Die Delta(δ)−Funktion und ihre Eigenschaften

Definition

Die von Dirac in der Physik eingeführte δ−Funktion (δ−Distribution) ist mathematisch definiert als lineares stetiges Funktional, als Grenzwert einer schwach konvergenten Funktionalfolge über symmetrische Verteilungsfunktionen $w_\sigma(x)$, bei gegen Null strebender Streuung ("Breite") σ. Schwach konvergent heißt, dass Grenzwertbildung und Integration nicht vertauscht werden dürfen!

$$\int \delta(x) f(x)\ dx = \lim_{\sigma \to 0} \int w_\sigma(x) f(x)\ dx$$

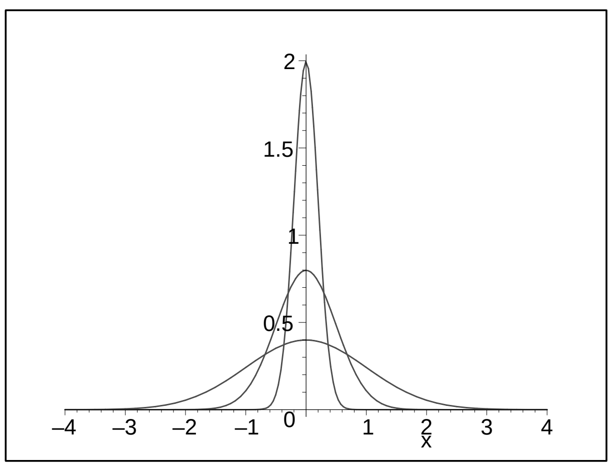
Die $w_\sigma(x)$ erfüllen dabei die Normierungsbedingung $\int w_\sigma(x)\ dx = 1$. Sie müssen jedoch nicht unbedingt nichtnegativ sein. Hier drei Beispiele für Grenzfolgen der δ−Funktion:

1. $\delta(x) \doteq \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ (Gauss−Funktionen)

2. $\delta(x) \doteq \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2 + \sigma^2}$ (Lorentz/Cauchy−Funktionen)

3. $\delta(x) \doteq \lim_{\sigma \to 0} \frac{\sin \frac{x}{\sigma}}{\pi x}$ (sphärische Bessel−Funktionen)

Das Bild der Funktionen wird dabei mit $\sigma \to 0$ zu einem immer schärferen Peak bei gleichbleibend großer Fläche(=1) unter der Kurve.



Die Gauss−Funktion mit Werten für σ von 1.0, 0.5 und 0.2 liefert die nebenstehende Abbildung.

Die δ−Funktion ist also eine singuläre Verteilungs(Filter)−Funktion (eine Distribution), für die oft vereinfachend geschrieben wird:

$$\delta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \int_G \delta(x)\ dx = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (0 \in G) \\ 0 & (0 \notin G) \end{array} \right\}$$

Insbesondere für diskrete Verteilungen wie Punktmassen und Punktladungen erhält man die praktisch wichtigste Formel für die δ−Funktion:

$$\int_G \delta(x - x_0) f(x)\ dx = f(x_0) \qquad \text{falls } x_0 \in G\ , \quad \text{sonst} = 0\ !$$

Eigenschaften

1. Wegen der Symmetrie der Funktionenfolgen, aus denen die $\delta-$Funktion entsteht, folgt sofort, dass auch sie selbst symmetrisch ist:

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad \text{bzw.} \quad \delta(x - x') = \delta(x' - x)$$

2. Die $\delta-$Funktion ist homogen von der Ordnung -1. Daraus ergibt sich, dass sie die reziproke Maßeinheit ihres Argumentes besitzen muss.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \text{bzw.} \quad \delta(a(x - x')) = \frac{1}{|a|}\delta(x - x')$$

3. Die $\delta-$Funktion besitzt eine Stammfunktion, die Heaviside'sche Stufenfunktion:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x')\ dx' = \theta(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = \theta'(x) = \delta(x)$$

4. Für die $\delta-$Funktion mit dem Argument $g(x)$ sind die Nullstellen dieser Funktion von Bedeutung und es gilt die Formel

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\ \delta(x - x_n)$$

für alle differenzierbaren Funktionen $g(x)$ mit einfachen Nullstellen x_n $(g(x_n) = 0)$.

5. Mehrdimensionale $\delta-$Funktionen sind das Produkt von eindimensionalen ,wie z.B. im kartesischen Koordinatensystem:

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\ \delta(y)\ \delta(z)$$

mit der Schlüsselformel für die Volumenintegration:

$$\int_G \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r})\ d^3\vec{r} = f(\vec{r}_0) \quad \text{(falls } \vec{r}_0 \text{ in } G\text{)}$$

6. Aus der Integralformel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K} e^{ikx}\ dk = \frac{\sin Kx}{\pi x}$$

folgt mit $K \to \infty$ (siehe oben) die Fourier$-$Integraldarstellung der $\delta-$Funktion

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\ dk \qquad \text{bzw.}$$

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}}\ d^3\vec{k} \qquad \text{3-dimensional,}$$

eine Superposition ebener Wellen mit gleichgroßer Amplitude für alle Wellenzahlen bzw. $-$vektoren.

Aufgaben

1. Zeigen Sie die Richtigkeit der beiden Beziehungen:

$$\delta[(x-x')(x-x'')] = \frac{\delta(x-x')+\delta(x-x'')}{|x'-x''|}$$

$$\delta(x^2-x'^2) = \frac{\delta(x-x')+\delta(x+x')}{2|x'|}$$

2. Die $\delta-$Funktion ist diffenzierbar und ihre Ableitung bestimmt sich ganz analog als Funktional mit den Ableitungen der $w'_\sigma(x)$ durch die Formel

$$\int \delta'(x) f(x)\ dx = \lim_{\sigma\to 0} \int w'_\sigma(x) f(x)\ dx\ .$$

Zeigen Sie, die Richtigkeit der Formeln

$$\int \delta'(x-x_0) f(x)\ dx = -f'(x_0) \qquad \text{und}$$

$$\int \delta^{(n)}(x-x_0) f(x)\ dx = (-1)^n\ f^{(n)}(x_0) \qquad \text{für die } n\text{−te Ableitung!}$$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2x)(x^3+2x^2-x)\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-3)(x^3+2x^2-x)\ dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3x+4)(x^3+2x^2-x)\ dx$

d) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \delta(x-3)(x^2+1)\ dx$

e) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \delta(x+1)(x^2+1)\ dx$

f) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \delta(x^3+3x^2+2x)(x^2+1)\ dx$

g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \delta(x-3)(x^2+1)\ dx$

h) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \delta(x^3+3x^2+2x)(x^2+1)\ dx$

Beachten Sie beim letzten Integral, dass Beiträge von Nullstellen, die genau auf der Integrationsgrenze liegen, nur zur Hälfte gerechnet werden dürfen!

4. Welche Werte liefern die beiden folgenden Integrale?

$$\int_0^{2\pi} \delta(\cos x)\sin x\ dx$$

$$\int_0^{3\pi} \delta(\cos x)\sin x\ dx$$