Aufgabe 1

Wie ist das Flächenträgheitsmoment für einen Quader mit rechteckiger Deckfläche definiert (kartesische Koordinaten)? Wie für einen Zylinder (Zylinderkoordinaten)? Skizzieren und beschriften sie das jeweilige Problem. Der Rechenausdruck genügt. ZA: Rechnen Sie den Ausdruck zuende.

Aufgabe 2

Welche Eigenschaften besitzen

- $\vec{s}_l$
- $\vec{s}_t$

Welche Aussage können sie über die Ausbreitungsgeschwindigkeit von longitudinalen und transversalen Wellen treffen (mit Formeln)? Wie werden sie deshalb jeweils auch genannt?

Aufgabe 3

Wie lautet die Bewegungsgleichung des isotrop elastischen Körpers? Wie lautet die Wellengleichung für den isotrop elastichen Körper? Ist die Gleichung

$$\vec{s} = (A_0 \cos(\vec{x} \cdot \vec{r} - \omega t), A_1, A_2), r_i \in \Re$$

Lösung obiger Wellengleichung?

Aufgabe 4

$\vec{s}_l = \vec{A}_l e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$
$\vec{s}_t = \vec{A}_t e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

- Zeigen sie, dass für $\vec{A}_l \| \vec{k}$ $\vec{s}_l$ wirbelfrei ist.
- Zeigen sie, dass für $\vec{A}_t \perp \vec{k}$ $\vec{s}_t$ quellenfrei ist.

Aufgabe 5

Wovon ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in elastisch isotropen Medien abhängig? Ordnen Sie aufsteigend die Ausbreitungsgeschwindigkeiten longitudinaler Wellen

- im Stab, einer Platte und im unbegrenzten Medium
- in Erde, Holz, Stahl, Wasser, Luft

Aufgabe 6

Stellen sie das Hooke'sche Gesetz für die Refelxion an der Grenzfläche Medium-Vakuum unter Beachtung der Randbedingungen auf. Wie lautet der Ausdruck für $\vec{s}_l$ (In Vektorschreibweise)? Beschreiben sie rezeptartig, wie sie die Reflexionskoeffizienten bestimmen würden. Fertigen sie dazu eine Skizze zu der Fragestellung an und beschriften sie diese.

Anhang

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f(r) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r} \\
\vec{\nabla}(\psi\varphi) &= \psi\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\psi \\
\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \\
\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) &= \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi \\
\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \\
\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) &= \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ \varphi) = \Delta\varphi \\
\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) &= \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\ \vec{A}) = 0 \\
\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) &= \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ \varphi) = 0 \\
\vec{\nabla}\times\varphi\vec{A} &= \varphi\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{\nabla}\varphi \\
\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \\
\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) &= \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\ \vec{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\ \vec{A}) - \Delta\vec{A}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

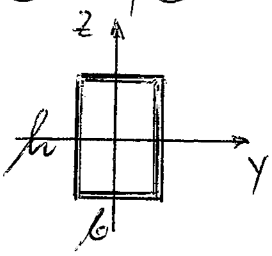
Wie ist Deformations- und Rotationstensor definiert? Was bewirkt folgender Verschiebungstensor? Wofür steht der Parameter β?

$$a_{ij} = \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Testat 2/2

Aufgabe 1 Flächenträgheitsmoment

- Rechteckquerschnitt:

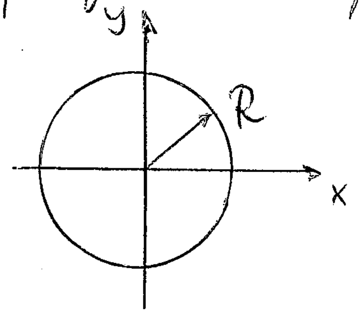


$$I = \int z^2 dA = \int z^2 dy\, dz$$

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dy\, dz = \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24}\right)$$

$$\underline{\underline{I = \frac{b \cdot h^3}{12}}}$$

- kreisförmige Querschnittsfläche:



$$I = \int y^2 dA \underset{\varphi}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cdot \sin\varphi)^2 \cdot r \, d\varphi \, dr$$

Übergang zu Kreiskoordinaten

$$I = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \underline{\underline{\frac{R^4}{4} \cdot \pi}}$$

Aufgabe 2

Eigenschaften von

$\vec{s}_\ell$	$\vec{s}_t$
• $\mathrm{rot}\, \vec{s}_\ell = 0 \Rightarrow \vec{k}_\ell \parallel \vec{A}_\ell$	• $\mathrm{div}\, \vec{s}_t = 0 \Rightarrow \vec{k}_t \perp \vec{A}_t$
$\mathrm{div}\, \vec{s}_\ell \neq 0$	$\mathrm{rot}\, \vec{s}_t \neq 0$
• nur Volumenänderungen (relative)	• keine Volumenänderungen (relative)
• Kompressionswelle	• Scherwelle
Primärwelle (p-Welle)	Sekundärwelle (s-Welle)
$c_\ell = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$	$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

$$c_\ell > c_t$$

Aufgabe 3

- Bewegungsgleichung: isotrop elastischer Körper

$$\rho \ddot{s}_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad (1)$$

- Wellengleichung: isotrop elastischer Körper

mit $f_i = 0$ $\qquad \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \, Sp\,\tilde{\varepsilon}$

$$\rho \ddot{\vec{s}} = \mu \Delta \vec{s} + (\mu + \lambda) \text{ grad div } \vec{s} \qquad (2)$$

Definition: Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad ; \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{s}} = c_t^2 \Delta \vec{s} + (c_l^2 - c_t^2) \text{ grad div } \vec{s} \qquad (3)$$

- gegebene Verschiebung $\vec{s}$:

$$\vec{s} = (A_0 \cos(\vec{\varkappa}\vec{r} - \omega t), A_1, A_2) \qquad r_i \in \mathbb{R}$$

$\vec{\varkappa}$ ... Ausbreitungsvektor

$$\Rightarrow s_{x_1} = (A_0 \cos(\varkappa \cdot x_1 - \omega t))$$

① $\dot{\vec{s}} = (\omega \cdot A_0 \cdot \sin(\varkappa \cdot x_1 - \omega t), 0, 0)$

$$\ddot{\vec{s}} = (-\omega^2 \cdot A_0 \cdot \cos(\varkappa \cdot x_1 - \omega t), 0, 0)$$

② $\Delta \vec{s} = \text{grad div } \vec{s} - \text{rot rot } \vec{s}$

$\text{rot } \vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{s} = \text{grad div } \vec{s}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{s}}_l = c_l^2 \text{ grad div } \vec{s}_l \qquad (4)$$

$$\text{div } \vec{s} = \left(\frac{\partial s_{x_1}}{\partial x_1} + \cancel{\frac{\partial s_{x_2}}{\partial x_2}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial s_{x_3}}{\partial x_3}}^{\,0} \right) = -\varkappa \cdot A_0 \sin(\varkappa \cdot x_1 - \omega t)$$

$$\text{grad div } \vec{s} = (-\varkappa^2 A_0 \cos(\varkappa \cdot x_1 - \omega t), 0, 0)$$

Einsetzen in (4) liefert:

$$\ddot{\vec{s}} = c_e^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s}$$

$$-\omega^2 \cdot \vec{s} = c_e^2 (-x^2) \cdot \vec{s}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = c_e \cdot x}}$$

d. h. $\vec{s}$ genügt der Wellengleichung

Aufgabe 4

a) $\underline{\vec{s}_e = \vec{A}_e e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}$

$$\operatorname{rot} \vec{s}_e = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{s}_e = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}_e e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \varphi \vec{A} = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} \cdot \varphi}$$

$$\Rightarrow e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}_e}_{\operatorname{rot} \vec{A}_e = 0} - \vec{A}_e \times \vec{\nabla}\left(e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right) = \operatorname{grad} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = e^{-i\omega t}\left(i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{s}_e = e^{-i\omega t} \cdot i \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot \underline{\vec{k} \times \vec{A}_e = 0 \quad \text{für } \vec{k} \parallel \vec{A}_e}$$

b) $\underline{\vec{s}_t = \vec{A}_t e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}$

$$\operatorname{div} \vec{s}_t = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{s}_t = \vec{\nabla}\left(\vec{A}_t e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \cdot \varphi}$$

$$\Rightarrow e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_t}_{\operatorname{div} \vec{A}_t = 0} + \vec{A}_t \cdot \vec{\nabla}\left(e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{s}_t = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\cdot i\cdot\vec{k}\cdot\vec{A}_t = 0 \quad \text{für } \vec{k}\perp\vec{A}_t$$

Aufgabe 5

- Ausbreitungsgeschwindigkeit von elastischen Konstanten μ und λ sowie der Dichte ρ abhängig.
  Die Geometrie (Randbedingungen) muss ebenfalls berücksichtigt werden.
- Ausbreitungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen aufsteigend sortiert:

a) Stab, Platte, unbegrenztes Medium

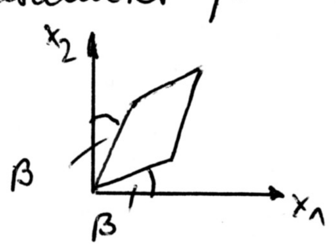
b) Luft, Wasser, Holz, Stahl, Erde
$0.34\,\frac{km}{s}$ $1.45\,\frac{km}{s}$ ca. $3\,\frac{km}{s}$ ca. $6\,\frac{km}{s}$ $5.8-13.7\,\frac{km}{s}$

! Aufgabe 8

- Deformationstensor: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right)$ symmetrisch
- Rotationstensor: $\alpha^a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right)$ antisymmetrisch
- gegebener Verschiebungstensor:

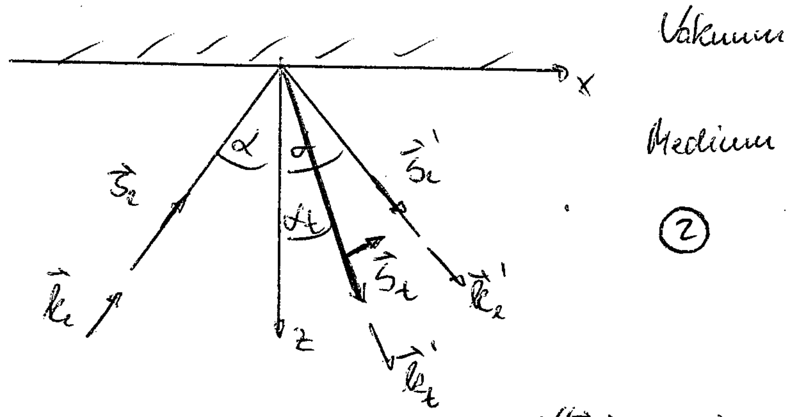
$$a_{ij} = \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_{ij} beschreibt eine reine Scherung parallel zur x_1-x_2-Ebene.
Der Parameter β: Scherwinkel im Bogenmaß



Aufgabe 6 12 P.

Reflexion elastischer Wellen



$\vec{s}_e$: ebene Welle $\vec{s}_e = \vec{A}_e \, e^{i(\vec{k}_e \vec{r} - \omega t)}$ 0,5

$\vec{A}_e = (A_e \sin\alpha, 0, -A_e \cos\alpha)$ 0,5 $\vec{k}_e = \frac{\omega}{c_e}(\sin\alpha, 0, -\cos\alpha)$

$\vec{r} = (x, y, z)$ 0,5

$$\Rightarrow \quad \vec{s}_e = A_e \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\omega}{c_e}(\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha\, z) - \omega t\right)}$$ 0,5

RB: $\boxed{\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad \text{für } z = 0}$ 1

(I) $\sigma_{zz} = 2\mu\, \varepsilon_{zz} + \lambda \, \mathrm{Sp}\, \tilde{\varepsilon} = 0$

(II) $\sigma_{zx} = 2\mu\, \varepsilon_{zx} = 0$ 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial z}\right) \\ \mathrm{Sp}\, \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) = \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial s_x}{\partial x} \end{array} \right.$$ 2

$\boxed{\vec{s}_e + \vec{s}_e\,' + \vec{s}_t\,'}$ 1

1) $\vec{s}_e\,'$ und $\vec{s}_t\,'$ in Vektorschreibweise formulieren 1

2) Summation: $\vec{s}_e + \vec{s}_e\,' + \vec{s}_t\,'$ ...

3) entsprechend RB benötigte partielle Ableitungen $\frac{\partial s_z}{\partial z}, \frac{\partial s_x}{\partial x}, \frac{\partial s_z}{\partial x}, \frac{\partial s_x}{\partial z}$ berechnen

4) Einsetzen in RB (I) + (II) liefert ein GS
mit 3 Variablen A_l, A_l', A_t' (1)

$\Rightarrow$ Lösen nach A_l' und A_t' (in Einheiten von A_l) (1)

5) Reflexionskoeffizienten

$$R_l = \frac{\text{Energiestromdichte reflektierte longitud. Welle} \perp \text{zur OF}}{\text{Energiestromdichte einfallende longitud. Welle} \perp \text{zur OF}}$$

$$R_t = \frac{\text{Energiestromdichte reflektierte transversale Welle} \perp \text{zur OF}}{\text{Energiestromdichte einfallende longitud. Welle} \perp \text{zur OF}}$$