Übungsaufgabe Fouriertransformation

Wir betrachten die zeit- und ortsabhängige Temperaturverteilung $u\,(t, x)$ im unendlichen eindimensionalen Medium unter Berücksichtigung eines Zeit- und Ortsabhängigen Quellterms $q\,(t, x)$:

$$u_t - K\,u_{xx} = q \tag{1}$$

Die Anfangstemperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ sei durch eine allgemeine Funktion $f\,(x)$ gegeben:

$$u\,(0, x) = f \tag{2}$$

a) Fouriertransformation von $u\,(t, x)$ und der Anfangsbedingung (2)

$$\mathcal{F}_x\,(u)\,(t, \xi) = v\,(t, \xi) \tag{3}$$

$$\underbrace{\mathcal{F}_x\,\big(u\,(0, x)\,\big)\,\big(0, \xi\big)}_{=\,v(0,\xi)} = \mathcal{F}\,(f)\,(\xi) \tag{4}$$

b) Fouriertransformation der partiellen Differentialgleichung (1)

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\mathcal{F}_x\,(u_t - K\,u_{xx})\,(t, \xi)}_{\text{Additionssatz}} = \mathcal{F}_x\,(q)\,(t, \xi) \qquad (5)\\
&\Downarrow\\
&= \underbrace{\mathcal{F}_x\,(\partial_t u)\,(t, \xi) - \mathcal{F}_x\,\big(K\,\partial_x^2 u\big)\,\big(t, \xi\big)}_{\text{Konstantensatz}}\\
&\Downarrow\\
&= \partial_t\,\underbrace{\mathcal{F}_x\,(u)\,(t, \xi)}_{=\,v(t,\xi)} - K\,\underbrace{\mathcal{F}_x\,\big(\partial_x^2 u\big)\,\big(t, \xi\big)}_{\text{Differentiationssatz}}\\
&\Downarrow\\
&= (\mathrm{i}\,\xi)^2\,\underbrace{\mathcal{F}_x\,(u)\,(t, \xi)}_{=\,v(t,\xi)}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\boxed{v_t + K\,\xi^2\,v = \mathcal{F}_x\,(q)\,(t, \xi)} \tag{6}$$

c) Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung (6)

- Ermitteln der homogenen Lösung:

$$v_t^{\mathrm{H}} + K\,\xi^2\,v^{\mathrm{H}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v^{\mathrm{H}}\,(t, \xi) = C\,(\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t}} \tag{7}$$

- Bestimmen der allgemeinen Lösung durch Variation der Konstanten:

$$C(\xi) \;\rightarrow\; C(t,\xi) \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt:

$$v(t,\xi) = C(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} \tag{9}$$

$$v_t(t,\xi) = C_t(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} - K\xi^2\,C(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} \tag{10}$$

Einsetzen von (9) und (10) in (6):

$$C_t\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} - C\,K\,\xi^2\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} + C\,K\,\xi^2\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} = \mathcal{F}_x(q)(t,\xi)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{F}_x(q)(t,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2\,t}$$

$$C(t,\xi) = \int \mathcal{F}_x(q)(t,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2\,t}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{C(t,\xi) = \int_0^t \mathcal{F}_x(q)(\tau,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2\,\tau}\,d\tau + \mathcal{C}(\xi)} \tag{11}$$

Einsetzen von (11) in Gleichung (9):

$$v(t,\xi) = \mathcal{C}(\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} + \int_0^t \mathcal{F}_x(q)(\tau,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau)}\,d\tau\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} \tag{12}$$

Bestimmen von $\mathcal{C}(\xi)$ durch einsetzen der transformierten Anfangsbedingung (4) in Gleichung (12):

$$v(0,\xi) = \mathcal{C}(\xi) + \underbrace{\int_0^0 \mathcal{F}_x(q)(\tau,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau)}\,d\tau}_{=0} = \mathcal{F}(f)(\xi)$$

$$\underline{\mathcal{C}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)} \tag{13}$$

Damit ergibt sich für die Lösung des Hilfproblems:

$$\boxed{v(t,\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} + \int_0^t \mathcal{F}_x(q)(\tau,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau-t)}\,d\tau} \tag{14}$$

d) Rücktransformation der Lösung aus Gleichung (14)

$$
\begin{aligned}
u\,(t,x) &= \mathcal{F}_\xi^{-1}\,(v)\,(t,x) \\
&= \mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}\,(f)\,(\xi)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t} + \int_0^t \mathcal{F}_x\,(q)\,(\tau,\xi)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau-t)}\,d\tau\right)\Big(t,x\Big) \\
&= \mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}\,(f)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t}\right)\Big(t,x\Big) + \mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\int_0^t \mathcal{F}_x\,(q)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau-t)}\,d\tau\right)\Big(t,x\Big) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Die Lösung bis Gleichung (15) ist in der Klausur ausreichend, für weitere Schritte kann man Zusatzpunkte erhalten:

- $$\underbrace{\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}\,(f)\,\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t}\right)\Big(t,x\Big)}_{\text{Faltungssatz}}$$

$$\Downarrow$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f \,*_x\, \mathcal{F}_\xi^{-1}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{-K\,\xi^2\,t}\right)}_{\substack{\text{Gaußfunktion}\\ a=K\,t}}\Big(t,x\Big)\right]
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f \,*_x\, \frac{1}{\sqrt{2\,K\,t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\,K\,t}}\right] \qquad (16)
$$

- $$\underbrace{\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\int_0^t \mathcal{F}_x\,(q)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau-t)}\,d\tau\right)\Big(t,x\Big)}_{\substack{\text{Annahme, dass Integral und inverese FT}\\ \text{vertauscht werden dürfen}}}$$

$$\Downarrow$$

$$
= \int_0^t \underbrace{\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}_x\,(q)\,\mathrm{e}^{K\,\xi^2(\tau-t)}\right)\Big(\tau,t,x\Big)}_{\text{Faltungssatz}}\,d\tau
$$

$$
= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[q\,(\tau,x)\,*_x\,\mathcal{F}_\xi^{-1}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{K\,\xi^2\,(\tau-t)}\right)}_{\substack{\text{Gaußfunktion}\\ a=K(t-\tau)}}\Big(\tau,t,x\Big)\right]d\tau
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t q\,(\tau,x)\,*_x\,\frac{1}{\sqrt{2K(t-\tau)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4K(t-\tau)}}\,d\tau \qquad (17)
$$

Gleichung (16) und (17) können jetzt noch in Gleichung (15) eingesetzt werden. Ohne weitere Kenntnisse über q und f machen weitere Schritt hier keinen Sinn. Wenn die Funktionen bekannt wären könnte man versuchen die uneigentlichen Integrale der Faltungen zu lösen und nach τ integrieren.