Kugelkoordinaten

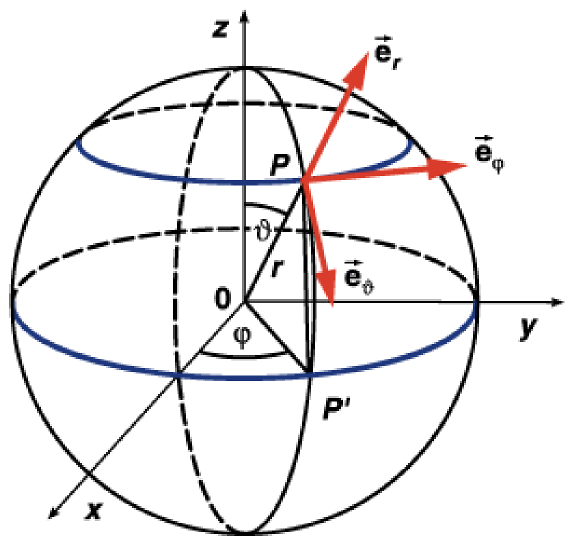
Kugelkoordinaten (sphärische Polarkoordinaten) eignen sich besonders für kugelsymmetrische Aufgaben mit Zentralymmetrie (keine Richtungsabhängigkeit)!

Die orthonormierten Basisvektoren zu den Koordinaten $\{r, \vartheta, \varphi\}$, also $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ bilden ein Rechtssystem. Aus ihrer Projektion auf die kartesischen Achsen folgt:

$\vec{e}_r(\vartheta, \varphi) = \vec{e}_x \sin\vartheta \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\vartheta \sin\varphi + \vec{e}_z \cos\vartheta$

$\vec{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \vec{e}_x \cos\vartheta \cos\varphi + \vec{e}_y \cos\vartheta \sin\varphi - \vec{e}_z \sin\vartheta$

$\vec{e}_\varphi(\varphi) = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi$



mit den konstanten Basisvektoren des kartesischen Systems $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$!

Die Basisvektoren sind alle nicht mehr konstant sondern von ϑ und φ ($\vec{e}_\varphi$ nur von φ) abhängig und ändern sich entsprechend $\mathrm{d}\vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta + \vec{e}_\varphi \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\vec{e}_\vartheta = -\vec{e}_r \, \mathrm{d}\vartheta + \vec{e}_\varphi \cos\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$ bzw. $\mathrm{d}\vec{e}_\varphi = -(\vec{e}_r \sin\vartheta + \vec{e}_\vartheta \cos\vartheta) \, \mathrm{d}\varphi$.

Für die Vektoren des Ortes, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung erhält man damit:

$\vec{r}(t) = r(t) \, \vec{e}_r$ $\qquad$ $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \, \vec{e}_r + r \, \dot{\vartheta} \, \vec{e}_\vartheta + r \sin\vartheta \, \dot{\varphi} \, \vec{e}_\varphi$

$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\varphi}^2)\vec{e}_\vartheta +$
$(r \sin\vartheta \, \ddot{\varphi} + 2 \sin\vartheta \, \dot{r} \, \dot{\varphi} + 2r \cos\vartheta \, \dot{\vartheta} \, \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Das Volumenelement in Kugelkoordinaten bestimmt sich mit den Längenelementen entlang der Achsen $\mathrm{d}r$, $r \, \mathrm{d}\vartheta$ und $r \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$ zu $\mathrm{d}V = r^2 \, \mathrm{d}r \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$, die Vektordifferentialoperatoren und der Laplace-Operator zu:

$$\mathrm{grad}\, U(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\mathrm{div} \vec{A}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial (\sin\vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\mathrm{rot} \vec{A}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r \sin\vartheta}\left(\frac{\partial (\sin\vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$