Aufgabe 1: Vektor- und Komponentenschreibweise

Übersetzen Sie in die andere Schreibweise:

$$
\begin{array}{rclrclc}
\vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}} & = & \vec{\vec{c}}; & \vec{\vec{b}} \cdot \vec{\vec{a}} & = & \vec{\vec{c}}; & a_i b_k a_i c_k = d; \\
(\vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}})^T & = & \vec{\vec{c}}; & (\vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}} \cdot \vec{\vec{c}})^T & = & \vec{\vec{d}}; & \\
\vec{a} \times \vec{b} & = & \vec{c} & & & &
\end{array}
$$

Aufgabe 2: Rechnen mit Tensoren

Berechnen Sie!

$$
a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \qquad v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

$$
v_i b_{ij}, \quad v_i b_{ji}, \quad v_i a_{ij}, \quad v_i a_{ji}, \quad a_{ij} b_{jk}, \quad a_{ij} b_{kj}, \quad a_{ji} b_{jk}, \quad b_{ij} a_{jk}, \quad b_{ij} a_{kj},
$$

$$
v_i v_j, \quad v_i a_{jk}, \quad v_i a_{kj}, \quad v_i b_{jk}, \quad -v_i \epsilon_{ijk}(v_l a_{lk}), \quad v_j \epsilon_{ijk}(v_l a_{lk})
$$

Aufgabe 3: Basistransformationen für beliebige Basen im $\mathbb{R}^3$

Für den Basiswechel von Σ' nach Σ sind die Transformationsmatrizen a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} gegeben. Σ sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den gewöhnlichen Basisvektoren $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ und $\vec{e_3} = (0,0,1)$.

Wie stellen sich die im System Σ gegebenen Koordinaten x_i bei der Rücktransformation nach Σ' dar? Geben Sie jeweils die entsprechenden Basisvektoren von Σ' sowie die Transformationsmatrix an!

$$
a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad b_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 4: Invarianzen

Geben Sie Spur und Determinante an!

$$
a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};
$$

$$
d_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad e_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}
$$