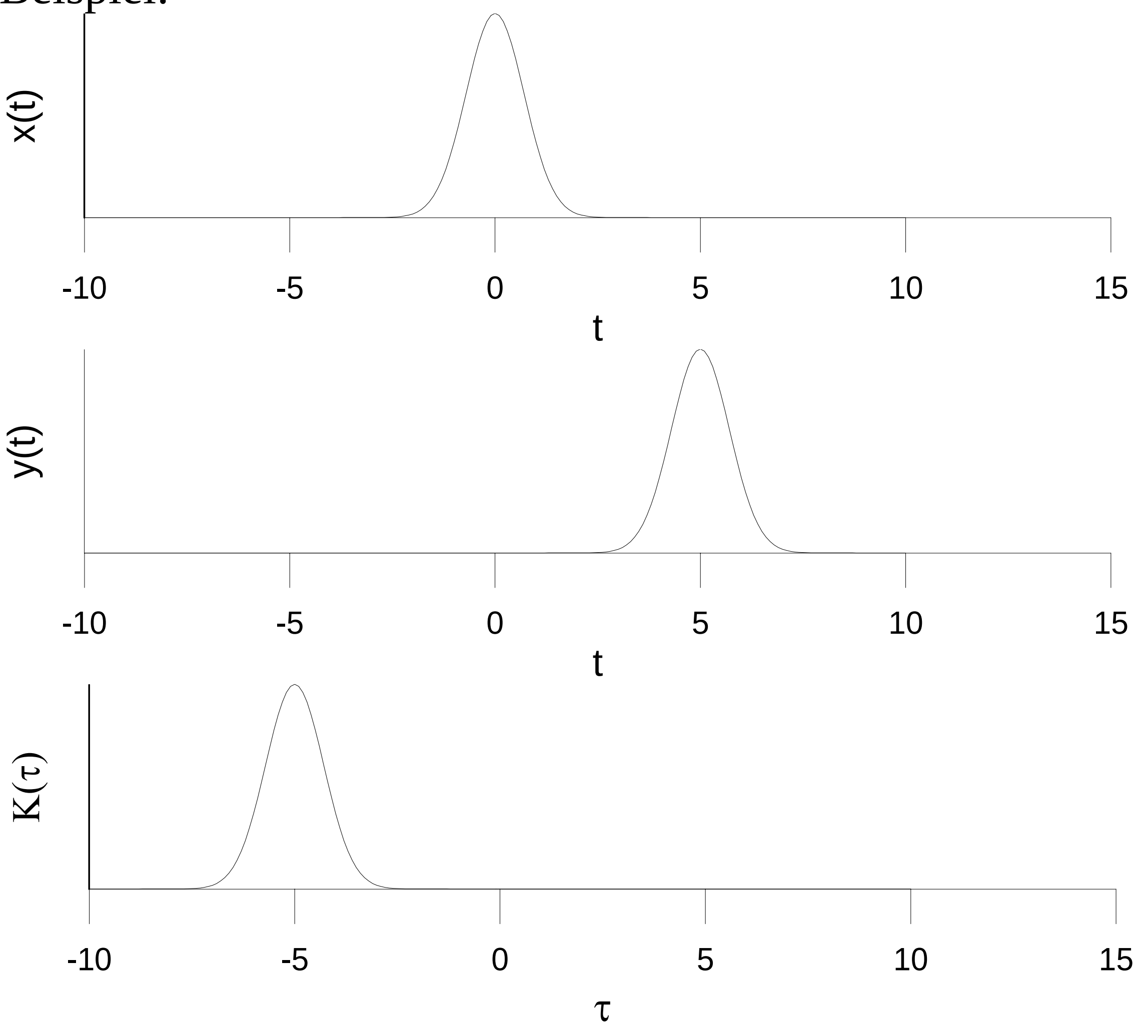
DIE KREUZKORRELATION

Definition der Kreuzkorrelationsfunktion zweier Zeitfunktionen *x(t), y(t)*:

$$\mathrm{K}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

Was bedeutet die Kreuzkorrelation?
Man verschiebe ein Signal zeitlich um den Wert τ und multipliziere sie mit dem anderen Signal und integriere das Ergebnis. Wenn beide Signale im Prinzip gleich sind aber lediglich zeitlich um den Wert $\tau 1$ verschoben sind, so wird die Korrelationsfunktion für $\tau = \tau 1$ einen Maximum haben.
Beispiel:



d.h. $\tau 1 = -5$

Nun die Frage: wofür um Himmelswillen ist so was gut?

Die Antwort:
Man kann damit entscheiden ob sich zwei Signalen ähneln und um wie viel sie zeitlich verschoben sind. Dies scheint noch unbefriedigend zu sein aber wenn man bedenkt, dass keinerlei Annahmen über die Form der Signale getroffen wurden, wird die Sache schon interessanter. Wenn man es genau nimmt gibt es schon gewisse Einschränkungen bezüglich der Integrabilität der Funktionen.
Anwendungen:

Global Positioning System,	Signalverarbeitung
Bildverarbeitung,	Mustererkennung
Roboter Vision,	Astrophysik
Geschwindigkeitsmessungen	

In der Praxis liegen Signale nicht als mathematische Funktionen sondern als diskrete Zeitsignalen vor, d.h. die Werte x_i, y_i zu diskreten Zeitpunkten $i=1 \ldots N$ $(t_0+\Delta t, \ldots, t_0+i\Delta t, \quad t_0+N\Delta t)$. Hier kann man den Übergang vom Integral zu einer Summe (i entspricht t, k entspricht τ) durchführen und das Ergebnis mit dem Effektivwert der einzelnen Signalen teilen (normieren),:

$$corr\{k\} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x[i] \cdot y[i+k]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x[i])^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (y[i+k])^2}}$$

Sind die Signale für irgendein k gleich liefert die normierte Kreuzkorrelation den Wert 1; den Wert -1 liefert sie wenn sie gegenphasig sind. Wenn der Wert der normierten Korrelation für alle k (für alle τ) gleich Null ist sagt man die Funktionen, bzw. Signale sind unkorreliert. Insbesondere trifft dies für das Rauschen von Messsystemen zu. Reale Signale liefern Korrelationswerte, die nur sehr selten an 1 bzw. -1 reichen. Aber ein Wert von z. B. 0,7 ist schon sehr aussagekräftig.

Anwendungsbeispiel: zwei Lichtschranken im Abstand Δs quer zur Autobahn in 5 cm Höhe über die Fahrbahn. Ohne ein Wagen liefern beide Lichtschranken ein hohes Signal. Wenn ein kleiner PKW die Lichtschranken passiert fällt das Signal zwei Mal für eine kurze Zeit (Vorder- und Hinterräder) auf einen kleinen Wert (Rauschen, Umgebungslicht, usw.) ab. Die Pause zwischen den Unterbrechungen hängt von dem Radabstand und der Geschwindigkeit des PKWs ab. Insgesamt ist die Signalform von der Radgröße, Achsenanzahl, Achsenabstand und der Geschwindigkeit abhängig. Aber genau diese Signalform wiederholt sich in der zweiten Lichtschranke nur zu einem etwas späteren Zeitpunkt Δt. Durch die Kreuzkorrelation kann man also diesen Wert und somit auch die Geschwindigkeit des Fahrzeugs $v = \Delta s/\Delta t$ ermitteln. Sollte der Korrelationswert nicht nahe bei eins liegen, dann lag wahrscheinlich ein Überholvorgang im Bereich der Lichtschranken vor, die Messung also ungültig.

Zwei-dimensionale Kreuzkorrelation im Raum

Die Kreuzkorrelation ist aber nicht nur auf Zeitsignalen beschränkt. Man kann sie für beliebige Funktionen benutzen.
Der größte nicht-zeitlicher Anwendungsbereich ist die Bildverarbeitung. Hier benutzt man vorwiegend eine zwei dimensionale Kreuzkorrelation in der Bildebene, hier in normierter Form: (**N**ormalized **C**ross-**C**orrelation **F**unction) für zwei Bilder $f_t(x,y)$ und $f_{t+1}(x,y)$, die zu zwei Zeitpunkten aufgenommen wurden, x,y sind hier Ortskoordinaten!, u,v die Ortsverschiebungen (dies entspricht τ in der Zeitkorrelation).

$$NCCF_{i,j}(u,v) = \frac{\sum_{(x,y)^T \in B_{i,j}} f_t(x,y) \cdot f_{t+1}(x+u,y+v)}{\sqrt{\sum_{(x,y)^T \in B_{i,j}} f_t(x,y)^2} \sqrt{\sum_{(x,y)^T \in B_{i,j}} f_{t+1}(x+u,y+v)^2}}$$