Übungsaufgabe Laplacetransformation

Wir betrachten die zeit- und ortsabhängige Auslenkung $u\,(t,x)$ einer Welle im eindimensionalen Halbraum:

$$u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0 \qquad (x,t) > 0 \tag{1}$$

Mit der Randbedingung:

$$u\,(t,0) = f\,(t) \tag{2}$$

und der Abklingbedingung:

$$\lim_{x\to\infty} u\,(t,x) = 0 \tag{3}$$

Die Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t=0$ ist Null:

$$u\,(0,x) = 0 \qquad\qquad u_t\,(0,x) = 0 \tag{4}$$

a) Laplacetransformation von $u\,(t,x)$ sowie der Randbedingung (2) und der Abklingbedingung (3)

$$\mathcal{L}_t\,(u)\,(s,x) = v\,(s,x) \tag{5}$$

$$\underbrace{\mathcal{L}_t\,(u\,(t,0)\,)\,(s,0)}_{=v(s,0)} = \mathcal{L}\,(f)\,(s) \tag{6}$$

$$\underbrace{\mathcal{L}_t\left(\lim_{x\to\infty} u\,(t,x)\right)\left(s,x\right)}_{\substack{\text{Annahmed, dass lim und LT}\\ \text{vertauscht werden dürfen}}} = \underbrace{\mathcal{L}\,(0)\,(s)}_{=0}$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\mathcal{L}_t\,(u)\,(s,x)}_{=v(s,x)} = 0 \tag{7}$$

b) Laplacetransformation der partiellen Differentialgleichung (1)

$$\underbrace{\mathcal{L}_t\left(u_{tt} - c^2\, u_{xx}\right)\left(s,x\right)}_{\substack{\text{Additionssatz und}\\ \text{Konstantensatz}}} = \underbrace{\mathcal{L}\,(0)\,(s)}_{=0} \tag{8}$$

$$\Downarrow$$

$$= \underbrace{\mathcal{L}_t\left(\partial_t^2 u\right)\left(s,x\right)}_{\text{Differentiationssatz}} + c^2\,\partial_x^2\,\underbrace{\mathcal{L}_t\,(u)\,(s,x)}_{=v(s,x)}$$

$$\Downarrow$$

$$= s^2\,\underbrace{\mathcal{L}_t\,(u)\,(s,x)}_{=v(s,x)} - \underbrace{\left[s^1\,u\,(0,x) + u_t\,(0,x)\right]}_{\substack{=0\\ \text{folgt aus Gleichung (4)}}}$$

Damit ergibt sich die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\boxed{s^2\, v - c^2\, v_{xx} = 0} \tag{9}$$

c) Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung (9)

- Verwenden des Ansatzes $v\,(s,x) = \mathrm{e}^{\alpha\, x}$ in Gleichung (9):

$$\left(s^2 - c^2\,\alpha^2\right)\mathrm{e}^{\alpha\, x} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \pm\frac{s}{c}$$

$$\underline{v\,(s,x) = C_1\,(s)\,\mathrm{e}^{\frac{s}{c}\,x} + C_2\,(s)\,\mathrm{e}^{-\frac{s}{c}\,x}} \tag{10}$$

- Aus der transformierten Abklingbedingung (7) folgt:

$$\lim_{x\to\infty} v\,(s,x) = \underbrace{C_1\,(s)}_{=0}\cdot\infty + C_2\,(s)\cdot 0 = 0 \tag{11}$$

- Berechnen von $C_2\,(s)$ mithilfe der transformierten Randbedingung (6)

$$v\,(s,0) = C_2\,(s) = \mathcal{L}\,(f)\,(s)$$

$$\boxed{v\,(s,x) = \mathcal{L}\,(f)\,(s)\,\mathrm{e}^{-\frac{s}{c}\,x}} \tag{12}$$

d) Rücktransformation der Lösung aus Gleichung (12)

$$u\,(t,x) = \mathcal{L}_s^{-1}\,(v)\,(t,x)$$

$$u\,(t,x) = \mathcal{L}_s^{-1}\,\underbrace{\left(\mathcal{L}\,(f)\,\mathrm{e}^{-\frac{s}{c}}\right)}_{\text{Verschiebungssatz}}\,\left(t,x\right) \tag{13}$$

$$\Downarrow$$

$$= \mathcal{L}\,\left(f\,\left(t - \tfrac{x}{c}\right)\,\right)\,\left(s\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boxed{u\,(t,x) = f\,\left(t - \tfrac{x}{c}\right)}} \tag{14}$$

Es ist zu beachten, dass für $t \leq 0$ die Funktion $f\,(t) = 0$ gesetzt werden muss, da sonst die Lösungsdarstellung keinen Sinn macht. Eine Lösung bis Gleichung (13) ist in der Klausur allerdings ausreichend.