Fouriertransformation

Die partielle Fouriertransformation nach x einer Funktion $f(t,x)$ ist definiert durch:

$$\mathcal{F}_x\big(f(t,x)\big)\big(t,\xi\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\,\xi}\, f(t,x)\,dx$$

Die Faltung nach x zweier Funktionen $f(t,x)$ und $g(t,x)$ ist gegeben durch:

$$(f \,*_x\, g)(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x-y)\,g(t,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,g(t,x-y)\,dy$$

Rechenregeln

I) $\mathcal{F}_x\big(x^k f\big)\big(t,\xi\big) = \mathrm{i}^k\,\partial_\xi^k\,\mathcal{F}_x(f)(t,\xi)$ Multiplikationssatz

II) $\mathcal{F}_x\big(\partial_x^k f\big)\big(t,\xi\big) = \mathrm{i}^k\,\xi^k\,\mathcal{F}_x(f)(t,\xi)$ Differentationssatz

III) $\mathcal{F}_x(C\,f)(t,\xi) = C\,\mathcal{F}_x(f)(t,\xi)$ Konstantensatz

i) $\mathcal{F}_x\big(\partial_t^k f\big)\big(t,\xi\big) = \partial_t^k\,\mathcal{F}_x(f)(t,\xi)$

ii) $\mathcal{F}_x\big(t^k f\big)\big(t,\xi\big) = t^k\,\mathcal{F}_x(f)(t,\xi)$

IV) $\mathcal{F}_x(f+g)(t,\xi) = \mathcal{F}_x(f)(t,\xi) + \mathcal{F}_x(g)(t,\xi)$ Additionssatz

V) $\mathcal{F}_x(f \,*_x\, g)(t,\xi) = \mathcal{F}_x(f)(t,\xi)\,\mathcal{F}_x(g)(t,\xi)\,\sqrt{2\pi}$ Faltungssatz

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}_x(f)\,\mathcal{F}_x(g)\right)(t,x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}_x(f)\right) \,*_x\, \mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}_x(g)\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(f \,*_x\, g)\end{aligned}$$

	$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)$	$G(\xi)$	$\mathcal{F}^{-1}(G)(x)$
$a > 0$:	$\mathrm{e}^{-a\,x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}$	$\mathrm{e}^{-a\,\xi^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$
$a \in \mathbb{R}$:	$\mathrm{e}^{-a\,\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{\xi^2+a^2}$	$\mathrm{e}^{-a\,\lvert\xi\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{x^2+a^2}$

Laplacetransformation

Die partielle Laplacetransformation nach t einer Funktion $f\,(t,x)$ ist definiert durch:

$$\mathcal{L}_t\,\big(f\,(t,x)\,\big)\,\big(s,x\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\,t}\,f\,(t,x)\,dx$$

Die Faltung nach x zweier Funktionen $f\,(t,x)$ und $g\,(t,x)$ ist gegeben durch:

$$(f\ *_t\ g)\,(t,x) = \int_0^t f\,(t-y,x)\,g\,(y,x)\,dy = \int_0^t f\,(y,x)\,g\,(t-y,x)\,dy$$

Rechenregeln

I) $\mathcal{L}_t\,(t^n\,f)\,(s,x) = (-1)^n\ \partial_s^n\,\mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x)$ Multiplikationssatz

II) $\mathcal{L}_t\,(\partial_t^n\,f)\,(s,x) = s^n\,\mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x) - \big[s^{n-1}\,f\,(+0,x) +$ Differentiationssatz

$s^{n-2}\,f\,(+0,x) + \cdots + s\,f\,(+0,x) + f\,(+0,x)]$

III) $\mathcal{L}_t\,(C\,f)\,(s,x) = C\,\mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x)$ Konstantensatz

i) $\mathcal{L}_t\,(x^n\,f)\,(s,x) = x^n\,\mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x)$

ii) $\mathcal{L}_t\,(\partial_x^n\,f)\,(s,x) = \partial_x^n\,\mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x)$

IV) $\mathcal{L}_t\,(f+g)\,(s,x) = \mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x) + \mathcal{L}_t\,(g)\,(s,x)$ Additionssatz

V) $\mathcal{L}_t\,(f\ *_t\ g)\,(s,x) = \mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x)\ \mathcal{L}_t\,(g)\,(s,x)$ Faltungssatz

$\mathcal{L}_s^{-1}\,\big(\mathcal{L}_t\,(f)\ \mathcal{L}_t\,(g)\big)\,\big(t,x\big) = \mathcal{L}_s^{-1}\,\big(\mathcal{L}_t\,(f)\,\big)\ *_t\ \mathcal{L}_s^{-1}\,\big(\mathcal{L}_t\,(g)\,\big) = f\ *_t\ g$

VI) $\mathcal{L}_t\,\big(f\,(t-h,x)\,\big)\,\big(s,x\big) = \mathrm{e}^{-h\,s}\,\mathcal{L}_t\,(f)\,(s,x)$ Verschiebungssatz

$f\,(t)$	$\mathcal{L}\,(f)\,(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$\mathrm{e}^{-a\,t}$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos\,(a\,t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathrm{e}^{-a\,t}\cos t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+1}$