Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten eignen sich besonders für zylindersymmetrische Aufgaben mit axialer Symmetrie um die z-Achse!

Die orthonormierten Basisvektoren zu den Koordinaten $\{\rho, \phi, z\}$, also $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ bilden ein Rechtssystem. Aus der Projektion auf die kartesischen Achsen folgt:

$\vec{e}_\rho(\phi) = \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi$

$\vec{e}_\phi(\phi) = -\vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi$

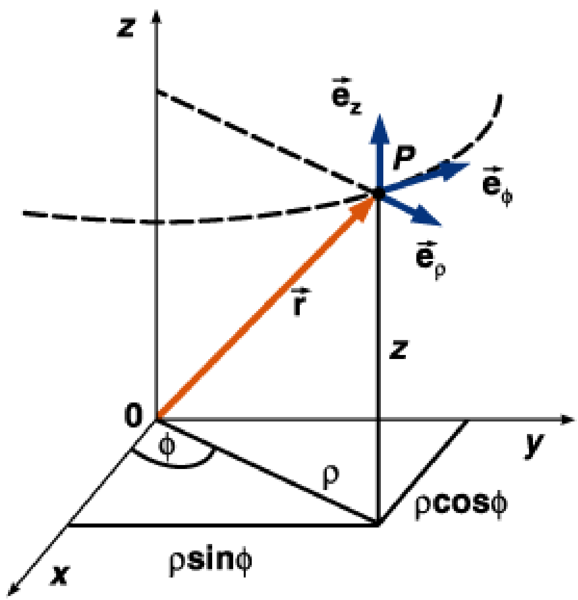
$\vec{e}_z = \vec{e}_z$

mit den konstanten Basisvektoren des kartesischen Systems $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$!

Die Basisvektoren $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\phi$ sind nicht konstant sondern von ϕ abhängig und ändern sich entsprechend

$\mathrm{d}\vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi \,\mathrm{d}\phi$ bzw. $\mathrm{d}\vec{e}_\phi = -\vec{e}_\rho \,\mathrm{d}\phi$.

Für den Vektor des Ortes, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung erhält man damit:



$\vec{r}(t) = \rho(t)\;\vec{e}_\rho + z(t)\;\vec{e}_z$

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot\rho\;\vec{e}_\rho + \rho\;\dot\phi\vec{e}_\phi + \dot z\;\vec{e}_z$

$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\;\vec{e}_\rho + (\rho\ddot\phi + 2\dot\rho\dot\phi)\;\vec{e}_\phi + \ddot z\;\vec{e}_z$

Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten bestimmt sich mit den Längenelementen entlang der Achsen $\mathrm{d}\rho$, $\rho\,\mathrm{d}\phi$ und $\mathrm{d}z$ zu $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$, die Vektordifferentialoperatoren und der Laplace-Operator zu:

$$\mathrm{grad}\,U(\rho,\phi,z) = \frac{\partial U}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\vec{A}(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A}(\rho,\phi,z) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z$$

$$\Delta U(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$