TU Bergakademie Freiberg
Institut für Numerische Mathematik und Optimierung
Michael Eiermann / Stephan Köhler

21. Oktober 2019

Numerik von Anfangswertaufgaben

Wintersemester 2019

1. Übungsblatt

Aufgabe 1: $(*)$

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = ay(t) + g \quad (a, g \in \mathbb{R}), \ , \quad y(0) = y_0,$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = \begin{cases} y_0 e^{at} + \frac{g}{a}(e^{at} - 1), & \text{falls } a \neq 0, \\ y_0 + gt, & \text{falls } a = 0, \end{cases}$$

besitzt.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad (a(t) \text{ stückweise stetig}), \quad y(0) = y_0,$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right)$$

besitzt.

c) Plotten Sie mithilfe von MATLAB die Lösung von $y' = \operatorname{sign}(\sin(t^2))y$, $t \in [0, 8]$, $y(0) = 1$.

Aufgabe 2:

Die Fibonacci-Zahlen (Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt, 1170–1250) sind durch

$$x_0 = x_1 = 1, \ \ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \ (n = 2, 3, \ldots)$$

definiert.

a) Beweisen Sie die sog. Formel von Moivre-Binet (Abraham de Moivre, 1667–1754; Jacques Philippe Marie Binet, 1786–1856)

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \ (n = 0, 1, \ldots).$$

b) Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{N} x_n^2 = x_N x_{N+1} \ (N = 0, 1, \ldots)$$

und geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Beziehung an.

c) Es sei

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

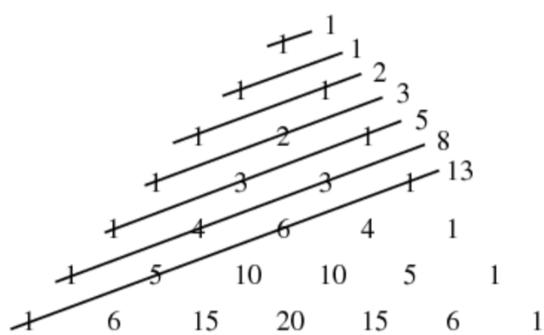
Machen Sie sich klar, dass

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Leiten Sie daraus einen weiteren Beweis der Moivre-Binet-Formel ab.

d) Zeigen Sie, dass die Folge $\{x_{2n}/x_{2n-1}\}_n$ streng monoton fällt, während die Folge $\{x_{2n+1}/x_{2n}\}_n$ streng monoton wächst. Beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert ϕ. Bestimmen Sie ϕ und interpretieren Sie diese Zahl geometrisch.

e) Addiert man die Diagonaleinträge im Pascal'schen Dreiecks (Blaise Pascal, 1623–1662) wie in der Grafik beschrieben, so erhält man die Fibonacci-Zahlen. Beweisen Sie diese Behauptung.



Quelle: `http://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html`

Aufgabe 3:

Es sei $y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$ eine homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten *reellen* Koeffizienten a_0, a_1. Wir sind nur an den reellen Lösungen dieser Gleichung interessiert. Besitzt das (reelle) charakteristische Polynom $x^2 + a_1 x + a_0$ aber komplexe Nullstellen x_1, x_2, so erhält man aus der üblichen Lösungsformel $y_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$ aber komplexe Werte.

a) Leiten Sie für diesen Fall eine Lösungsformel her, die ausschließlich reelle Werte liefert.

b) Berechnen Sie mit der Formel aus a) alle reellen Lösungen von $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$.

Aufgabe 4:

Wir betrachten die inhomogene Differenzengleichung

$$y_{n+1} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = bp^n \qquad (*)$$

mit $a_0, a_1, b, p \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$.

a) Es seien x_1, x_2 die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms $x^2 + a_1x + a_0$.
Beweisen Sie, dass

$$y_n = \begin{cases} \frac{b}{p^2+a_1p+a_0}p^n, & \text{falls } p \notin \{x_1, x_2\}, \\ \frac{b}{2p^2+a_1p}np^n, & \text{falls } p \in \{x_1, x_2\} \text{ und } x_1 \neq x_2, \\ \frac{b}{4p^2+a_1p}n^2p^n, & \text{falls } p = x_1 = x_2, \end{cases}$$

eine spezielle Lösung von $(*)$ ist.

b) Berechnen Sie alle reellen Lösungen von

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = \frac{11}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^n.$$

Aufgabe 5: $(*)$

Beweisen Sie Lemma 1.4 der Vorlesung:
Für die homogene Differenzengleichung

$$y_{n+k} + \alpha_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{$**$}$$

sind die folgenden drei Aussagen äquivalent :

1. Jede Lösung $\{y_n\}_n$ von $(**)$ ist beschränkt.
2. Für jede Lösung $\{y_n\}_n$ von $(**)$ ist $\{y_n/n\}_n$ eine Nullfolge.
3. Das zugehörige charakteristische Polynom p erfüllt die sog. *Stabilitätsbedingung*:

$$\begin{aligned} &p(\lambda) = 0 \implies |\lambda| \leq 1, \\ &p(\lambda) = 0 \text{ und } |\lambda| = 1 \implies \lambda \text{ ist einfache Nullstelle von } p. \end{aligned} \tag{Stab}$$

Besprechungstermin: Dienstag, 29. Oktober 2019.