

antriebstechnik

Beckert, U.:

Berechnung zweidimensionaler Wirbelströme in kurzen

Permanentmagneten von PM-Synchronmaschinen

antriebstechnik 46 (2007), Heft 6, S. 44 - 48

Berechnung zweidimensionaler Wirbelströme in kurzen Permanentmagneten von PM-Synchronmaschinen

Ulrich Beckert, TU Bergakademie Freiberg

Herrn Prof. em. Dr.-Ing. G. Pfaff zum 75. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung

Bei hochausgenutzten PM-Synchronmaschinen mit Oberflächenmagneten sind die Wirbelstromverluste in den Permanentmagneten bedeutsam. Die Wirbelstromverluste lassen sich durch eine axiale Unterteilung der Permanentmagnete in mehrere Teilmagnete reduzieren. Im Beitrag wird ein Modell zur analytischen Berechnung der Wirbelstromverluste in kurzen Permanentmagneten mit zweidimensionaler Wirbelströmung vorgestellt.

Keywords: Synchronmaschinen, Oberflächenmagnete, zweidimensionale Wirbelströme, analytische Berechnung

Calculation of two-dimensional Eddy Currents in the Permanent Magnets of PM-Synchronous Machines

For highly utilized PM synchronous machines with surface magnets eddy current losses are significant. By subdividing the permanent magnets in axial direction into partial magnets a reduction of the eddy current losses is achieved. In the paper a model for the analytical calculation of eddy current losses in the short permanent magnets with a two-dimensional eddy current is presented.

Keywords: synchronous machines, surface magnets, two-dimensional eddy currents, analytical calculation

Berechnung zweidimensionaler Wirbelströme in kurzen Permanentmagneten von PM-Synchronmaschinen

Ulrich Beckert, TU Bergakademie Freiberg

1 Einleitung

Der Beitrag bezieht sich auf hochausgenutzte permanenterrregte Synchronmaschinen mit Oberflächenmagneten, deren axiale Länge klein gegenüber der Polteilung sein kann. Mit einer Erhöhung der Ausnutzung des eingesetzten Magnetmaterials, d.h. mit abnehmender Luftspaltweite treten zunehmend parasitäre Wirbelströme und Wirbelstromverluste in den Permanentmagneten auf. Diese entstehen durch die nutungsbedingten Modulationen des Polrad- und des Ankerfeldes sowie durch nichtsinusförmige Ankerströme bei Umrichterbetrieb.

Bei der analytischen Berechnung der Wirbelstromverluste ist bisher stets vorausgesetzt worden, dass die Wirbelströme nur eine axiale Komponente besitzen, dass also die Länge der Permanentmagnete groß gegenüber ihrer Breite bzw. gegenüber der Polteilung ist. Auf diese Weise entstand ein zweidimensionales Feldproblem [1, 3].

Analog der Blechung weichmagnetischer Kreise lassen sich die Wirbelstromverluste in den Permanentmagneten durch eine axiale Unterteilung der Permanentmagnete in mehrere Teilmagnete reduzieren. In diesem Fall kann bei der analytischen Berechnung nicht mehr vorausgesetzt werden, dass die Wirbelströme rein axial verlaufen.

Im Folgenden wird ein verfeinertes Modell vorgestellt, bei dem die Wirbelströme neben einer axialen auch eine tangentielle Komponente besitzen können, wodurch ein dreidimensionales Feldproblem entsteht. Die Magnetlänge kann dann auch klein gegenüber der Magnetbreite bzw. der Polteilung sein.

2 Definition des Rechenmodells

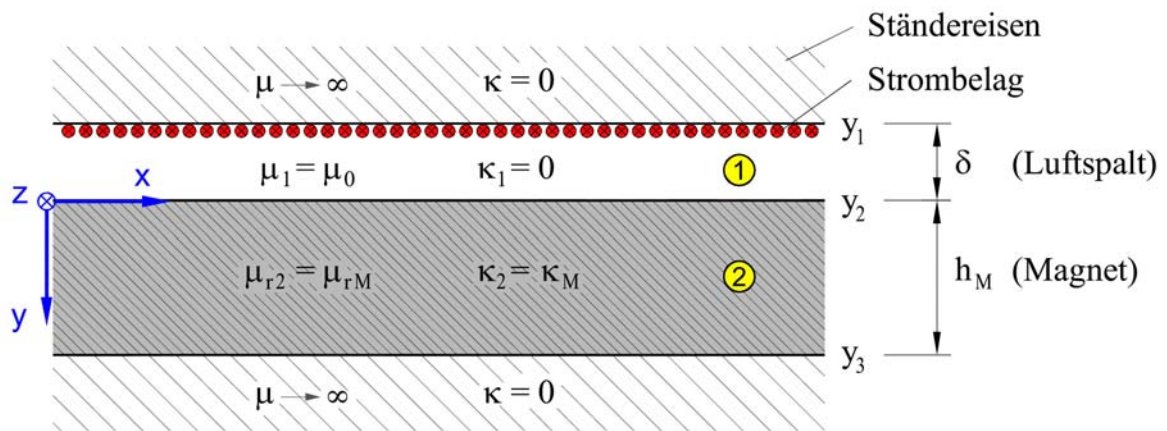


Bild 1: Rechenmodell

Dieses Modell ist durch folgende idealisierende Annahmen definiert:

- Die Krümmung wird vernachlässigt, so dass von einem ebenen Feldproblem in Kartesischen Koordinaten ausgegangen werden kann.
- Das Maschinenmodell besteht aus zwei Schichten (Bild 1): Der Luftspalt bildet die Schicht 1, das Magnetmaterial bildet die Schicht 2.
- Die elektrische Leitfähigkeit κ und die relative Permeabilität μ_r des Magnetmaterials sind konstant, d.h., es liegt ein lineares Problem vor. Es gilt das Superpositionsprinzip.
- Die Ständeroberfläche ist glatt. Der Einfluss der Nutung wird bereits durch einen Ersatzstrombelag berücksichtigt.
- Sättigungserscheinungen und Wirbelströme im geblechten Ständer- und Läuferisen werden vernachlässigt. Seine Permeabilität wird als unendlich groß ($\mu_{Fe} = \infty$) und seine elektrische Leitfähigkeit zu Null ($\kappa_{Fe} = 0$) angenommen.
- Die Wirbelströme besitzen neben der axialen (z -) Komponente auch eine tangentielle (x -) Komponente. Dadurch entsteht ein dreidimensionales Feldproblem, d.h. alle drei Komponenten der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte sind vorhanden.
- Die v -te Feldwelle wird durch einen Ersatzstrombelag an der Ständerbohrung ($y = -\delta$) angeregt.

Im Fall der zweidimensionalen Wirbelströmung gilt für den Ersatzstrombelag

$$\underline{a}_{1,v}(x, z, t) = \hat{a}_{1,v} \varphi(z) \cos(a_v x - \omega_v t) \quad (1)$$

bzw. als komplexer Augenblickswert

$$\underline{a}_{1,v}(x, z, t) = \hat{a}_{1,v} \varphi(z) e^{j(a_v x - \omega_v t)}$$

Die Funktion $\varphi(z)$ berücksichtigt den Effekt der endlichen Länge der Permanentmagnete.

3 Axiale Feldverteilung

Für die Berechnung zweidimensionaler Wirbelstromerscheinungen, d.h. für die Erfassung des Effektes der endlichen Länge der Permanentmagnete müssen die axialen Verteilungen der Durchflutung bzw. des anregenden Strombelages und des Vektorpotentials durch eine normierte, möglichst einfache analytische Funktion beschrieben werden.

Da bereits die Berechnung der eindimensionalen Wirbelstromerscheinungen vorwiegend auf Hyperbelfunktionen [3] geführt hat, wird für die axialen Feldverteilungen ebenfalls ein Ansatz mit einer Hyperbelfunktion gewählt:

$$\varphi(z) = 1 - 2 e^{-\eta/2} \cosh(\eta z/1) \quad (2)$$

Sie hat den Vorteil, dass ihr Verlauf durch einen Parameter η vollständig gekennzeichnet wird, s. Bild 2.

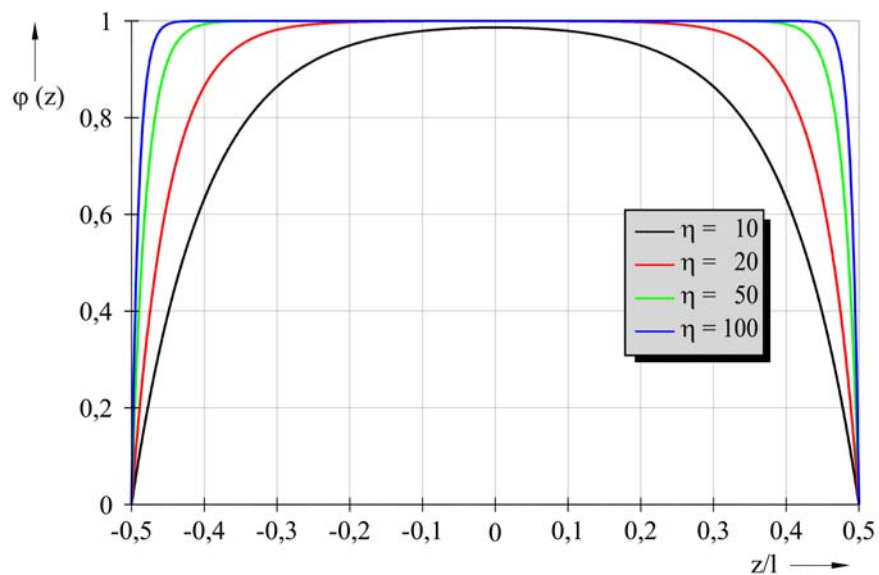


Bild 2: Axiale Feldverteilung

Ist die Länge der Magnete groß gegenüber ihrer Breite, so hat der Randeffekt nur geringen Einfluss, die normierte axiale Feldverteilung nähert sich zunehmend einer Rechteckfunktion, der Parameter η muss hoch gewählt werden usw.

4 Fourieranalyse der axialen Feldverteilung

So elegant die Approximation der axialen Feldverteilungen durch die Funktion $\varphi(z)$ gemäß Gl. (2) mit ihrem nur einen Parameter η erscheint, für die Lösung der Wirbelstromdifferentialgleichung ist sie leider nicht bzw. nicht direkt geeignet. Im Hinblick auf die Lösung der charakteristischen Gleichung wird eine Approximation der axialen Feldverteilungen benötigt, die die Forderung

$$\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} = K \varphi(z) \quad (3)$$

erfüllt, wobei K ein reeller Faktor ist. Eine solche Approximation erhält man, wenn man den Effekt der endlichen Länge der Magnete gemäß Bild 3 als eine unendliche Folge von in axialer Richtung hintereinander liegenden Permanentmagneten betrachtet.

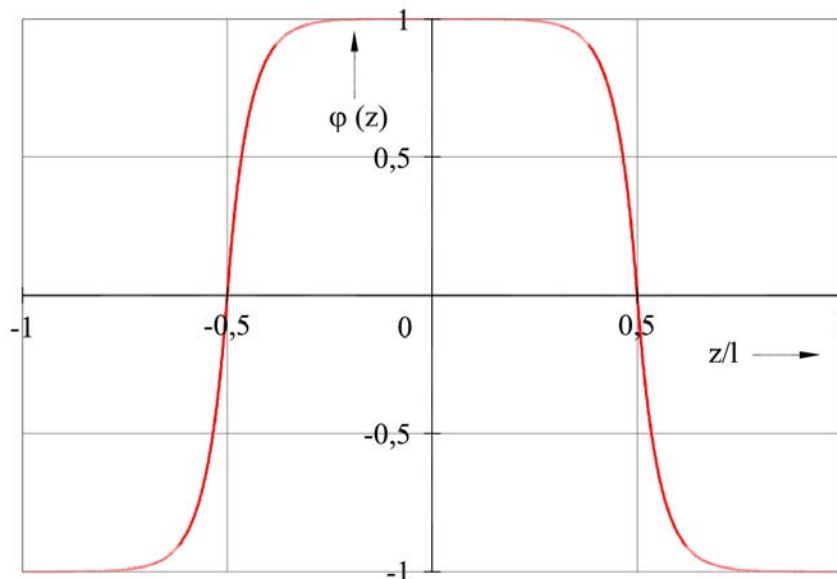


Bild 3: Axiale Feldverteilung als unendliche Folge

Diese Erweiterung erlaubt die Darstellung der Funktion $\varphi(z)$ als Fourier-Reihe:

$$\varphi(z) = 1 - 2 e^{-\eta/2} \cosh(\eta z/l) = \sum_{k=1,3,5}^m \frac{F_k}{k} \cos(k b z) \quad (4)$$

Darin ist $b = \pi/l$.

Für die Fourier-Koeffizienten gilt:

$$F_k = \frac{4}{\pi} \frac{\eta^2 - (k\pi)^2 e^{-\eta}}{\eta^2 + (k\pi)^2} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{wobei} \quad k = 2g + 1 \quad g = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Die Fourier-Entwicklung erfüllt die Forderung nach Gl. (3).

Ein Vergleich der Bilder 4a mit 4b und 4c zeigt, dass die Fourier-Approximation umso besser wird, je mehr Harmonische berücksichtigt werden, d.h. je größer k_{\max} gewählt wird. Allerdings wächst proportional mit k_{\max} auch der Rechenaufwand, da die Wirbelstromverluste für jede Harmonische k gesondert berechnet werden. Insbesondere muss das Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten für jede Harmonische k gesondert gelöst werden.

Allgemein gilt, dass umso mehr Harmonische berücksichtigt werden müssen, je mehr sich die axiale Feldverteilung einer Rechteckfunktion annähert, d.h. je größer das Verhältnis von Magnetlänge zu Magnetbreite l_M / b_M ist.

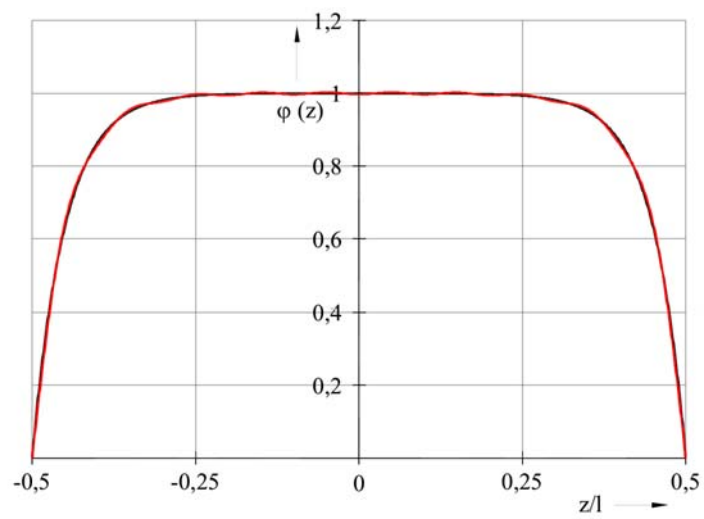
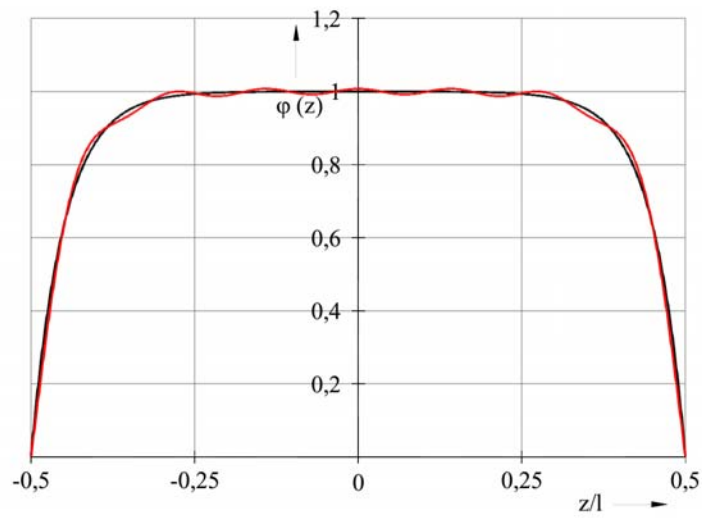
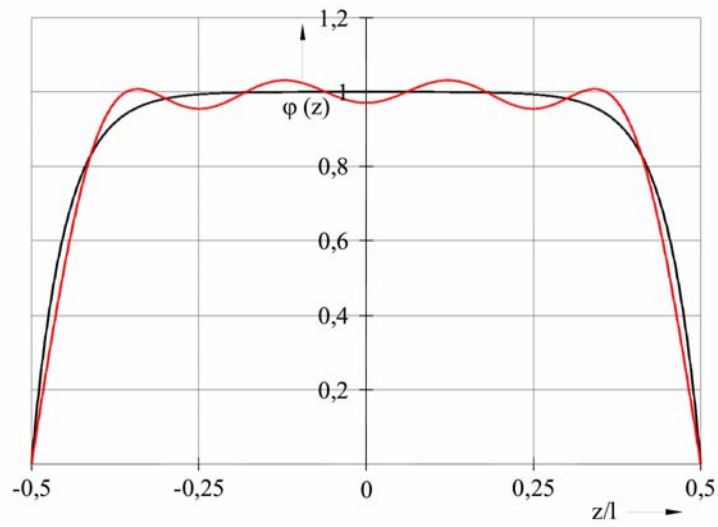


Bild 4: Fourier-Approximation der axialen Feldverteilung $\varphi(z)$ für $\eta = 20$

- a) bis $k_{\max} = 7$
- b) bis $k_{\max} = 13$
- c) bis $k_{\max} = 19$

5 Grundgleichungen und Lösungsansatz

Aus den Maxwell'schen Gleichungen für quasistationäre Felder [2] erhält man nach Einführung des Vektorpotentials gemäß

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (6)$$

als Grundgleichungen des Problems

$$\Delta \vec{A} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\vec{G} = -\kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (8)$$

Darin ist $\Delta =$ Laplace-Operator.

Für den Fall zweidimensionaler (axialer und tangentialer) Wirbelströmung muss auch das Vektorpotential zweidimensional eingeführt werden:

$$\vec{A} = \vec{i} A_x + \vec{k} A_z \quad A_y = 0 \quad (9)$$

Aus der Quellenfreiheit des Vektorpotentials

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

folgt noch

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

bzw.

$$A_x = -\int \frac{\partial A_z}{\partial z} dx \quad (11)$$

Es genügt also, zunächst die z-Komponente des Vektorpotentials zu ermitteln.

Nach Einführung komplexer Augenblickswerte gemäß

$$\underline{A}_{z,v}(x, y, z, t) = \hat{A}_{z,v}(y, z) e^{j(a_v x - \omega_v t)} \quad (12)$$

$$\underline{A}_{x,v}(x, y, z, t) = \hat{A}_{x,v}(y, z) e^{j(a_v x - \omega_v t)}$$

führen die Grundgleichungen auf:

$$\Delta \underline{A}_{z,v} = \frac{\partial^2 \underline{A}_{z,v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_{z,v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_{z,v}}{\partial z^2} = -j \omega_v \kappa \mu \underline{A}_{z,v} \quad (13)$$

$$\underline{A}_{x,v} = -\int \frac{\partial \underline{A}_{z,v}}{\partial x} dx \quad (14)$$

sowie

$$\underline{G}_{x,v} = +j \omega \kappa \underline{A}_{x,v} \quad (15)$$

$$\underline{G}_{z,v} = +j \omega \kappa \underline{A}_{z,v} \quad (16)$$

Zur Verkürzung der Schreibweise wird auf eine besondere Kennzeichnung der betrachteten v -ten Feldwelle verzichtet, d.h. ω, f, τ_p bezeichnen im Folgenden die Größen der v -ten Feldwelle.

Die allgemeinen Lösungen von Gl.(13) lauten für den Bereich des Luftspaltes

$$\underline{A}_{z,1} = \frac{\mu_0 \hat{a}_1}{a} \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \cos(kbz) (\underline{C}_{1,k} \sinh(c_k y) + \underline{D}_{1,k} \cosh(c_k y)) e^{j(ax-\omega t)} \quad (17)$$

und den Bereich des Magnetmaterials

$$\underline{A}_{z,2} = \frac{\mu_0 \hat{a}_1}{a} \mu_r \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \cos(kbz) (\underline{C}_{2,k} \sinh(\underline{q}_k y) + \underline{D}_{2,k} \cosh(\underline{q}_k y)) e^{j(ax-\omega t)} \quad (18)$$

Über die charakteristische Gleichung

$$-a^2 + \underline{q}_k^2 - (kb)^2 = \underline{q}_k^2 - c_k^2 = -j\omega \kappa \mu = -j\alpha_k c_k^2 \quad (19)$$

erhält man

$$\underline{q}_k^2 = (\beta_k - j\sigma_k)^2 c_k^2 = (1 - j\alpha_k) c_k^2$$

$$\underline{q}_k = (\beta_k - j\sigma_k) c_k \quad (20)$$

$$\beta_k = \left| \sqrt{\frac{|\sqrt{1 + \alpha_k^2}| + 1}{2}} \right| \quad (21)$$

$$\sigma_k = \left| \sqrt{\frac{|\sqrt{1 + \alpha_k^2}| - 1}{2}} \right| \quad (22)$$

wobei

$$c_k = \left| \sqrt{a^2 + (kb)^2} \right| = a \left| \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right| = a \left| \sqrt{1 + \left(\frac{\tau_p}{l}\right)^2} \right| \quad (23)$$

$$\alpha_k = \frac{\omega \kappa \mu}{c_k^2} \quad (24)$$

und

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu}} \quad (25)$$

die Eindringtiefe der betrachteten v -ten Feldwelle in das Magnetmaterial sowie

$$a = \pi / \tau_p \quad \text{und} \quad b = \pi / l \quad (26)$$

sind.

Über Gl. (14) erhält man für die x -Komponenten des Vektorpotentials im Bereich des Luftspaltes

$$\underline{A}_{x,1} = -j \frac{\mu_0 \hat{a}_1}{a} \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \frac{kb}{a} \sin(kbz) \left(\underline{C}_{1,k} \sinh(c_k y) + \underline{D}_{1,k} \cosh(c_k y) \right) e^{j(ax - \omega t)} \quad (27)$$

und des Magnetmaterials

$$\underline{A}_{x,2} = -j \frac{\mu_0 \hat{a}_1}{a} \mu_r \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \frac{kb}{a} \sin(kbz) \left(\underline{C}_{2,k} \sinh(\underline{q}_k y) + \underline{D}_{2,k} \cosh(\underline{q}_k y) \right) e^{j(ax - \omega t)} \quad (28)$$

6 Flussdichteverteilungen

Über Gl.(6) erhält man aus der Verteilung des Vektorpotentials die x-, y- und z-Komponenten der magnetischen Flussdichte. Für den Bereich des Magnetmaterials erhält man:

$$\underline{B}_{x,2} = \mu_0 \hat{a}_1 \mu_r \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \frac{q_k}{a} \cos(kbz) \left(\underline{C}_{2,k} \cosh(q_k y) + \underline{D}_{2,k} \sinh(q_k y) \right) e^{j(ax-\omega t)} \quad (29)$$

$$\underline{B}_{y,2} = -j \mu_0 \hat{a}_1 \mu_r \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \left[1 + \left(\frac{kb}{a} \right)^2 \right] \cos(kbz) \left(\underline{C}_{2,k} \sinh(q_k y) + \underline{D}_{2,k} \cosh(q_k y) \right) e^{j(ax-\omega t)} \quad (30)$$

$$\underline{B}_{z,2} = j \mu_0 \hat{a}_1 \mu_r \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \frac{q_k}{a} \frac{kb}{a} \sin(kbz) \left(\underline{C}_{2,k} \cosh(q_k y) + \underline{D}_{2,k} \sinh(q_k y) \right) e^{j(ax-\omega t)} \quad (31)$$

7 Bestimmungen der Integrationskonstanten

Die Integrationskonstanten bestimmen sich aus den Randbedingungen des Problems:

- An der Grenzfläche Ständerisen – Luftspalt ($y = -\delta$) muss wegen $\mu_{Fe} = \infty$ die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke gleich dem Ersatzstrombelag sein.
- An der Grenzfläche Luftspalt-Permanentmagnet ($y = 0$) müssen die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke und die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte stetig übergehen.
- An der Grenzfläche Permanentmagnet-Läuferisen ($y = h$) muss wegen $\mu_{Fe} = \infty$ die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke Null sein.

Man erhält folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{c_k}{a} \left(\underline{C}_{1,k} \cosh(c_k \delta) - \underline{D}_{1,k} \sinh(c_k \delta) \right) = 1$$

$$\underline{C}_{1,k} - \frac{q_k}{c_k} \underline{C}_{2,k} = 0 \quad (32)$$

$$\underline{D}_{1,k} - \mu_r \underline{D}_{2,k} = 0$$

$$\underline{C}_{2,k} \cosh(q_k h) + \underline{D}_{2,k} \sinh(q_k h) = 0$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich in Matrizenschreibweise darstellen und sehr effektiv lösen. Es muss für jede berücksichtigte Harmonische k der axialen Feldverteilung gesondert gelöst werden.

8 Verteilung der Wirbelstromdichte

Die Verteilung der Wirbelstromdichte im Magnetmaterial erhält man aus der Verteilung des Vektorpotentials über die Gln. (15) und (16)

$$\underline{G}_x = +\omega \kappa \mu \frac{\hat{a}_1}{a} \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \frac{kb}{a} \sin(kbz) \left(\underline{C}_{2,k} \sinh(q_k y) + \underline{D}_{2,k} \cosh(q_k y) \right) e^{j(ax-\omega t)} \quad (33)$$

$$\underline{G}_z = +j\omega \kappa \mu \frac{\hat{a}_1}{a} \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \cos(kbz) \left(\underline{C}_{2,k} \sinh(q_k y) + \underline{D}_{2,k} \cosh(q_k y) \right) e^{j(ax-\omega t)} \quad (34)$$

9 Wirbelstromverluste

Die Wirbelstromverluste im Magnetmaterial werden zweckmäßig über den Poynting-schen Vektor [2], den Vektor der Energieflussdichte ermittelt.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{\underline{E}} \times \vec{\underline{H}}^* \right] \quad (35)$$

Darin ist \underline{H}^* der konjugiert komplexe Wert von \underline{H} . Über den Gauß'schen Integralsatz erhält man, dass der Energiefluss über die Oberfläche des Magnetvolumens den Wirbelstromverlusten in den Permanentmagneten entspricht.

$$P_w = \frac{1}{2} \int_{A_M} \operatorname{Re} \left[\vec{\underline{E}} \times \vec{\underline{H}}^* \right] \cdot d\vec{A} \quad (36)$$

Da die x- und die z-Komponente des Poyntingschen Vektors keinen Beitrag zum Oberflächenintegral liefern und außerdem die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche Permanentmagnet-Läuferreisen Null sind, führt Gl. (36) über

$$P_w = -2\nu p \frac{1}{\kappa \mu_0 \mu_r} \cdot \frac{1}{2} \int_{-l_1/2}^{l_1/2} \int_0^{\tau_p} \operatorname{Re} \left[\underline{G}_z \cdot \underline{B}_{x,2}^* - \underline{G}_x \cdot \underline{B}_{z,2}^* \right]_{y=0} dx dz \quad (37)$$

schließlich auf

$$P_w = -2\nu p z l \alpha_p (\tau_p \hat{a}_1)^2 f \mu_0 \mu_r \frac{1}{2} \sum_{k=1,3,\dots}^m \left(\frac{F_k}{k} \right)^2 \left[1 + \left(k \frac{b}{a} \right)^2 \right] \operatorname{Re} \left[j \frac{q_k^*}{a} \underline{C}_{2,k}^* \underline{D}_{2,k} \right] \quad (38)$$

In Gl. (38) sind f die Frequenz, τ_p die Polteilung und \hat{a}_1 die Amplitude des Ersatzstrombelages der gerade betrachteten ν -ten Feldwelle in Umfangsrichtung, z ist die Anzahl der Teilmagnete in axialer Richtung.

Eine ausführliche Darstellung der Theorie wird in [4] gegeben.

10 Ermittlung des Ersatzstrombelages

Bei der Berechnung der Wirbelstromerscheinungen war vorausgesetzt worden, dass die betrachtete v -te Feldwelle durch einen Ersatzstrombelag an der Ständerbohrung gemäß Gl. (1) angeregt wird. Im Folgenden wird die Ermittlung dieses Ersatzstrombelages skizziert:

In der Theorie elektrischer Maschinen [6] wird das magnetische Luftspaltfeld üblicherweise als Produkt einer Durchflutungswelle und einer magnetischen Leitwertwelle dargestellt. Für die Radialkomponente des Ankerfeldes am Radius r_0 lässt sich z.B. ansetzen:

$$B_1(\gamma_1, r_0, t) = \mathfrak{G}_1(\gamma_1, t) \cdot \lambda(\gamma_1, r_0) \quad (39)$$

Die Anschrift der Durchflutungswelle bereitet im Allgemeinen keine Probleme. Bei Speisung einer symmetrischen Drehstromwicklung mit sinusförmigem Drehstrom der Frequenz f gilt für die entstehende Durchflutungswelle in Ständerkoordinaten γ_1 :

$$\mathfrak{G}_1(\gamma_1, t) = \sum_{\mu} \hat{\mathfrak{G}}_{1,\mu} \cos(\mu \gamma_1 - \omega t) \quad (40)$$

wobei

$$\hat{\mathfrak{G}}_{1,\mu} = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1}{2p} \frac{\xi_{1,\mu}}{\mu} \frac{1}{\mu} \sqrt{2} I_1 \quad ,$$

$$\mu = 1 \pm 6g \quad g = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$\omega = 2\pi f = p \omega_{\text{mech}}$$

sind.

Erhebliche Schwierigkeiten bereitet dagegen die Anschrift der magnetischen Leitwertfunktion des einseitig genuteten Luftspaltes. Es lässt sich zunächst nur sagen, dass sie vom betrachteten Radius r_0 abhängt und periodisch mit N_1/p ist, so sie sich als Fourierreihe darstellen lässt:

$$\lambda(\gamma_1, r_0) = \lambda_0 \sum_i \hat{\lambda}_{\text{rel},i}(r_0) \cos(i \gamma_1) \quad (41)$$

wobei

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\delta + h/\mu_r} \quad (42)$$

(δ = Luftspaltlänge, h = Magnethöhe, μ_r = rel. Permeabilität des Magnetmaterials) und

$$i = \frac{N_1}{p} g \quad g = 0, 1, 2, \dots$$

sind. Die Ermittlung der magnetischen Leitwertfunktion $\lambda(\gamma_1, r_0)$ kann entweder rein analytisch mittels konformer Abbildung [7] oder über eine numerische Feldberechnung erfolgen.

Bild 5 und Tabelle 1 zeigen eine Gegenüberstellung der Ergebnisse der analytisch und der numerisch berechneten Leitwertfunktion für $r_0 = R_{s,i} - d$ ($R_{s,i} = 90$ mm ; $d = 0,5$ mm ; $R_{s,i}$ = Ständerbohrungsradius) [5]. Man erkennt, dass das klassische Verfahren [7] der konformen Abbildung, das nur einen Bruchteil der Rechenzeit einer FEM-Berechnung benötigt, sehr genaue Ergebnisse liefert.

Für die Berechnung der Wirbelströme wird die Radialkomponente des Ankerfeldes im läuferbezogenen Koordinatensystem γ_2 benötigt. Mit Hilfe des Zusammenhanges

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \omega t = \gamma_2 + p \omega_{\text{mech}} t \quad (43)$$

erhält man:

$$B_1(\gamma_2, r_0, t) = \lambda_0 \left[\sum_{\mu} \hat{\mathfrak{G}}_{1,\mu} \cos(\mu \gamma_2) \right] \left[\sum_i \hat{\lambda}_{\text{rel},i}(r_0) \cos(i(\gamma_2 + \omega t)) \right]$$

$$B_1(\gamma_2, r_0, t) = \sum_{\mu} \sum_i \left(\hat{B}_{1,m} \cos(m \gamma_2 + (m-1) \omega t) + \hat{B}_{1,n} \cos(n \gamma_2 + (n-1) \omega t) \right) \quad (44)$$

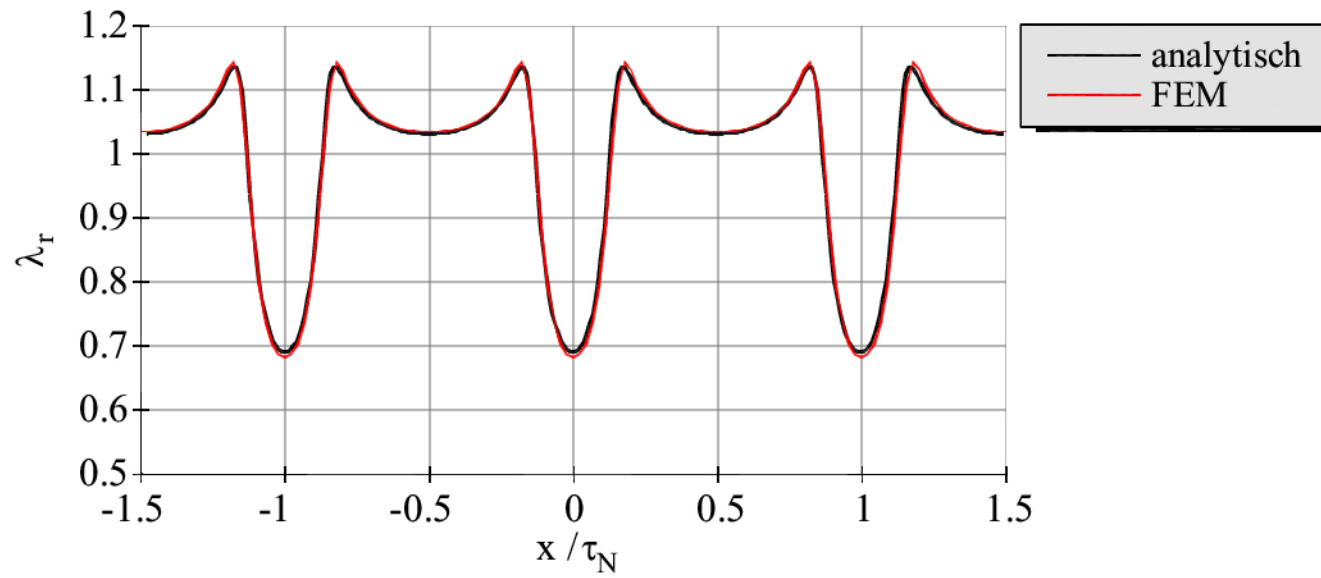


Bild 5: Verlauf der magnetischen Leitwertfunktion bei $d = 0,5$ mm
Gegenüberstellung von analytischer und FEM-Berechnung

Jede Kombination von μ und i ergibt zwei Drehfelder mit den Ordnungszahlen

$$m = \mu - i \quad \text{und} \quad n = \mu + i.$$

Beide Drehfelder haben die gleiche Amplitude

$$\hat{B}_{1,m}(r_0) = \hat{B}_{1,n}(r_0) = \frac{1}{2} \hat{G}_{1\mu} \lambda_0 \hat{\lambda}_{rel,i}(r_0) \quad (45)$$

Für ihre Drehfrequenzen und Polteilungen gilt:

$$f_m = (m-1) f \quad f_n = (n-1) f$$

$$\tau_{pm} = \tau_p / m \quad \tau_{pn} = \tau_p / n$$

Anschließend werden die Amplituden dieser Drehfelder mit dem vorgestellten Wirbelstrommodell an der Stelle $r_0 = y_0 = -\delta + d$ und $z_0 = 0$ berechnet.

Man erhält:

$$\hat{B}_{y,v}(y_0, z_0) = \mu_0 \hat{a}_{1,v} |\underline{N}_v|$$

wobei

$$\underline{N}_v = \sum_{k=1,3,\dots}^m \frac{F_k}{k} \left(\frac{c_k}{a} \right)^2 (\underline{C}_{1k} \sinh(c_k y_0) + \underline{D}_{1k} \cosh(c_k y_0))$$

Durch Gleichsetzen der nach beiden Wegen berechneten Amplituden der Drehfelder an der Stelle $r_0 = y_0$ erhält man die Amplituden der Ersatzstrombeläge:

$$\hat{a}_{1,v} = \frac{\hat{B}_{1,v}(r_0)}{\mu_0 |\underline{N}_v|} \quad (46)$$

In analoger Weise werden die anregenden Feldwellen des Polradfeldes ermittelt.

Literatur

- [1] Heil, J.: *Auslegung und Betriebsverhalten von permanenterregten Synchronmaschinen mit maschinenkommutiertem Frequenzumrichter.*
Diss. TH Darmstadt, 1990
- [2] Wunsch, G.: *Feldtheorie, Bd. I und II.*
Verlag Technik, Berlin 1976
- [3] Beckert, U.: *Berechnung der Wirbelstromverluste in den Permanentmagneten von hochtourigen PM-Synchronmaschinen.*
antriebstechnik 45(2006), H. 11, S. 42-45
- [4] Beckert, U.: *Modell und Algorithmus zur analytischen Berechnung zweidimensionaler Wirbelstromerscheinungen in den Permanentmagneten von PM-Synchronmaschinen.*
Forsch.Ber. IfE TU BAF 2006
- [5] Arnold, H.; Beckert, U.: *Analytische Berechnung der nutungsbedingten Modulation des Luftspaltfeldes von PM-Synchronmaschinen.*
Forsch.Ber. IfE TU BAF 2006
- [6] Müller; G.: *Theorie elektrischer Maschinen.*
VCH-Verlagsgesellschaft, Weinheim 1995
- [7] Ollendorff, F.: *Berechnung magnetischer Felder*
Springer Verlag, Wien 1952

Wichtigste Formelzeichen

A	Vs / m	magnetisches Vektorpotential
a_1, \hat{a}_1	A / m	Ersatz-Strombelag
B, \hat{B}	T	magnetische Flussdichte
C, D		Integrationskonstante
E	V / m	elektrische Feldstärke
f	Hz	Frequenz
G	A / m ²	Wirbelstromdichte
H	A / m	magnetische Feldstärke
k		Ordnungszahl der axialen Harmonischen
l_i	m	Magnetlänge
p		Polpaarzahl
P_w	W	Wirbelstromverluste
S	W / m ²	Poynting'sche Vektor
t	s	Zeit
x,y,z	m	kartesische Koordinaten im läuferfesten System
z		Anzahl der Teilmagnete
α_p		Polbedeckungsfaktor
δ, δ_i	m	Luftspaltlänge, ideelle Luftspaltlänge
δ	m	Eindringtiefe
Δ		Laplace-Operator
κ	S / m	elektrische Leitfähigkeit des Magnetmaterials
λ, λ_{rel}		magnetischer Leitwert, relativer Leitwert
μ	Vs / Am	Permeabilität
μ_0, μ_{Fe}	Vs / Am	Permeabilität des Vakuums, d.Dynamobleches
μ_r		relative Permeabilität des Magnetmaterials
v		Ordnungszahl der Harmonischen
τ_p	m	Polteilung
ω	1 / s	Kreisfrequenz

g	i	$\hat{\lambda}_{rel,i}$	
		FEM	analytisch
0	0	0.9874	0.9884
1	24	-0.1229	-0.1158
2	48	-0.1336	-0.1293
3	72	-0.0781	-0.0787
4	96	-0.0145	-0.0180
5	120	0.0206	0.0184
6	144	0.0234	0.0245

Tabelle 1:

Vergleich der Fourier-Koeffizienten der magnetischen Leitwertfunktion von FEM- und analytischer Berechnung ($d = 0,5 \text{ mm}$)