TU Bergakademie Freiberg
Institut für Numerische Mathematik und Optimierung
Michael Eiermann / Stephan Köhler

13. November 2019

Numerik von Anfangswertaufgaben

Wintersemester 2019

2. Übungsblatt

Aufgabe 6: $(*)$

In MATLAB gibt es ein Paket von M-Files zur Lösung von Anfangswertaufgaben

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \tag{$*$}$$

für gewöhnliche Differentialgleichungen. Sie werden durch den Befehl

$$[\mathtt{t}, \mathtt{Y}] = \mathtt{ode\_solver}(\mathtt{ode\_fun}, \mathtt{tspan}, \mathtt{y0})$$

aufgerufen. Dabei bezeichnen

ode_solver den Namen des zu verwendenden Lösers (wie z.B. `ode23`, `ode45`, ...; hinter den Namen verbergen sich Algorithmen, die im Verlauf der Vorlesung behandelt werden),

t den Vektor der Zeitpunkte, an denen die Lösung berechnet wurde,

Y eine Matrix, deren Zeilen die Komponenten der Lösung zu den Zeitpunkten von `t` enthalten,

ode_fun den Namen einer ODE-Funktion: `ode_fun(t,y)` muss den Spaltenvektor $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ liefern,

tspan das Lösungsintervall $[t_0, t_{\mathrm{end}}]$,

y0 den Vektor der Anfangswerte.

Zur Lösung von $(*)$ mit MATLAB muss also lediglich eine ODE-Funktion geschrieben werden, die das Anfangswertproblem beschreibt. Daneben ist es sinnvoll, sogenannte ODE-Optionen zu setzen (vgl. `odeset`).

Lösen Sie das restringierte Dreikörperproblem und die Gleichung der autokatalytischen Reaktion aus Kapitel 1.7 der Vorlesung mit einer der ODE-Routinen von MATLAB.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass die Näherungen $\boldsymbol{y}_n(h)$ des modifizierten Euler-Verfahrens die Beziehung

$$\max_{0 \le n \le N(h)} \|\boldsymbol{y}_n(h) - \boldsymbol{y}(t_n)\| = O(h^2) \quad (h \to 0)$$

erfüllen, falls $\boldsymbol{y}$ dreimal stetig differenzierbar ist.
Das bedeutet: Das modifizierte Euler-Verfahren besitzt die Konvergenzordnung 2.

Aufgabe 8:

Das implizite Einschrittverfahren

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \tfrac{1}{2}h\left(\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1})\right)$$

wird Trapezregel genannt (warum?).

(a) Beweisen Sie, dass die Trapezregel die Konvergenzordnung 2 besitzt.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = -y + 2e^{-t}\cos(2t)$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le 10$, mit dem Euler-Verfahren und der Trapezregel. Plotten Sie die Näherungslösungen sowie den globalen Diskretisierungsfehler für die Schrittweiten $h = 1/2$, $h = 1/10$ und $h = 1/50$. (Die exakte Lösung des Problems ist $y(t) = e^{-t}\sin(2t)$.)

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = \log(3(y - \lfloor y \rfloor - \frac{1}{2}))$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le 8$, mit dem Euler-Verfahren und der Trapezregel. Plotten Sie die globalen Diskretisierungsfehler für die Schrittweiten $h = 1/100$ und $h = 1/1000$. (Die exakte Lösung des Problems ist $y(t) = -n + \frac{1}{2}\left(1 - 3^{t-n}\right)$, $n \le t \le n+1$, $n = 0, 1, \ldots$)

(d) Interpretieren Sie Ihre numerischen Ergebnisse aus (b) und (c).

Aufgabe 9:

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wird durch

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n},\ t \mapsto e^{tA},$$

eine Abbildung definiert. Zeigen Sie, dass T stetig ist, die Bedingung $T(0) = I_n$ (Einheitsmatrix) erfüllt und der Funktionalgleichung $T(s+t) = T(s)T(t)$ genügt (für alle $s, t \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 10:

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \text{ und } e^{tB} = \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}$$

gelten.

Aufgabe 11:

Die Abbildung $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{n\times n}$ sei stetig, erfülle die Bedingung $T(0) = I_n$ und genüge der Funktionalgleichung $T(s+t) = T(s)T(t)$ (für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$). Beweisen Sie, dass es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt mit $T(t) = e^{tA}$.

Aufgabe 12:

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass es genau dann eine (von t unabhängige) Konstante M gibt mit

$$\left\| e^{tA} \right\|_2 \leq M \text{ für alle } t \geq 0,$$

wenn für die Eigenwerte λ von A Folgendes gilt:

$$\mathrm{Real}(\lambda) \leq 0 \text{ und } \mathrm{Real}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \text{ ist halbeinfach.}$$

(Ein Eigenwert heißt halbeinfach, wenn seine algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen oder – äquivalent – wenn er nur in Jordan-Blöcken der Dimension 1 auftritt.)