Aufgabe 1 [7P]

Berechnen Sie: $v_i a_{ij}, v_i b_{ij}, a_{ij} b_{jk},\ a_{ji} b_{jk},\ Sp(b_{ij}), Det(b_{ij})$
Wovon ist c_{ij} die Matrix der Eigenvektoren und sind w_i die Eigenwerte?

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ;\ b_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} ;\ c_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ w_i = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

Aufgabe 2 [4P]

Den Verschiebungstensor kann man in einen Deformations- und Rotationstensor zerlegen. Schreiben Sie die jeweilige Zurodnungsvorschrift und den Tensor in Matrixform auf. Was wird von den einzelnen Tensoren beschrieben? Welche Eigenschaften besitzen diese?

Aufgabe 3 [6P]

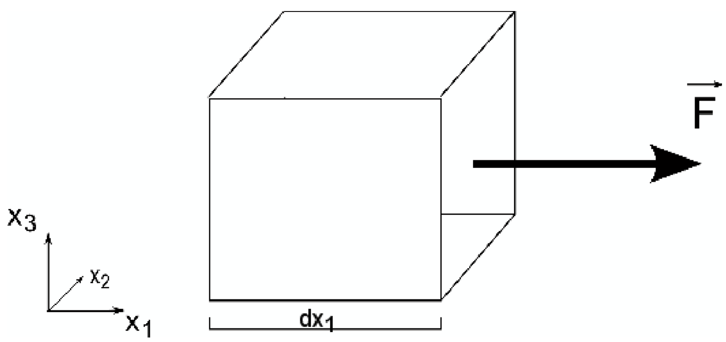
Wie hängen Verschiebungsvektor und Verschiebungstensor zusammen (Herleitung vom Verschiebungstensor)? Skizzieren und/oder beschreiben Sie den Einfluss auf ein Volumenelement in einem Würfel unter dem Einfluss folgender Verschiebungstensoren:

$$a_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ b_{ij} = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

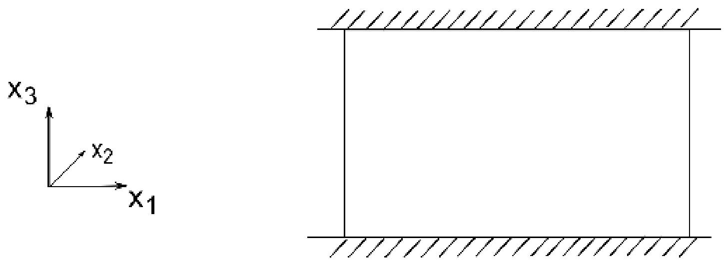
Welche Größe beschreibt der Parameter β? Wie lautet der Verschiebungstensor für eine Scherung parallel zur x-z-Ebene?

Aufgabe 4 [7+1P]

1. Formulieren sie die Kräftegleichgewichtsbedinung.
2. Beschriften Sie den Körper in folgender Abbildung im Sinne der Kräftegleichgewichte.



3. Welche Randbedingungen gelten für σ_{ij} und ϵ_{ij}



4. Welcher Zusammenhang existiert zwischen σ_{ij} und ϵ_{ij} im isotropen Körper? Wie lautet der Zusammenhang für den anisotropen Körper? Erklären Sie den Unterschied zwischen anisotropen und isotropen Körpern. Nennen Sie jeweils einen selbstgewählten Vertreter!
5. ZA: Welche (wieviele) elastische Konstanten besitzt ein isotroper Körper? Wieviele der am höchsten anisotrope?

Aufgabe 5: Kompressionsmodul [6P]

Ein Uboot sei näherungsweise beschrieben als ein homogener Körper, auf dessen Oberfläche A ein überall gleich großer, in normaler Richtung weisender Druck p wirke. Der Druck p ergebe sich aus der Wassersäule über dem Boot.

1. Wie lautet der Kompressionsmodul $\frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{p}\frac{\Delta V}{V}$ in der Annahme, dass es sich um einen isotropen Körper handelt?
2. Schätzen sie die Größenordnung der Volumendilitation ab, wenn für eine Oberfläche von $1m^2$ und $\lambda \sim 1 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$ und $\mu \sim 0.75 \cdot 10^{11}\frac{N}{m^2}$. Wie hängt die Volumendilitation von der Oberfläche und von der Tiefe des Bootes ab? Ab welcher theoretischen Tiefe (Größenordnung) muss man als Ubootfahrer Angst haben, zerquetscht zu werden ($\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{2}{3}10^{-6}$)? Erklären Sie die Schwächen diese Modells!

Testat 1/2 Übungsblatt 3

Aufgabe 1

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ b_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};\ c_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ w_i = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$v_i\, a_{ij} = \underline{(-1, 1, 0)}$ $\qquad$ $v_i\, b_{ij} = \underline{(1, 1, 0)}$

$$a_{ij}\, b_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da $a_{ij} = -a_{ji}$ (antisymmetrisch)

ist $a_{ji}\, b_{jk} = -a_{ij}\, b_{jk} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$Sp(b_{ij}) = \underline{3}$

$$\mathrm{Det}(b_{ij}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 1 = \underline{3}$$

---

c_{ij} - Matrix der Eigenvektoren
w_i - Eigenwerte

$\Big\}$ Orthogonale Transformation

$\Rightarrow$ c_{ij} - Matrix der Richtungskosinus,

die die gesuchte Matrix diagonalisiert, so dass gilt:
(m_{ij})

$\underline{m_{ij}' = c_{ik}\, c_{jl}\, m_{kl}}$ $\quad$ mit $\quad m_{ij}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Summation über k und l liefert jeweils 9 Terme für m_{ij}'.

(EW auf Hauptdiagonale)

Für die Rücktransformation gilt: $\underline{m_{ij} = c_{ki}\, c_{lj}\, m_{kl}'}$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\mu_{11} = {} & \underline{C_{11}\, C_{11}\, \mu'_{11}} + \cancel{C_{11}\, C_{21}\, \mu'_{12}}^{\,0} + \cancel{C_{11}\, C_{31}\, \mu'_{13}}^{\,0} \\
& + \cancel{C_{21}\, C_{11}\, \mu'_{21}}^{\,0} + \underline{C_{21}\, C_{21}\, \mu'_{22}} + \cancel{C_{21}\, C_{31}\, \mu'_{23}}^{\,0} \\
& + \cancel{C_{31}\, C_{11}\, \mu'_{31}}^{\,0} + \cancel{C_{31}\, C_{21}\, \mu'_{32}}^{\,0} + \underline{C_{31}\, C_{31}\, \mu'_{33}} \\
= {} & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-1) + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1 = \underline{\underline{1}}
\end{aligned}
$$

EV normiert

$$
\begin{aligned}
\mu_{12} &= C_{11}\, C_{12}\, \mu'_{11} + C_{21}\, C_{22}\, \mu'_{22} + C_{31}\, C_{32}\, \mu'_{33} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-1) + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot 0\right) \cdot 1 = \underline{\underline{1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{13} &= C_{11}\, C_{13}\, \mu'_{11} + C_{21}\, C_{23}\, \mu'_{22} + C_{31}\, C_{33}\, \mu'_{33} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-1) + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1 = \underline{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{21} &= C_{12}\, C_{11}\, \mu'_{11} + C_{22}\, C_{21}\, \mu'_{22} + C_{32}\, C_{31}\, \mu'_{33} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-1) + \left(0 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1 = \underline{\underline{1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{22} &= C_{12}\, C_{12}\, \mu'_{11} + C_{22}\, C_{22}\, \mu'_{22} + C_{32}\, C_{32}\, \mu'_{33} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-1) + 0 = \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{23} &= C_{12}\, C_{13}\, \mu'_{11} + C_{22}\, C_{23}\, \mu'_{22} + C_{32}\, C_{33} \cdot \mu'_{33} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-1) + 0 = \underline{\underline{1}}
\end{aligned}
$$

usw.

$$
\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}
$$

Aufgabe 2

Verschiebungstensor: $\alpha_{ij} = \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right)$

$$\alpha_{ij} = \alpha^a_{ij} + \alpha^s_{ij}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{antisymmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{symmetrisch}}$$

antisymmetrisch $\downarrow$ Rotation   symmetrisch $\downarrow$ Deformation

- Rotationstensor:

$Sp(\alpha^a_{ij}) \equiv 0$

antisymmetrisch

$(\alpha^a_{ij} = -\alpha^a_{ji})$

$$\alpha^a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} - \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} - \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

- Deformationstensor:

$Sp(\varepsilon_{ij}) \neq 0$

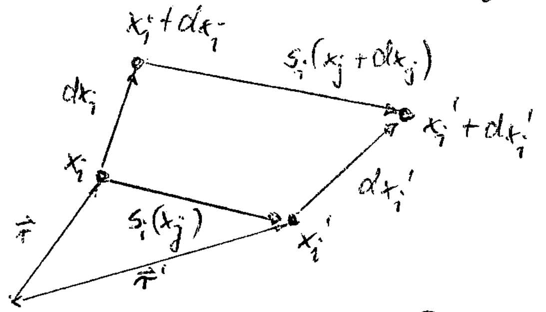
symmetrisch

$(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji})$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Zusammenhang Verschiebungsvektor s_i $\leftrightarrow$ Verschiebungstensor α_{ij}



$$s_i(x_j + dx_j) = s_i(x_j) + ds_i$$

$$= s_i(x_j) + \frac{\partial s_i}{\partial x_j} dx_j + \dots$$

unter der Annahme: $\left|\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right| \ll 1$: lineare Elastizitätstheorie

$$\Rightarrow \quad ds_i = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} dx_j = \alpha_{ij}\, dx_j$$

s_i - Verschiebungsvektor

α_{ij} - Verschiebungstensor

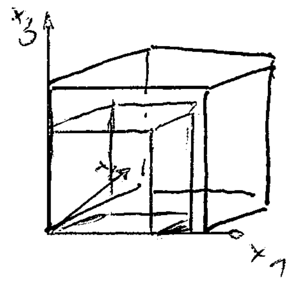
a) $$a_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Symmetrisch

$\Rightarrow$ Deformation

a_{ij} beschreibt die Streckung $(\alpha > 0)$ oder Stauchung $(\alpha < 0)$ entlang der (Haupt-)Achsen. Die relativen Längenänderungen

$\frac{\partial s_1}{\partial x_1} = a_{11} = \frac{\partial s_2}{\partial x_2} = a_{22} = \frac{\partial s_3}{\partial x_3} = a_{33}$ sind gleich groß.

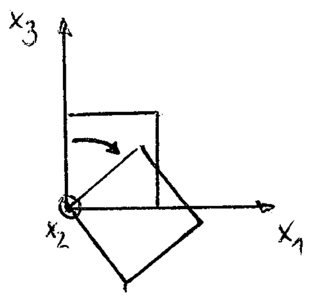


b) $$b_{ij} = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

antisymmetrisch

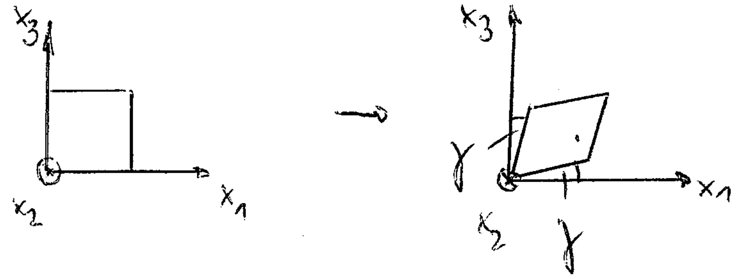
$\Rightarrow$ Rotation

b_{ij} beschreibt eine Rotation um die x_2- bzw. y-Achse. Der Parameter β beschreibt den Drehwinkel.



Verschiebungstensor für eine Scherung parallel zur x-z-Ebene:

$$C_{ij} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma \ldots \text{ Scherwinkel}$$



Aufgabe 4

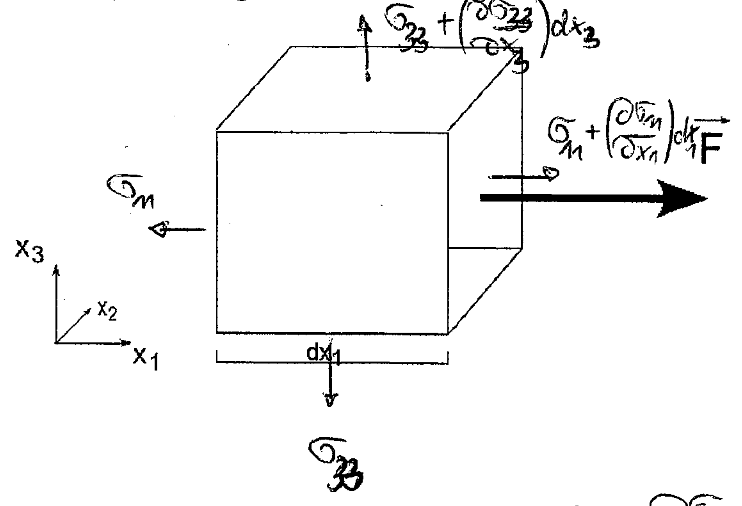
1. Kräftegleichgewichtsbedingung:

$$\int f_i \, dV + \oint \sigma_{ij} \, dA_j = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0}$$

äußere Kraft pro Volumen — innere Kraft pro Volumen

2. Beschriften Sie den Körper in folgender Abbildung im Sinne der Kräftegleichgewichte.

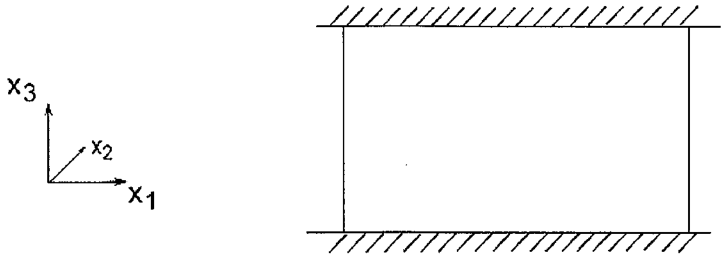


$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 \, dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 \, dx_3 + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 \, dx_2$$

$$- \sigma_{11} \, dx_2 dx_3 - \sigma_{12} \, dx_1 dx_3 - \sigma_{13} \, dx_1 dx_2 + f_1 \, dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\right) + f_1 = 0$$

3. Welche Randbedingungen gelten für σ_{ij} und ϵ_{ij}



- freie Oberflächen: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$; $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq 0$ (i.A.)
- fest eingespannt: $\sigma_{33} \neq 0$; $\varepsilon_{33} = 0$
- keine Scherungen: $\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0$; $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$

4. Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

- isotroper Körper: $\underline{\underline{\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} Sp(\tilde{\varepsilon})}}$

  λ, μ ... Lamésche Moduln

- anisotroper Körper: $\underline{\underline{\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}}}$

  C_{ijkl} ... Elastizitätstensor

Im Vergleich zu anisotropen Körpern besitzen <u>isotrope Körper</u> <u>keine</u> ausgezeichnete <u>Richtungsabhängigkeit</u>.

<u>Bsp:</u> isotrop: Glas; Flüssigkeiten; polykristalline, amorphe Körper

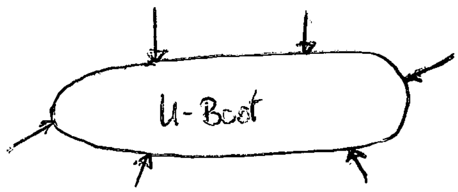
anisotrop: Einkristalle (Si, GaAs, ...)

5. Anzahl von Elastischen Konstanten:

- <u>isotrop</u>: 2 elastische Konstanten
- kubisch: 3 — " —

  ⋮
- <u>triklin</u>: 21 elastische Konstanten

Aufgabe 5 — Kompressionsmodul



$$\tilde{\sigma} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(hydrostatischer Druck)

1. Kompressionsmodul:

RB: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$

$\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$

Hookesches Gesetz: $\boxed{\sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}\, Sp(\tilde{\varepsilon})}$ isotroper Körper

$$\sigma_{11} = -p = 2\mu\, \varepsilon_{11} + \lambda\, Sp(\tilde{\varepsilon}) \qquad (1)$$

$$\sigma_{22} = -p = 2\mu\, \varepsilon_{22} + \lambda\, Sp(\tilde{\varepsilon}) \qquad (2)$$

$$\sigma_{33} = -p = 2\mu\, \varepsilon_{33} + \lambda\, Sp(\tilde{\varepsilon}) \qquad (3)$$

Addition von (1) - (3):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = Sp(\tilde{\sigma}) = -3p = (2\mu + 3\lambda)\, Sp(\tilde{\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = Sp(\tilde{\varepsilon}) = -\frac{3p}{2\mu + 3\lambda} \qquad (4)$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{p}\,\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\cancel{p}} \cdot \frac{-3\cancel{p}}{2\mu + 3\lambda}$$

$$\underline{\underline{\kappa = \frac{2\mu + 3\lambda}{3}}} \qquad (5)$$

2. Größenordnung der Volumendilatation

ggg: $A = 1\,m^2$

$\mu = 0.75 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$

$\lambda = 1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{3p}{2\mu + 3\lambda}$$

p ergibt sich aus Wassersäule über Boot

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\rho \cdot h \cdot \cancel{A} \cdot g}{\cancel{A}}$$

$\rho(H_2O) = 1000 \frac{kg}{m^3}$

$g \approx 10 \frac{m}{s^2}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = - \frac{3 \cdot \rho \cdot h \cdot g}{2\mu + 3\lambda} \qquad (6)$$

linear in h

unabhängig von A

Einsetzen der Werte in (6):

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} = \frac{3 \cdot 10^3\, kg \cdot m^{-3} \cdot 10\, m \cdot s^{-2}}{(2 \cdot 0.75 \cdot 10^{11}\, N \cdot m^{-2} + 3 \cdot 10^{11}\, N \cdot m^{-2})} \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 10^{11} + \frac{6}{2} \cdot 10^{11} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}\, m$$

$$h = \frac{2}{9} \cdot 10^{-10} \left(\frac{9}{2} \cdot 10^{11} \right) m$$

$$h \approx 10\, m$$

theoretische Tiefe

Schwächen:

- Näherung isotroper Körper
- Form / Geometrie nicht berücksichtigt