)$$

sind das fünf Gleichungen, die unter Beachtung der Anfangs- und Randbedingungen zur Bestimmung der fünf Unbekannten v_1, v_2, v_3, p und ρ zu lösen sind.

Systematik:

- a) Statik $v_i = 0$ — Dynamik $v_i \neq 0$
- b) stationär $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ — instationär $\frac{\partial v_i}{\partial t} \neq 0$
- c) wirbelfrei $\text{rot } \vec{v} = 0$ — wirbelbehaftet $\text{rot } \vec{v} \neq 0$
- d) inkompressibel $\text{div } \vec{v} = 0$ — kompressibel $\text{div } \vec{v} \neq 0$
- e) ideal $\eta = \eta' = 0$ — zäh, viskos $\eta \neq 0, \eta' \neq 0$

Kapitel 8

Hydro- und Aerostatik

8.1 Grundgleichungen

Statik: $v_i = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Die Navier- Stokes'schen Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\boxed{\vec{f}' = \frac{1}{\rho} \text{grad } p} \quad (8.1)$$

(kein Unterschied zwischen idealen und zähen Flüssigkeiten!)

Diese Gleichung beschreibt das Gleichgewicht zwischen äußeren Kräften und dem Druck.
Die Zustandsgleichung sei gegeben durch

$$\boxed{\rho = \rho(p)}. \quad (8.2)$$

Die Kontinuitätsgleichung entfällt.

Umwandlung von $\frac{1}{\rho(p)} \text{ grad } p$ durch Einführung einer Druckfunktion $P(p)$:

$$\boxed{\frac{1}{\rho(p)} \text{ grad } p = \text{grad } P \quad \text{mit } P = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')}} \quad (8.3)$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{dP}{dp} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \rightarrow P &= \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{f}' = \text{grad}P} \quad (8.4)$$

Wenn die äußeren Kräfte aus einem Potential abgeleitet werden können,

$$\vec{f}' = -\text{grad} U,$$

lautet die Gleichgewichtsbedingung:

$$\boxed{P + U = \int \frac{dp}{\rho} + U = \text{const.}} \quad (8.5)$$

Äquipotentialflächen: Flächen konstanter Druckfunktion, Flächen konstanten Drucks

8.2 Anwendungen

a) inkompressible Flüssigkeiten im Schwerfeld

Annahme: $\rho = \text{const.} = \rho_0$

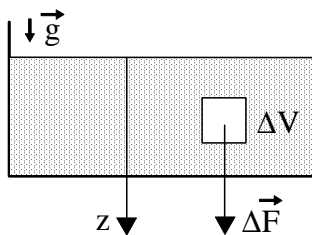


Abb. 8.1:

Druck im Inneren einer Flüssigkeit im Schwerfeld

$$\begin{aligned} \vec{f}' &= \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} = \frac{\Delta m \vec{g}}{\Delta m} = \vec{g} = g \vec{e}_z \\ \vec{f}' &= -\text{grad} U \\ U &= -gz + \text{const.} \end{aligned}$$

$$P + U = \text{const.}$$

$$\int \frac{dp}{\rho_0} + U = \frac{p}{\rho_0} - gz = \text{const.}$$

$$p = c + \rho_0 gz$$

R.B.: $z = 0$: $p = p_0$ (Luftdruck)

$$\boxed{p = p_0 + \rho_0 gz} \quad (8.6)$$

Äquipotentialflächen $\hat{=}$ Flächen konstanten Druckes

Schlussfolgerung:

Form des Gefäßes unwesentlich, Druck auf dem Boden der Gefäße bei gleicher Füllhöhe gleich, hydrostatisches Paradoxon:

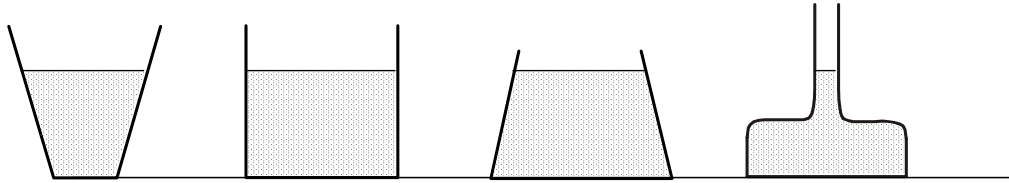
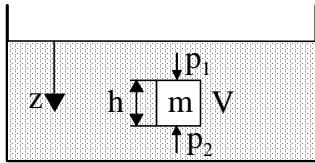


Abb. 8.2:
Hydrostatisches Paradoxon

b) Auftrieb**Abb. 8.3:**

Auftrieb in einer Flüssigkeit

$$V = Ah$$

$$p_1 = p_0 + \rho_0 g z$$

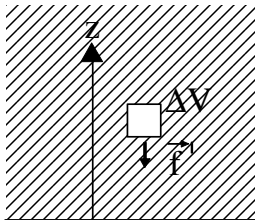
$$p_2 = p_0 + \rho_0 g(z + h)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= p_1 A \vec{e}_z - p_2 A \vec{e}_z \\ &= -\rho_0 g A h \vec{e}_z = -\rho_0 g V \vec{e}_z \\ &= -m_W g \vec{e}_z \end{aligned}$$

Die Druckverteilung in der Flüssigkeit ist nur von z abhängig, nicht vom eingebrachten Körper. Die resultierende Kraft auf die Oberfläche des Körpers \vec{F}_A hält dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmasse m_W das Gleichgewicht (Auftrieb).

c) Gase im Schwerfeld**Abb. 8.4:**

Druck im Innern eines Gases im Schwerfeld



Luftsäule über der Erdoberfläche,
Annahme $T = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \vec{f}' &= -g \vec{e}_z \\ U &= gz + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{ideales Gas : } pV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT$$

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T$$

$$U + P = gz + \frac{RT}{\mu} \int \frac{dp}{p} = \text{const.}$$

$$\rightarrow z + \frac{RT}{g\mu} \ln p = \text{const.}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} p = p_0 e^{-g\mu z/RT} \\ \rho = \rho_0 e^{-g\mu z/RT} \end{array} \quad \text{barometrische Höhenformel} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \text{für } p_0 &= 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (760 \text{ mm Hg}) \\ \rho_0 &= 0,001293 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

ergibt sich $z = 18,2^{10} \log \frac{p_0}{p}$ in km

für $p = 0,1p_0$ ist $z = 18,2 \text{ km}$ ($^{10}\log 10 = 1$)

Tatsächlich ist die Temperatur nicht konstant und nimmt in der Troposphäre bis ca. 15 km auf etwa -55°C ab. Eine bessere Näherung für $p(z), \rho(z)$ wird im Seminar gerechnet.

Kapitel 9

Druckgleichung und Bernoulli-Gleichung

9.1 Grundbegriffe

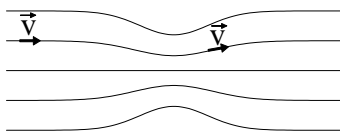


Abb. 9.1:
Strömungsfeld mit Stromlinien

<u>Strömungsfeld:</u>	$\vec{v}(\vec{r}, t)$
<u>Stromlinien:</u>	Raumkurven, deren Tangenten in jedem Raumpunkt mit Richtung von \vec{v} übereinstimmen.
<u>Bahnkurven:</u>	Kurven von Massenelementen, die im Laufe der Zeit durchlaufen werden (Anfärben, substantielle Betrachtungsweise!) Stromlinie = Bahnkurve, wenn stationäre Strömung ($\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$)
<u>Stromröhre:</u>	Menge der Stromlinien durch kleine geschlossene Kurve
<u>Stromfaden:</u>	Flüssigkeitsmenge, die die Stromröhre enthält
<u>Wirbelvektor:</u>	$\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ (Vektor der Drehgeschwindigkeit) (vergl.: $\vec{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{s}$)
<u>Wirbelfeld:</u>	$\vec{w}(\vec{r}, t)$
<u>Wirbelströmung:</u>	$\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \neq 0$ $\text{div } \text{rot } \vec{v} = 0$ (Wirbellinien können nicht entstehen oder vergehen)
<u>Potentialströmung:</u>	$2\vec{w} = \text{rot } \vec{v} = 0$ $\vec{v} = \text{grad } \phi$ (Potential existiert) ϕ 'Geschwindigkeitspotential'

9.2 Die Druckgleichung

Voraussetzung:

- 1 ideale Flüssigkeit: $\eta = \eta' = 0$ (Glieder mit η, η' fallen auch weg für $\operatorname{div} \vec{v} = 0$: inkompressible Strömung)
- 2 \vec{f} hat Potential: $\vec{f} = -\operatorname{grad} U$
- 3 wirbelfreie Bewegung: $\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \operatorname{grad} \phi$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (\mathbf{Euler})$$

Es ist $(\vec{v} \operatorname{grad}) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2$

(Die x- Komponente ist z.B.:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) - \left[v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad .)$$

Damit wird wegen $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P \right) = 0$$

$$\text{mit } \vec{v} = \operatorname{grad} \phi, \quad P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\operatorname{grad} \phi)^2}{2} + U + P = \text{const.}} \quad \mathbf{Druckgleichung} \quad (9.1)$$

(Das heisst, statt eines vektoriellen ist nur noch ein skalares Feld ϕ zu ermitteln, aus dem durch Gradientenbildung \vec{v} ermittelt wird.)

9.3 Die Bernoulli-Gleichung

Aus der Druckgleichung folgt für den stationären Fall

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \right) :$$

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + U + P = \text{const.}} \quad \mathbf{Bernoulli} \quad (9.2)$$

Diese Gleichung läßt sich übrigens auch aus der Euler-Gleichung ableiten für $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ längs einer Stromlinie:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \vec{f} - \text{grad } P$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad \text{Integration längs einer Stromlinie } d\vec{s} \parallel \vec{v} :$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + U + P \right) \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{2} + U + P = \text{const. längs einer Stromlinie}$$

weitere Vereinfachungen der Bernoulli-Gleichung:

- 1 inkompressibles, homogenes Medium ($\rho = \text{const.}$)
- 2 $U = gz$ (z -Achse im Erdfeld nach oben)

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \text{const.}} \quad (9.3)$$

Die Gleichung entspricht dem Energieerhaltungssatz:

kinetische + potentielle + Druckenergie = const.

für konstante Höhe z gilt:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = p_0(v=0) + 0 + \rho gz$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + p = p_0} \quad (9.4)$$

Staudruck + statischer Druck = Gesamtdruck

p_0 = hydrostatischer Druck (maximaler Druck)

Beispiele:

Grundlage der Hydraulik

Prandtl'sches Staurohr

hydrodynamisches Paradoxon

weitere Beispiele \rightarrow Seminar

Kapitel 10

Potentialströmungen

10.1 Allgemeine Potentialströmung

Voraussetzungen:

- 1 \vec{f}' hat Potential
- 2 wirbelfreie Strömung: $\text{rot } \vec{v} = 0$
- 3 inkompressible Strömung: $\text{div } \vec{v} = 0$

aus **2** und **3** folgt: die Zähigkeit (η, η') spielt keine Rolle

aus $\text{rot } \vec{v} = 0$ folgt: $\vec{v} = \text{grad } \phi$

aus $\text{div } \vec{v} = 0$ folgt: $\Delta\phi = 0$

Vorgehen:

- $\Delta\phi = 0$ lösen unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingungen
- p berechnen aus der Druckgleichung $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\text{grad } \phi)^2 + U + P = \text{const.}$
- \vec{v} berechnen aus $\vec{v} = \text{grad } \phi$

→ Das mathematische Handwerkszeug der Potentialtheorie kann genutzt werden!

10.2 Die ebene Potentialströmung

Aus $\text{rot } \vec{v} = 0$ (wirbelfreie Strömung) und $\text{div } \vec{v} = 0$ (inkompressible Strömung) folgt

$$\boxed{\Delta\phi = 0} \tag{10.1}$$

$$\vec{v} = \text{grad } \phi = (v_x(x, y), v_y(x, y)) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad (10.2)$$

ϕ : Geschwindigkeitspotential

Einführung einer Stromfunktion Ψ :

$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ kann ausgedrückt werden durch

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (\text{Schwartz'scher Satz})$$

mit $\vec{v} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}} \quad (10.3)$$

Stromlinien:

Für die Stromlinien ist $\Psi = \text{const.}$

$$\boxed{d\Psi = -v_y dx + v_x dy = 0} \quad \text{Differentialgleichung der Stromlinie} \quad (10.4)$$

Ermittlung der Geschwindigkeitskomponenten aus dem Geschwindigkeitspotential und der Stromfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}} \quad \text{Cauchy – Riemann'sche Differentialgleichungen} \quad (10.5)$$

für den Realteil ϕ und den Imaginärteil Ψ einer analytischen Funktion $W = \phi + i\Psi$ des komplexen Argumentes $z = x + iy$

W : komplexes Geschwindigkeitspotential

Durch jede komplexe analytische (reguläre) Funktion $W(z)$ wird ein Strömungsbild vermittelt.

$$w = \frac{dW}{dz} = v_x - iv_y$$

$$w^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^* = v_x + iv_y$$

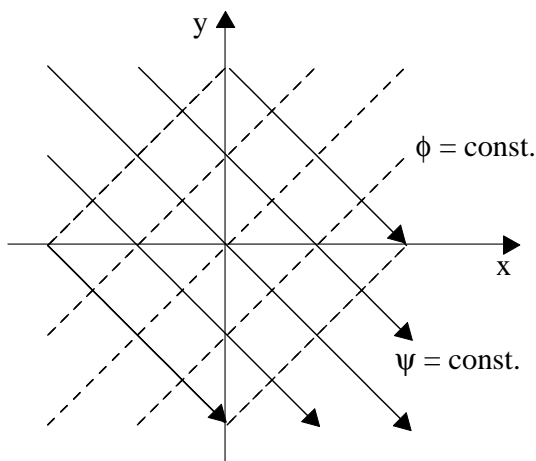
$$\begin{aligned} dW &= d\phi + id\Psi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + i\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + i\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy \\ &= (v_x - iv_y)(dx + idy) = (v_x - iv_y)dz \end{aligned}$$

Beispiele:

a) $W = \alpha z$ (Grundströmung)

$$\alpha = \text{const.} = a + ib, \quad a, b \text{ reell, } > 0$$

$$W = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = \phi + i\Psi$$



$$\phi = ax - by = \text{const} = c_1$$

$$\Psi = bx + ay = \text{const} = c_2$$

$$w = \frac{dW}{dz} = \alpha = a + ib = v_x - iv_y$$

$$\rightarrow v_x = a, \quad v_y = -b$$

Abb. 10.1:
Grundströmung

b) $W = az^2$ (Staupunktströmung)

$$a \text{ reell, } > 0$$

$$W = az^2 = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy = \phi + i\Psi$$

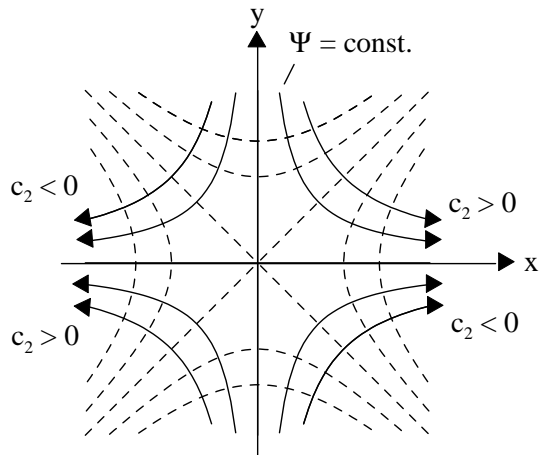


Abb. 10.2:
Staupunktströmung

$$\phi = a(x^2 - y^2) = \text{const.} = c_1$$

$$\Psi = 2axy = \text{const.} = c_2$$

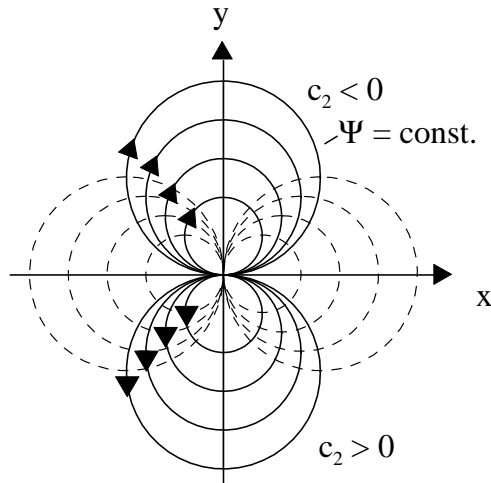
$$w = \frac{dW}{dz} = 2az = 2ax + i2ay = v_x - iv_y$$

$$\rightarrow v_x = 2ax, \quad v_y = -2ay$$

c) $W = \frac{a}{z}$ (Dipolströmung)

a reell, $a > 0$

$$W = \frac{a}{z} = \frac{a}{r} e^{-i\varphi} = \frac{a}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \phi + i\Psi$$



$$\phi = \frac{a}{r} \cos \varphi = \text{const} = c_1$$

$$\Psi = -\frac{a}{r} \sin \varphi = -\frac{ay}{x^2 + y^2} = \text{const} = c_2$$

$$\rightarrow \left(y + \frac{a}{2c_2}\right)^2 + x^2 = \frac{a^2}{4c_2^2}$$

$$w = \frac{dW}{dz} = -\frac{a}{z^2} = -\frac{a}{r^2} e^{-i2\varphi} = v_x - iv_y$$

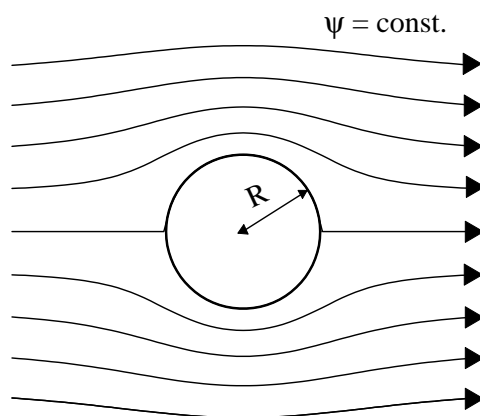
$$\rightarrow v_x = -\frac{a}{r^2} \cos 2\varphi, \quad v_y = -\frac{a}{r^2} \sin 2\varphi$$

Abb. 10.3:
Dipolströmung

d) $W = a\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$ (Grund- + Dipolströmung)

a reell, $a > 0$

$$W = a\left(z + \frac{R^2}{z}\right) = ax\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) + iay\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) = \phi + i\Psi$$



$$\phi = ax\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) = \text{const} = c_1$$

$$\Psi = ay\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) = \text{const} = c_2$$

$$w = \frac{dW}{dz} = a\left(1 - \frac{R}{z^2}\right) = a\left(1 - \frac{R}{r^2} e^{i2\varphi}\right)$$

$$= v_x - iv_y$$

$$\rightarrow v_x = a\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\varphi\right),$$

$$\rightarrow v_y = -a\frac{R^2}{r^2} \sin 2\varphi$$

Abb. 10.4:

Grund- + Dipolströmung

e) $W = \alpha \ln z$ (Strudel)

$$\alpha = a + ib$$

$$W = (a + ib)(\ln r + i\varphi) = a \ln r - b\varphi + i(b \ln r + a\varphi)$$

$$\phi = a \ln r - b\varphi, \quad \Psi = b \ln r + a\varphi$$

$$w = \frac{dW}{dz} = \frac{\alpha}{z} = \frac{(a + ib)}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$\rightarrow v_x = \frac{a \cos \varphi + b \sin \varphi}{r}, \quad v_y = \frac{a \sin \varphi - b \cos \varphi}{r}$$

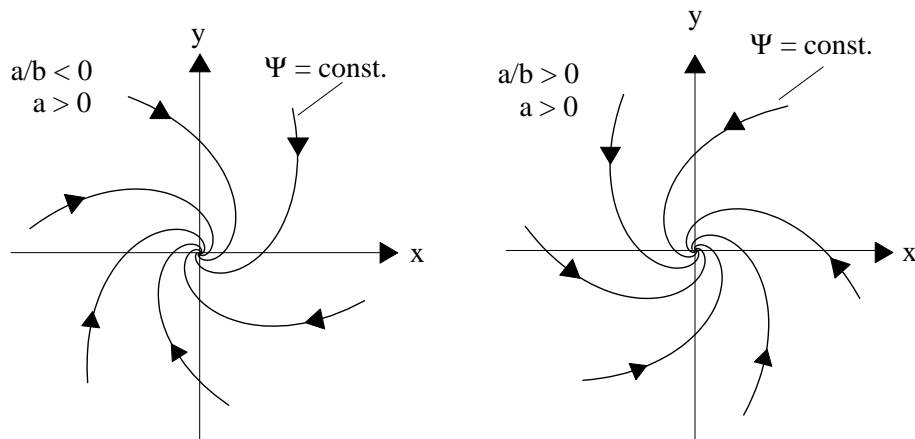
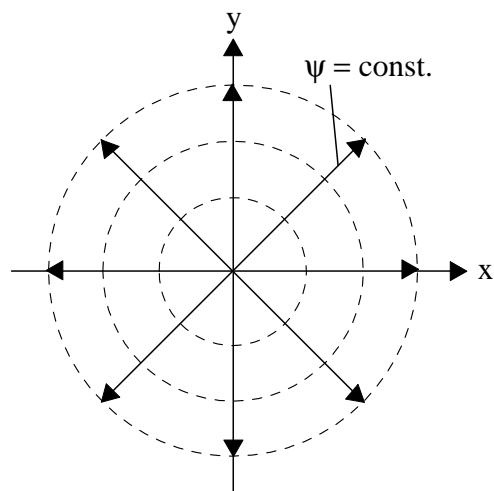


Abb. 10.5:
Strudelströmung

f) $W = \pm a \ln z$ (Quelle bzw. Senke)

$$a \text{ reell, } > 0$$

$$W = \pm a \ln z = \pm a \ln(re^{i\varphi}) = \pm a \ln r \pm ia\varphi = \phi + i\Psi$$



$$\phi = \pm a \ln r = \text{const.} = c_1$$

$$\Psi = \pm a\varphi = \text{const.} = c_2$$

$$w = \frac{dW}{dz} = \pm \frac{a}{z} = \pm \frac{a}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$= v_x - iv_y$$

$$\rightarrow v_x = \pm \frac{a \cos \varphi}{r} = \pm \frac{ax}{r^2}, \quad v_y = \pm \frac{a \sin \varphi}{r} = \pm \frac{ay}{r^2}$$

Abb. 10.6:

Quellströmung

g) $W = ib \ln z$ (Wirbelströmung)

b reell, > 0

$$W = ib \ln z = ib \ln r + iib\varphi = \phi + i\Psi$$

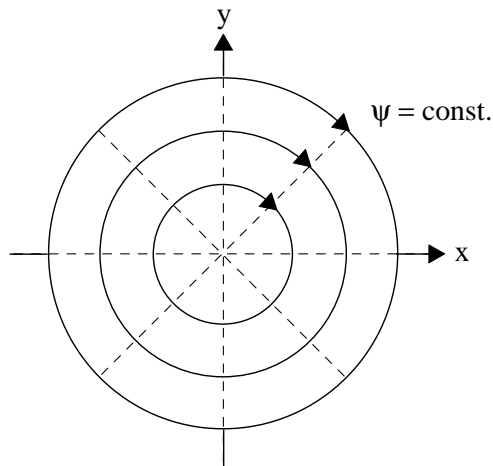


Abb. 10.7:
Wirbelströmung

$$\phi = -b\varphi = \text{const.} = c_1$$

$$\Psi = b \ln r = \text{const.} = c_2$$

$$w = \frac{dW}{dz} = \frac{ib}{z} = \frac{ib}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$= v_x - iv_y$$

$$\rightarrow v_x = \frac{b \sin \varphi}{r} = \frac{bx}{r^2}, \quad v_y = -\frac{b \cos \varphi}{r} = -\frac{by}{r^2}$$

Kapitel 11

Wirbelströmungen

Annahmen: $\eta = \eta' = 0$, $\vec{f}' = -\text{grad } U$

→ Wirbelströmung in einer idealen Flüssigkeit soll untersucht werden.

Euler'sche Gleichung:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = \vec{f}' - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad } U - \text{grad } P$$

Wirbelvektor

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \quad (11.1)$$

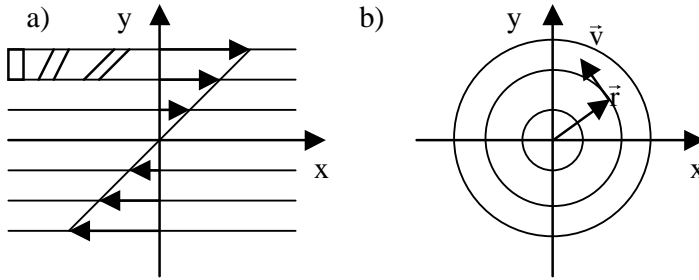
(Vektor der Drehgeschwindigkeit)

$\vec{w} \neq 0$ für Wirbelströmungen

Zirkulation

$$\Gamma = \int_{(A)} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (11.2)$$

Beispiele für Wirbelströmungen:

**Abb. 11.1:**

Zwei Wirbelströmungen:

- a) $\vec{v} = (\alpha y, 0, 0)$, $\alpha = \text{const.}$
 b) $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$,
 $\Omega = \text{const.}$

Wie ändert sich die Zirkulation zeitlich?

Wir betrachten eine geschlossene Kurve, die immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen bestehen soll.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{v} \cdot d\vec{v} \\ \oint \vec{v} \cdot d\vec{v} &= \oint \frac{d\vec{v}^2}{2} = 0 \\ \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} &= \int \text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot d\vec{A} \\ &= \int \text{rot} (-\text{grad } U - \text{grad } P) \cdot d\vec{A} = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{const.}} \quad \text{Thomson'scher Satz von der Erhaltung der Zirkulation} \quad (11.3)$$

Die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve (die immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht) ändert sich zeitlich nicht.

Helmholtz'sche Wirbelsätze:

1. Die Wirbelstärke eines Wirbelfadens ist **zeitlich** konstant. Wirbelfäden bestehen immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen.

Wirbelstärke:

$$\boxed{\int \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \text{const.}} \quad (11.4)$$

(Folgt auch aus Thomson'schem Satz mit

$$\int \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{2} \int \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{2} \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \Gamma = \text{const.})$$

2. Die Wirbelstärke eines Wirbelfadens ist **räumlich** konstant. Wirbelfäden können in der Flüssigkeit weder anfangen noch enden.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{w} = 0} \quad (11.5)$$

(folgt aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{div} (2\vec{w}) = 0$)

Beispiel für geschlossene Kurven:

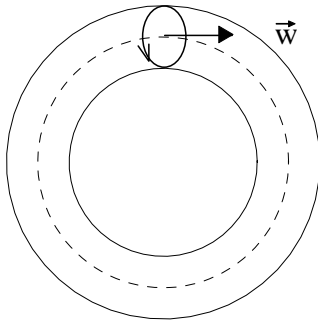


Abb. 11.2:
Rauchring

Beispiel: Wirbel im Fluss, sind geschlossen oder reichen bis an die Ränder der Flüssigkeit

Kapitel 12

Laminare Strömungen

12.1 Die Hagen-Poiseuille'sche Strömung

Annahmen:

Die Strömung sei

1. zäh $\eta, \eta' \neq 0$
2. inkompressibel, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (η' spielt keine Rolle)
3. kräftefrei $\vec{f}' = 0$
4. stationär $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strömung durch ein Rohr:

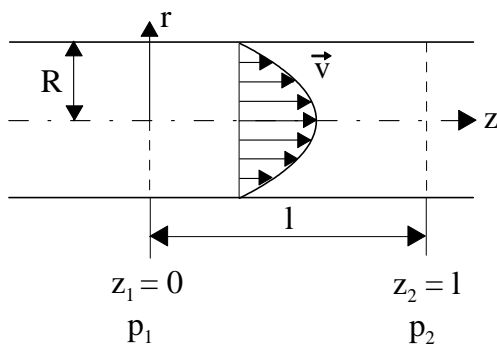


Abb. 12.1:
Strömung durch ein Rohr

Navier-Stokes'sche Gleichungen unter den obigen Annahmen:

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}} \quad (12.1)$$

Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} r = R \quad : \quad \vec{v} = 0 \text{ (Haftbedingung)} \\ z = z_1 = 0 \quad : \quad p = p_1 \\ z = z_2 = l \quad : \quad p = p_2 \end{array} \right\} \Delta p = p_1 - p_2$$

aus Symmetriegründen:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z \neq 0$$

wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 : \quad v_z = v_z(x, y) = v_z(r) \\ &\quad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 \\ (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} &= (v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_z = 0 \end{aligned}$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen haben daher die Gestalt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow p = p(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Die linke Seite der letzten Gleichung hängt nur von z ab, die rechte nur von r . Daher muss erfüllt sein:

$$\frac{dp}{dz} = \text{const.} = C = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Druck:

$$\boxed{p = Cz + C_1 = p_1 - \frac{\Delta p}{l} z}, \quad (12.2)$$

$$\text{weil aus den RB folgt: } C_1 = p_1, \quad C = -\frac{\Delta p}{l}.$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} r \frac{dv_z}{dr} &= \frac{C}{\eta} \frac{r^2}{2} + C_2 \\ v_z &= \frac{Cr^2}{4\eta} + C_2 \ln r + C_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_z = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)}, \quad (12.3)$$

weil aus den RB folgt: $C_2 = 0$ ($v_z(0)$ soll endlich sein); $C_3 = -\frac{CR^2}{4\eta}$.

Masse, die pro Zeit durch das Rohr strömt:

$$Q = \int_{(A)} \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_{(A)} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^R \rho 2\pi r v_z dr$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi \rho R^4 \Delta p}{8\eta l}} \quad (12.4)$$

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = Q/\rho A$:

$$\bar{v} = \frac{R^2 \Delta p}{8\eta l}$$

Spannungstensor in der Flüssigkeit:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + \eta'\delta_{ij} Sp \dot{\epsilon} \\ &= -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad \text{wegen } Sp \dot{\epsilon} = \text{div } \vec{v} = 0 \\ \sigma_{xx} &= -p \\ \sigma_{yy} &= -p \\ \sigma_{zz} &= -p \\ \sigma_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \sigma_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \sigma_{zr} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Schubspannung an der Rohrwand:

$$\sigma_{rz} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R = -\eta \cdot \frac{2\Delta p R}{4\eta l} = -\frac{\Delta p R}{2l}$$

Die auf die Rohrwand übertragene Tangentialkraft

$$F_t = -\sigma_{zr} \cdot A = \frac{\Delta p R}{2l} \cdot 2\pi R \cdot l = \pi R^2 \Delta p$$

ist im Gleichgewicht mit den Kräften, die die Flüssigkeit durch das Rohr drücken:

$$F_1 - F_2 = \pi R^2 \Delta p$$

12.2 Strömung eines Gases durch ein Rohr

Nach welchem Gesetz fällt der Druck in einem Rohr mit kreisförmigem Querschnitt ab, durch das ein Gas (Viskosität η) stationär und isotherm strömt? ($z = 0 : p = p_1, z = l : p = p_2$) Die Viskosität eines idealen Gases ist druckunabhängig. Für kleine Rohrabschnitte kann man $\rho = \text{const.}$ annehmen und die Durchflussmenge Q mit

$$Q = -\frac{\pi \rho R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz}$$

(Hagen-Poiseuille'sche Strömung) ansetzen.

Für große Rohrabschnitte ist $\rho(p)$ zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} p \cdot V &= \nu \mathfrak{R}T = \frac{m}{\mu} \mathfrak{R}T \\ \rightarrow p &= \rho \frac{\mathfrak{R}T}{\mu} \\ Q &= -\frac{\pi \mu R^4}{\mathfrak{R}T \cdot 8\eta} p \frac{dp}{dz} \end{aligned}$$

Wegen $\rho v A = \text{const.}$ (Kontinuitätsgleichung) bleibt Q konstant.

$$\int_{p_1}^{p_2} p dp = - \int_0^l \frac{Q \mathfrak{R}T \cdot 8\eta}{\pi \mu R^4} dz$$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi \mu R^4}{16 \mathfrak{R}T \eta l} [p_1^2 - p_2^2]} \quad (12.5)$$

12.3 Stokes'sches Widerstandsgesetz

Umströmung einer Kugel mit idealer Flüssigkeit:

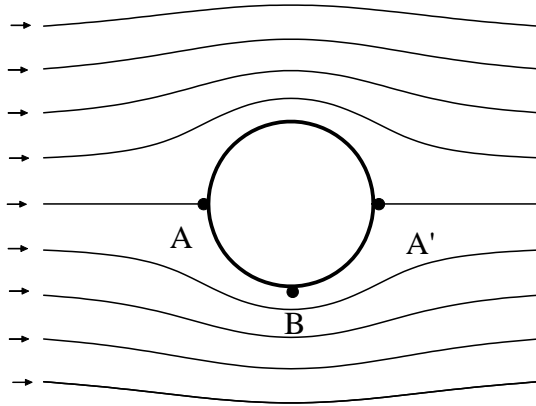


Abb. 12.2:
Umströmung einer Kugel
mit idealer Flüssigkeit
(Radius R)

$A, A' : v = 0$ (Staugebiete)

Wegen $\frac{\rho v^2}{2} + p = p_0$ nimmt der statische Druck von A nach B hin ab und dann wieder zu nach A' hin, wegen symmetrischer Druckverteilung keine resultierende Kraft auf die Kugel.

laminare Umströmung einer Kugel mit zäher Flüssigkeit:

Abschätzung der Widerstandskraft:

Annahme $\frac{dv}{dr} \approx \frac{v}{R}$ in Schicht der Dicke R um die Kugel steigt v von Null (Kugeloberfläche) auf den Wert der Umströmungsgeschwindigkeit v .

Bremsende Kraft, die an der Kugeloberfläche $4\pi R^2$ angreift:

$$F = \eta \frac{dv}{dr} A = 4\pi\eta v R$$

Die genaue Rechnung (Navier-Stokes-Gleichungen) ergibt

$$\boxed{F = 6\pi\eta v R} \quad (12.6)$$

Für größere Reynolds-Zahlen wird $F = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 = \frac{1}{2} c_w \rho \pi R^2 v^2$ (Newton'scher Strömungswiderstand, c_w : Widerstandsbeiwert)

12.4 geneigter Flüssigkeitsfilm

Annahmen:

Die Strömung sei

1. zäh, $\eta \neq 0$
2. inkompressibel, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (η' spielt keine Rolle)
3. stationär, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

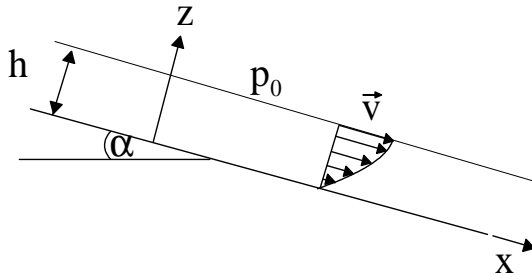


Abb. 12.3:
Rieselfilm

Navier-Stokes'sche Gleichungen:

$$(\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Ansatz:

$$\vec{v} = (v_x(z), 0, 0), p = p(z)$$

$$\vec{g} = (g \sin \alpha, 0, -g \cos \alpha)$$

$$(\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = v_x(z) \frac{\partial}{\partial x} v_x(z) \vec{e}_x = 0$$

$$0 = g \sin \alpha + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_x(z)$$

$$0 = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

(12.7)

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} z = h & : p = p_0, \quad \sigma_{xz} = \eta \frac{dv_x}{dz} = 0 \\ z = 0 & : v = 0 \end{aligned}$$

Druck:

$$p = -\rho g \cos \alpha z + c$$

$$\boxed{p = p_0 + \rho g \cos \alpha (h - z)} \quad (12.8)$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dz} &= -\frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha z + c_1 \\ v_x &= -\frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha z^2 + c_1 z + c_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_x = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha \cdot z(2h - z)} \quad (12.9)$$

Spannungstensor:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} &= \eta \frac{dv_x}{dz} = \rho g \sin \alpha \cdot (h - z) \end{aligned}$$

Eine auf der geneigten Fläche senkrecht stehende Flüssigkeitssäule der Querschnittsfläche A , Höhe h und Masse m bewirkt an der Fläche ($z = 0$) eine Normalkraft $F_N = -\sigma_{zz}A = pA = p_0A + mg \cos \alpha$ und Hangabtriebskraft $F_H = \sigma_{xz}A = mg \sin \alpha$.

Kapitel 13

Ähnlichkeitsgesetze

laminar: geordnete Bewegung benachbarter Flüssigkeitsteilchen

turbulent: Wirbelbildung, Strömung nur statistisch beschreibbar, Schwankungen um Mittelwerte: $v = v_0 + \Delta v, p = p_0 + \Delta p, \dots$, immer instationär

Beispiel:

1. Strömung durch ein Rohr: laminare Strömung möglich, bei bestimmten Strömungsparametern Umschlag in turbulente Strömung möglich
2. Windkanal: Umströmung von Modellen

Wann sind zwei Strömungen ähnlich?

Die Strömungsanordnungen seien

- a) geometrisch ähnlich
- b) genügen der gleichen Grundgleichung und werden durch die gleichen Lösungen beschrieben

Beispiel:

Navier-Stokes'sche Gleichung (stationär, kräftefrei, inkompressibel)

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Einführung dimensionsloser Größen (')

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_0 \vec{v}' \\ p &= p_0 p' \\ \eta &= \eta_0 \eta' \\ l &= l_0 l' \end{aligned}$$

v_o, p_o, η_o, l_o sind charakteristische Bezugsgrößen

$$\begin{aligned} \frac{v_o^2}{l_o} (\vec{v} \cdot \text{grad}') \vec{v} &= -\frac{p_o}{\rho_o l_o} \frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' + \frac{\eta_o v_o \eta'}{\rho_o l_o^2} \Delta' \vec{v} \\ (\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' &= -\frac{p_o}{\rho_o v_o^2} \frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' + \frac{\eta_o \eta'}{\rho_o l_o v_o} \Delta' \vec{v}' \\ &= -\frac{1}{2Eu^2} \frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' + \frac{\eta'}{\rho' Re} \Delta' \vec{v}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eu} = \frac{v_o}{\sqrt{2 \frac{p_o}{\rho_o}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho_o v_o^2}{p_o/l_o}} = \sqrt{\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Druckkraft}}} \\ &= \text{Euler - Zahl} \\ \text{Re} = \frac{\rho_o l_o v_o}{\eta_o} &= \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{\rho_o \frac{v_o^2}{l_o}}{\eta_o \frac{v_o}{l_o^2}} \\ &= \text{Reynolds - Zahl} \end{aligned}$$

Die angegebenen Kräfte sind auf das Volumen bezogen.

Weitere Kennzahlen:

$$\begin{aligned} Fr = \frac{v_o^2}{gl_o} &= \frac{\frac{\rho_o v_o^2}{l_o}}{\rho_o g} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}} \\ &= \text{Froude - Zahl} \\ St = \frac{v_o t_o}{l_o} &= \text{Strouhal - Zahl} \end{aligned}$$

Die Strouhal- Zahl wird für den Vergleich nichtstationärer Strömungen herangezogen. Zwei Strömungen sind ähnlich, wenn sie gleiche Kennzahlen haben und damit die gleiche Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (bei ähnlicher geometrischer Anordnung und ähnlichen Randbedingungen).

Kapitel 14

Turbulente Strömungen

Reynolds-Zahl:

Sie beschreibt das Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft.

kleine Re-Zahlen \rightarrow laminare Strömungen

große Re-Zahlen \rightarrow turbulente Strömungen

Strömung durch Rohr:

$$\text{Re}_{\text{krit}} \approx \frac{\rho_0 l_0 v_0}{\eta_0} \approx 2000$$

(l_0 Rohrdurchmesser, $v_0 = \bar{v}$ = mittlere Geschwindigkeit)

bei vorsichtigem Einlauf unter Vermeidung von Wirbelbildungen möglich $\text{Re}_{\text{krit}} = 40.000$

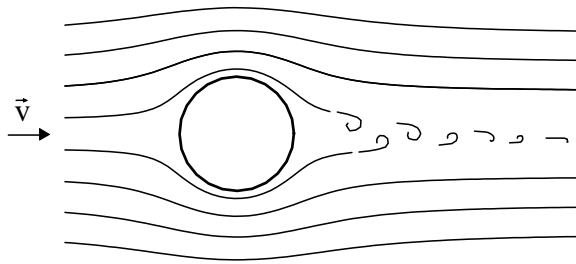
Beispiele laminarer und turbulenter Strömungen (s. Gerthsen)

	v_0 m/s	l_0 m	ρ_0 g/cm^3	η Ns/m^2	Re
Bach	1...10	1	1	0,001	$10^6 \dots 10^7$
Wasserleitung	0,1 ...1	0,1	1	0,001	$10^3 \dots 10^4$
Aorta	0,1	0,015	1	0,008	200
Atemwege	15	0,01	0,0013	$2 \cdot 10^{-5}$	10^4

Regentropfen: Luftwiderstand $6\pi\eta r v$ für $r < 0,1$ mm , kleine Re

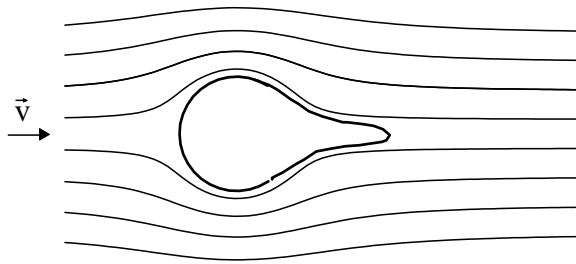
Luftwiderstand $\pi r^2 v^2 \rho_L$ für $r > 0,1$ mm, große Re

Beispiele turbulenter Strömungen umströmter Körper:

**Abb. 14.1:**

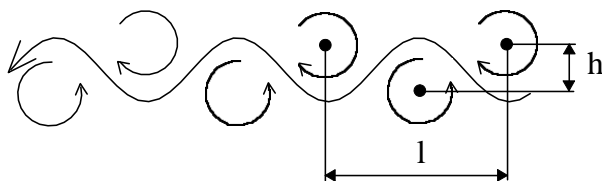
Umströmung eines Körpers,
laminarer Totbereich mit Wirbelbildung

Stromlinienprofil verhindert Wirbelbildung:

**Abb. 14.2:**

Körper mit Stromlinienprofil:
Die Ausbildung von Wirbeln
wird verhindert

Karmán'sche Wirbelstraße:

**Abb. 14.3:**

Karmán'sche Wirbelstrasse
 $\frac{h}{l} = 0,283$

Beispiel:
Flattern von Fahnen

Grenzschichttheorie

Aufgabe:

Berechnung des Widerstandes, den ein Körper (z.B. Auto) der Umströmung durch ein Fluid entgegensetzt. In einfachen Fällen mit Navier-Stokes-Gleichungen lösbar:

Beispiel: Hagen-Poiseuille'sche Strömung:

Berechnung $v(r)$; $\tau \sim \frac{dv}{dr}$ auf Wand übertragene Kraft.

prinzipiell RW-problem mathematisch kompliziert

neue Lösungsansätze:

Prandtl (1904) Grenzschichttheorie

Grundgedanke:

Umströmung eines Körpers aufteilbar in

- Strömung in schmaler Schicht (Grenzschicht) um den Körper und im Nachlauf (Navier-Stokes-Gleichungen)
- Potentialströmung im übrigen Strömungsfeld ($\Delta\phi = 0$ zu lösen)
- Die Grenzschichtströmung muss stetig an die Potentialströmung angeschlossen werden.

Prandtl-Grenzschicht

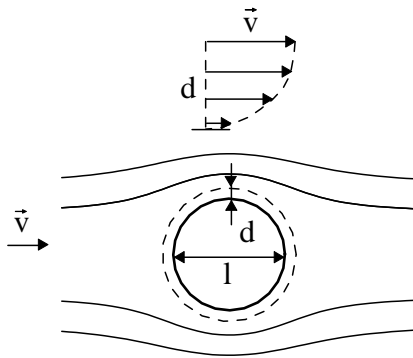


Abb. 14.4:

Grenzschicht an umströmtem Körper

$$(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = \frac{\eta}{\rho} \Delta\vec{v}$$

$$\frac{v^2}{l} \sim \frac{\eta v}{\rho d^2}$$

$$\rightarrow d \sim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v}}$$

Auf die umströmte Oberfläche A wirkt die Reibungskraft: $F_R = \eta A \frac{v}{d}$.

Der Körper wird um die eigene Länge l gegen die Strömung verschoben:

$$W_R = F_R \cdot l = \eta \frac{A v l}{d}$$

Mit Hilfe dieser Energie wird eine neue Grenzschicht aufgebaut mit der Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^d A \rho dz \left(\frac{vz}{d} \right)^2 = \frac{1}{6} A \rho v^2 d$$

Aus $W_R = W_{kin}$ folgt:

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{6\eta l}{\rho v}} = \sqrt{\frac{6\eta l^2}{\rho l v}} = \sqrt{\frac{6}{Re}} l} \quad (14.1)$$

wenn $Re \gg 1$; $d \ll l$. Andernfalls ist die ganze Strömung laminar, d.h. der Begriff der Grenzschicht überflüssig.

Kapitel 15

Wellen in Flüssigkeiten und Gasen

15.1 Oberflächenwellen: Schwerewellen

a) große Flüssigkeitstiefe:

Die freie Oberfläche der weit ausgedehnten, sehr tiefen, inkompressiblen Flüssigkeit ist im Gleichgewicht eben. Eine Störung (Wind, Erschütterung) bewirkt eine Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, die sich als Welle im wesentlichen im Oberflächenbereich fortbewegt und durch die Wirkung des Erdschwerefeldes hervorgerufen wird.

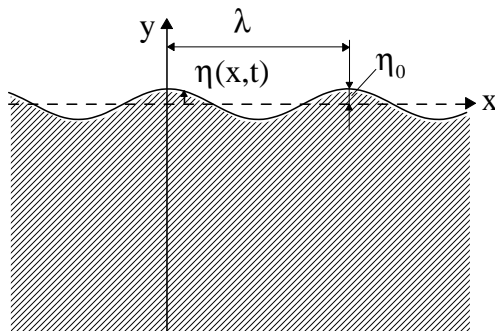


Abb. 15.1:

Oberflächenwellen einer tiefen Flüssigkeit

$$\text{RB: } \eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$k\eta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\eta_0 \ll 1$$

Mit dem Ansatz $\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{v} = 0$ ergibt sich die Strömung als Potentialströmung mit $\vec{v} = \text{grad } \Phi$, wir suchen Lösungen der ebenen Potentialgleichung $\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ in Form einer in x- Richtung fortschreitenden Welle, die in (-y)- Richtung mit wachsender Tiefe mit ihrer Amplitude abklingt.

Ansatz:

$$\boxed{W = Ae^{-ikz} \quad \text{mit } A = A_0 e^{i\omega t}} \quad (15.1)$$

Mit $z = x + iy$ ergibt sich

$$W = A_0 e^{ky} \cos(kx - \omega t) - iA_0 e^{ky} \sin(kx - \omega t) = \Phi + i\Psi$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -A_0 k e^{ky} \sin(kx - \omega t)$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = A_0 k e^{ky} \cos(kx - \omega t)$$

Die Geschwindigkeit nimmt nach unten exponentiell ab. Randbedingungen:

Die Druckgleichung ist

$$\text{grad}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho_0}\right) = 0$$

Wegen $\vec{f}' = -g\vec{e}_y$ ist $U = gy$.

An der Flüssigkeitsoberfläche gilt $p = p_0$ (äusserer Luftdruck). Daher ist der Ausdruck

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = c(t)$$

räumlich konstant an der Flüssigkeitsoberfläche ($y = \eta$), kann aber noch zeitlich veränderlich sein.

$$\rightarrow A_0 \omega e^{k\eta} \sin(kx - \omega t) = -g\eta + c(t)$$

$$\rightarrow \eta = \frac{-A_0 \omega e^{k\eta}}{g} \sin(kx - \omega t) + \frac{c(t)}{g}$$

Wegen der geforderten Randbedingung $\eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$ an der Oberfläche folgt $c(t) = 0$ und mit $|k\eta| \ll 1$

$$\boxed{\eta_0 = -\frac{A_0 \omega}{g}} \quad (15.2)$$

Außerdem muss die Bewegung der Oberfläche mit der Bewegung der gerade an der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsteilchen übereinstimmen:

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

und es ergibt sich für $y = \eta$ mit Berücksichtigung von $|k\eta| \ll 1$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-\omega^2 + gk) \Phi = 0$$

Der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz ω und Wellenlänge λ ist daher

$$\boxed{\omega = \sqrt{gk} = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}}} \quad (15.3)$$

und die Phasengeschwindigkeit der Welle ist

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (15.4)$$

weil sich ein konstanter Phasenwinkel $\alpha = kx - \omega t = \text{const.}$ mit der Geschwindigkeit $d\alpha/dt = k dx/dt - \omega = 0$ bewegt.

Schlußfolgerungen:

- Die Phasengeschwindigkeit ist unabhängig von der Natur der Flüssigkeit.
- Dispersion: Lange Wellen schreiten schneller fort als kurze Wellen.

Bahnkurven der Flüssigkeitsteilchen:

Die Koordinaten eines sich bewegenden Flüssigkeitsteilchens seien

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta,$$

wobei x_0, y_0 Gleichgewichtslagen der ruhenden Flüssigkeit sind, um die die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen erfolgt. η hat hier eine andere Bedeutung als oben, wo η einem Ort an der Flüssigkeitsoberfläche entsprach.

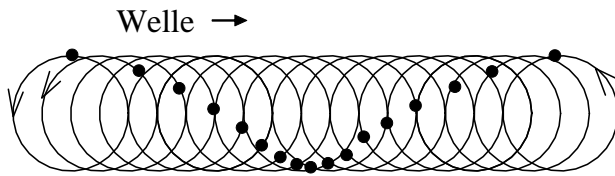
Mit $d\xi = v_x dt$ und $d\eta = v_y dt$ ergibt sich unter Berücksichtigung von $|\lambda\xi| \ll 1$, $|\lambda\eta| \ll 1$ nach Integration

$$\begin{aligned} \xi &= -A_0 \frac{k}{\omega} e^{ky_0} \cos(kx_0 - \omega t) \\ \eta &= -A_0 \frac{k}{\omega} e^{ky_0} \sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned}$$

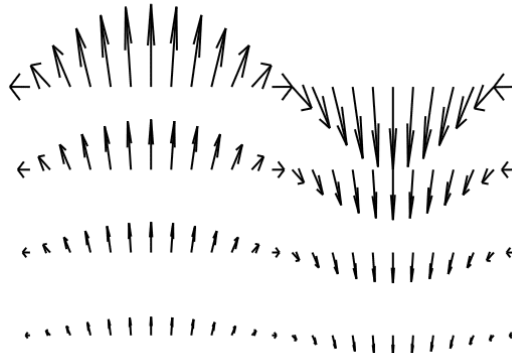
Die Integrationskonstanten wurden wegen der Periodizität der Bewegungen Null gesetzt. Aus den beiden Gleichungen erhält man

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(A_0 \frac{k}{\omega} e^{ky_0}\right)^2$$

Die Flüssigkeitsteilchen beschreiben Kreise mit dem Radius $\left|A_0 \frac{k}{\omega} e^{ky_0}\right|$ um die Punkte x_0, y_0 . Der Radius nimmt zur Tiefe hin exponentiell ab, an der Oberfläche entspricht dieser Radius der Amplitude η_0 .

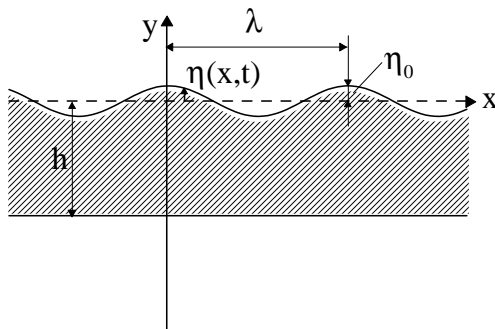
**Abb. 15.2:**

Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche auf Kreisbahnen

**Abb. 15.3:**

Vektordiagramm für die Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y)$

b) endliche Flüssigkeitstiefe h:

**Abb. 15.4:**

Oberflächenwellen einer flachen Flüssigkeit

Randbedingungen:

Oberfläche: $\eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$

$y = -h$: $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$

Ansatz:

$$\boxed{W = Ae^{-ikz} + Be^{ikz} \quad \text{mit} \quad A = A_0 e^{i\omega t}, \quad B = B_0 e^{-i\omega t}} \quad (15.5)$$

Die Randbedingung $v_y = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=-h} = 0$ wird erfüllt mit $A_0 = (C_0/2)e^{kh}$ und $B_0 = (C_0/2)e^{-kh}$. Daher ergibt sich

$$W = \Phi + i\Psi = C_0 \cosh(ky + kh) \cos(kx - \omega t) - iC_0 \sinh(ky + kh) \sin(kx - \omega t)$$

und die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -C_0 k \cosh(ky + kh) \sin(kx - \omega t)$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = C_0 k \sinh(ky + kh) \cos(kx - \omega t)$$

Die Druckgleichung fordert für die Oberfläche:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = c(t).$$

$$\rightarrow \eta = \frac{C_0 \omega}{g} \cosh(k\eta + kh) \sin(kx - \omega t) + c(t),$$

woraus mit der Randbedingung $\eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$ an der Oberfläche $c(t) = 0$ folgt und mit $|k\eta| \ll 1$

$$\boxed{\eta_0 = \frac{C_0 \omega}{g} \cosh(kh)}. \quad (15.6)$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

folgt

$$\boxed{\omega = \sqrt{g k \tanh(kh)}} \quad (15.7)$$

und die Phasengeschwindigkeit wird zu

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}}. \quad (15.8)$$

kleine Flüssigkeitstiefen:

Die Kreisbewegungen der Flüssigkeitsteilchen flachen mit wachsender Tiefe zu Ellipsen ab, am Grunde entarten die Kreise zu Geradenabschnitten, weil nur horizontale Bewegungen möglich sind.

Für $kh \ll 1$ ($h \ll \lambda/2\pi$) wird

$$\boxed{\omega = k\sqrt{hg}}. \quad (15.9)$$

und die Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{hg}. \quad (15.10)$$

Das bedeutet, daß für kleine Wassertiefen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen unabhängig von der Wellenlänge ist. Seichtwasserwellen haben keine Dispersion. Tsunamis des Pazifik (30 m Höhe).

15.2 Oberflächenwellen: Kapillarwellen

Wellen sehr kurzer Wellenlängen ("ripples, Kräuselwellen"), für die der Kapillardruck $p = \sigma/r$, σ : Oberflächenspannung, r : Oberflächenkrümmungsradius, eine wesentliche Rolle spielt.

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (15.11)$$

15.3 Schallwellen

Im Folgenden wird die Schallausbreitung in ruhenden Flüssigkeiten und Gasen untersucht. Annahme: Schallwellen haben nur kleine Amplituden der Druck- und Dichteschwankungen um die Gleichgewichtswerte. Das ermöglicht die Linearisierung der Euler'schen und der Kontinuitätsgleichung.

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v' \quad \text{mit } v_0 = 0 \\ p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \\ \vec{f}' &= 0 \end{aligned}$$

p_0 und ρ_0 sind Gleichgewichtswerte, v' , p' und ρ' sind kleine Größen.

Aus der Euler'schen Gleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

wird

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p' \quad (15.12)$$

und aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

wird

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0} \quad (15.13)$$

Der Druck lässt sich in Nähe des Gleichgewichtswertes p_0 darstellen als

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' + \dots = p_0 + p'$$

mit $p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' = c^2 \rho'$.

Aus den Gleichungen (12) und (13) ergeben sich mit

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \Delta \rho', \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'} \quad (15.14)$$

Wellengleichungen, die die Ausbreitung der Dichte- und Druckschwankungen beschreiben. Die Schallgeschwindigkeit c ergibt sich für ein ideales Gas folgendermaßen: Für einen adiabatischen Vorgang ist

$$p = \rho^\gamma \cdot \text{const.} = \rho^\gamma \cdot \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \rho^{\gamma-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \approx \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

→

$$\boxed{c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}} \quad (15.15)$$

wegen $p = \frac{\rho RT}{\mu}$

Die Schallwelle ist longitudinal wegen $\operatorname{rot} p' = 0$.

Kapitel 16

Sickerströmungen

Problem: Strömung durch **poröse** bzw. klüftige **Medien**

v_F : **Filtergeschwindigkeit**
definiert durch $v_F = Q/A\rho$
(Flüssigkeitsmenge, die durch eine Fläche A pro Zeit durchtritt)
 v_F gemittelte Geschwindigkeit, die tatsächliche Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen weicht davon ab (meist größer).
experimenteller Befund:

$$\boxed{\vec{v}_F = -\frac{\alpha}{\eta} \text{grad } p} \quad (16.1)$$

Darcy'sches Filtergesetz

(Darcy, Henry, 1803-1858) α : Permeabilität, Durchlässigkeit, in Darcy gemessen
1 Darcy = $0.9862 \cdot 10^{-12} m^2$, keine SI- Einheit
Beispiele: Kalkstein 0.2 Darcy, Ziegel 0.002 Darcy, Zement 10^{-7} Darcy

Hinweis: für laminare Strömung (kleine Re-Zahl) durch ein Rohr
(Hagen-Poiseuille'sche) Strömung gilt auch $\bar{v} \sim -\text{grad } p$.

Wegen $\text{div } \vec{v}_F = 0$ (inkompressible Strömung) ergibt sich mit $\alpha = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$:

$$\boxed{\Delta p = 0} \quad (16.2)$$

Anwendung der Methoden für Potentialströmungsprobleme:

Vergleich (für $\alpha, \eta = \text{const.}$):

Sickerströmung	Potentialströmung
$\vec{v}_F = -\frac{\alpha}{\eta} \text{grad } p$	$\vec{v} = \text{grad } \phi$
$\text{div } \vec{v}_F = 0$	$\text{div } \vec{v} = 0$
$\Delta p = 0$	$\Delta \phi = 0$

Randbedingungen:

- Normalkomponente von \vec{v}_F verschwindet an undurchlässigen Wänden
- \vec{v}_F ist endlich

Anwendungen:

Strömung von Flüssigkeiten, wie Erdöl, Wasser in unterirdischen Speichern, Brunnen

Bsp.: Wasserbrunnen

Ein Wasserspeicher (Permeabilität α) befindet sich unterhalb einer wasserundurchlässigen Schicht ($\alpha = 0$). Der Druck im Wasserspeicher soll $p = p_0$ an der Grenzfläche der beiden Medien bei $z = 0$ sein, so dass sich in der Bohrung eine Wassersäule der Höhe $h_0 = \frac{p_0}{\rho g}$ befindet. Der äußere Luftdruck werde vernachlässigt. Die ansonsten zylindrische Bohrung habe an ihrem unteren Ende die Form einer Halbkugelfläche mit dem Radius R , $R \ll h_0$ und $R \ll h$ kann angenommen werden. In der permeablen Schicht ($z < 0$) wird sich ein hydrostatischer Druck $p_s = \rho g(z + h_0)$ einstellen, der aber keine Strömung bewirkt und im weiteren außer Acht gelassen werden kann.

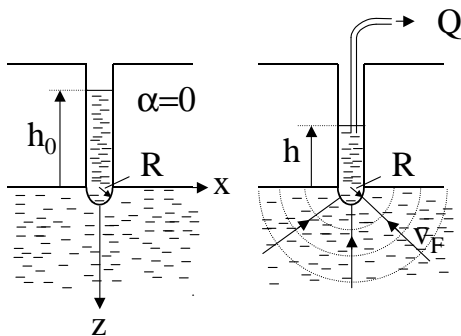


Abb. 16.1:

Kontinuierliche Wasserentnahme aus einem Wasserbrunnen

Über ein Rohr, das bis zur Höhe h über der Grenzfläche $z = 0$ in den Brunnen eintaucht, wird die Flüssigkeitsmenge Q (gemessen in kg/s) unter stationären Verhältnissen abgepumpt. Im permeablen Medium bildet sich ein Druckgefälle heraus, das den Nachschub des Wassers gewährleistet. Die entsprechende Druckverteilung muss der Gleichung $\Delta p = 0$ genügen. Ein Ansatz, der auch der Symmetrie des Problems gerecht wird, ist

$$p = -\frac{c}{r}. \quad (16.3)$$

Die Filtergeschwindigkeit ergibt sich wegen $\vec{v}_F = -\frac{\alpha}{\eta} \text{grad} p$ zu

$$v_F = -\frac{\alpha}{\eta} \frac{dp}{dr} = -\frac{\alpha}{\eta} \frac{c}{r^2}. \quad (16.4)$$

Die Äquipotentialflächen $p = \text{const.}$ sind Halbkugelflächen und die "Stromlinien" sind radial verlaufende Geraden. Die über die Halbkugelflächen strömende Wassermenge $\rho \cdot v_F \cdot 2\pi r^2 = Q$ ist konstant.

Für $r = R$ gilt $Q = -\rho v_F 2\pi R^2$. (Das Minuszeichen berücksichtigt, dass \vec{v}_F zum Punkt $(0,0,0)$ gerichtet ist). Daher ist $c = Q\eta/(2\pi\rho\alpha)$.

Der Wasserstand h in der Bohrung ergibt sich aus dem Druck

$$p = -\frac{c}{R} + \rho gh_0 = \rho gh \quad (16.5)$$

am Grund der Bohrung.

Für $v_F = 0$ ($c = 0$) ist der Druck p mit dem hydrostatischen Druck ρgh_0 im Gleichgewicht. Bei Höhe h des Absaugrohrendes über der Grenzfläche $z = 0$ lässt sich maximal die Flüssigkeitsmenge

$$Q = \frac{(h_0 - h) \cdot 2\pi R \rho^2 g \alpha}{\eta} \quad (16.6)$$

abpumpen.

Kapitel 17

Rheologische Gleichungen

Reale Stoffe verhalten sich oft weder rein elastisch noch wie eine zähe Flüssigkeit. Ihr Materialverhalten wird durch rheologische Gleichungen beschrieben, die die Deformation und das Fließen unter dem Einfluss von Kräften berücksichtigen. In viele Modelle gehen Eigenschaften sowohl des sogenannten Hooke'schen Körpers (rein elastische Deformation) als auch des sogenannten Newton'schen Körpers (rein zähes Fließen) für das Materialverhalten ein. Der Einfachheit halber beschränken sich die folgenden Ausführungen auf den eindimensionalen Fall.

a) Hooke'scher Körper:

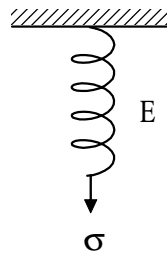


Abb. 17.1:
Hooke'scher Körper

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx} = \frac{\Delta l}{l}$$

b) Newton'scher Körper:

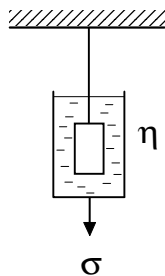


Abb. 17.2:
Newton'scher Körper

$$\boxed{\sigma = \eta \dot{\varepsilon}} \quad (2)$$

- c) Kelvin'scher Körper:
(Addition der Spannungen für einen Hooke'schen und einen Newton'schen Körper)

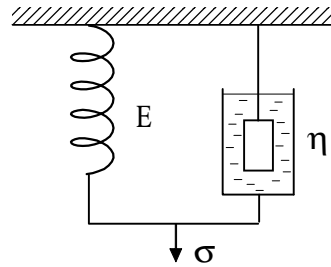


Abb. 17.3:
Kelvin'scher Körper

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3)$$

Lösung der Differentialgleichung (3) mit der Anfangsbedingung $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$. Die angelegte Spannung soll konstant sein: $\sigma = \sigma_0$

$$\varepsilon + \frac{\eta}{E}\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}$$

Mit dem Ansatz $\varepsilon = ae^{-\lambda t}$ ergibt sich die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zu

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau}) + \varepsilon_0 e^{-t/\tau} \quad (4)$$

mit der Zeitkonstanten $\tau = \eta/E$. Die Lösungen $\varepsilon(t)$ streben für $t \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert $\varepsilon = \sigma_0/E$.

- d) Maxwell'scher Körper:
(Addition der Deformationen eines Hooke'schen und eines Newton'schen Körpers)

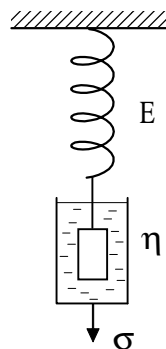


Abb. 17.4:
Maxwell'scher Körper

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (5)$$

Periodische Beanspruchung des Maxwell'schen Körpers mit $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$:
Aus Gl. (5) ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta i \omega} (1 + i\omega\tau) e^{i\omega t} \quad (6)$$

Der Körper verhält sich für große Frequenzen ($\omega\tau \gg 1$) wie ein Hooke'scher Körper ($\sigma = E\varepsilon$) und für kleine Frequenzen ($\omega\tau \ll 1$) wie ein Newton'scher Körper.