Die Vektordifferenzialoperatoren „grad“ „div“ „rot“ und der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist ein Vektordifferenzial-Operator, der aus drei Komponenten besteht, die selbst Differenzialoperatoren sind. In kartesischen Koordinaten ist er definiert:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \,,\, \frac{\partial}{\partial y} \,,\, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1. Der **Gradient** ist die Anwendung des $\vec{\nabla}$-Operators auf ein Skalarfeld $U(\vec{r})$ (Potenzial). Er bildet die Richtungsableitung von diesem und weist so in Richtung stärksten Wachstums des Potenzials. Er ist ein Vektor der senkrecht zu den Äquipotenzialflächen steht.

   $$\mathbf{grad}\ U(\vec{r}) = \vec{\nabla}\ U(\vec{r}) = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \,,\, \frac{\partial U}{\partial y} \,,\, \frac{\partial U}{\partial z} \right)^T ; \qquad \mathbf{grad}\ U(\vec{r}) \perp U(\vec{r}) = \text{const}$$

2. Die **Divergenz** ist die Anwendung des $\vec{\nabla}$-Operators auf ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ (Vektorpotenzial) im Sinne eines Skalarproduktes. Sie ergibt für $\vec{A}(\vec{r})$ die Quellendichte, das ist ein Skalarfeld, > 0 in echten Quellpunkten und < 0 in Senken von $\vec{A}(\vec{r})$.

   $$\mathbf{div}\ \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Die **Rotation** ist die Anwendung des $\vec{\nabla}$-Operators auf ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ im Sinne eines Vektorproduktes. Sie ergibt für $\vec{F}(\vec{r})$ die Wirbeldichte, das ist ein Vektorfeld mit Richtung der Drehachse des lokalen Wirbels von $\vec{F}(\vec{r})$.

   $$\mathbf{rot}\ \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Merk-Formeln

$$\mathbf{grad}\ r = \frac{\vec{r}}{r} \quad ! \quad \mathbf{div}\ \vec{r} = 3 \quad ! \quad \mathbf{rot}\ \vec{r} = \vec{0} \quad ! \quad \mathbf{grad}\ (\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a} \quad ! \quad (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\ \vec{r} = \vec{a}$$

$$\mathbf{divgrad}\ U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad ! \quad \text{der Laplace-Operator}$$

$$\mathbf{rotgrad}\ U = 0 \quad ! \quad \mathbf{divrot}\vec{A} = \vec{0}$$

Gauß'scher Integral-Satz

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \mathbf{div}\vec{A}\ dV$$

Stokes'scher Integral-Satz

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \mathbf{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Beispiele

Potenzial **Gradient** **Divergenz**

$U(\vec{r})$	**grad** $U(\vec{r})$	**divgrad** $U(\vec{r}) = \Delta\, U(\vec{r})$
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r}(x\ y\ z)$	$\frac{2}{r}$
r^2	$2\vec{r}$	6
$\gamma\frac{mM}{r}$	$-\gamma\frac{mM}{r^3}\vec{r}$	0
$f(r)$	$f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$	$\frac{2f'(r)}{r} + f''(r)$
$\vec{a}\cdot\vec{r}$	$\vec{a}$	0
$f(\vec{a}\cdot\vec{r})$	$f'(\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{a}$	$f''(\vec{a}\cdot\vec{r})a^2$
$-m\vec{g}\cdot\vec{r}$	$-m\vec{g}$	0
$(\vec{a}\times\vec{r})^2$	$2(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{a}$	$4a^2$

Kraftfeld **Divergenz** **Rotation**

$\vec{F}(\vec{r})$	**div** $\vec{F}(\vec{r})$	**rot** $\vec{F}(\vec{r})$
$\alpha\,\vec{r}$	$3\,\alpha$	$\vec{0}$
$\gamma\frac{mM}{r^3}\vec{r}$	0	$\vec{0}$
$\frac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})$	0	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	0	$\vec{0}$
$\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})$	a^2	$\vec{0}$
$(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}$	$4(\vec{a}\cdot\vec{r})$	$\vec{a}\times\vec{r}$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie zu folgenden Potenzialen die zugehörigen Kraftfelder!
   Die Größen $\vec{a}, m, \vec{g}$ sind Konstanten, eine Funktion $f()$ sei differenzierbar.

   $U_1(\vec{r}) = r = |\vec{r}|$ $\qquad U_2(\vec{r}) = r^2$

   $U_3(\vec{r}) = \frac{1}{r}$ $\qquad U_4(\vec{r}) = f(r)$

   $U_5(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r}$ $\qquad U_6(\vec{r}) = -m\ \vec{g}\cdot\vec{r}$

   $U_7(\vec{r}) = f(\vec{a}\cdot\vec{r})$ $\qquad U_8(\vec{r}) = (\vec{a}\times\vec{r})^2$

2. Bestimmen Sie für folgende Kraftfelder die Quellendichte und finden Sie wo es existiert ein zugehöriges Potenzial! Die Größen $\alpha,\ \gamma,\ \vec{\omega}\ und\ \vec{a}$ sind Konstanten.

   $\vec{F}_1 = \alpha\cdot\vec{r}$ $\qquad \vec{F}_2 = \frac{\gamma\ \vec{r}}{r^3}$

   $\vec{F}_3 = \frac{1}{2}\ (\vec{\omega}\times\vec{r})$ $\qquad \vec{F}_4 = \vec{a}$

   $\vec{F}_5 = (\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r}$

Produktregeln für den $\vec{\nabla}$-Operator

$\mathbf{grad}(U\ V) = \vec{\nabla}(U\ V) = U\ \vec{\nabla}V + V\ \vec{\nabla}U = U\ \mathbf{grad}\ V + V\ \mathbf{grad}\ U$

$\mathbf{div}(U\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(U\ \vec{A}) = U\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}U = U\ \mathbf{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\mathbf{grad}\ U$

$\mathbf{rot}(U\vec{A}) = \vec{\nabla}\times(U\vec{A}) = U\ \vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{\nabla}U = U\ \mathbf{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\mathbf{grad}U$

$\mathbf{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{B}\cdot\mathbf{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathbf{rot}\vec{B}$

$\mathbf{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot\mathbf{div}\vec{B} - \vec{B}\cdot\mathbf{div}\vec{A} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

$\mathbf{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times\mathbf{rot}\vec{B} + \vec{B}\times\mathbf{rot}A + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

„Quadrate“ des Nabla-Operators (Operatoren 2. Ordnung)

$\mathbf{divgrad}\ U = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\ U = \boldsymbol{\Delta}\ U$ der **Laplace**-Operator – ein **skalarer** Operator

$\mathbf{graddiv}\ \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ im Ergebnis ein Vektorfeld

$\mathbf{rotgrad}\ U = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\ U$ $(= \vec{0}$ Wirbelfreiheit ist Bedingung für ein skalares Potenzial!)

$\mathbf{divrot}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ $(= 0$ Quellenfreiheit ist Bedingung für ein Vektorpotenzial!)

$\mathbf{rotrot}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mathbf{graddiv}\vec{A} - \Delta\ \vec{A}$