Fouriersche Methode - Kochrezept

a) • anwenden des Produktansatzes

Beispiel I

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \longrightarrow \quad u(t,x) = T(t)\,X(x)$$

Beispiel II

$$u_t = \frac{1}{R^2}\,u_{\varphi\varphi} \quad \longrightarrow \quad u(t,\varphi) = T(t)\,\Phi(\varphi)$$

• einsetzen in die PDGL und Separation der Veränderlichen

Beispiel I

$$T''\,X = X''\,T \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda} \qquad \lambda \ldots \text{ Separationskonstante}$$

Beispiel II

$$T'\,\Phi = \frac{1}{R^2}\,\Phi''\,T \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R^2\,\frac{T'}{T} = \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda} \qquad \lambda \ldots \text{ Separationskonstante}$$

• beide Schritte gegebenenfalls mehrfach durchführen (Beispiel III)

Beispiel III

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \longrightarrow \quad u(t,x,y) = T(t)\,W(x,y)$$

$$T''\,W - W_{xx}\,T - W_{yy}\,T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{T''}{T} = \frac{W_{xx} + W_{yy}}{W} = \lambda}$$

$$W_{xx} + W_{yy} - \lambda\,W = 0 \quad \longrightarrow \quad W(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$X''\,Y - \lambda\,X\,Y = -Y''\,X \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{X''}{X} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu}$$

Beispiel III wird hier nicht weiter fortgeführt, kann aber dem Skript entnommen werden (Seiten: 42-43 und 46-48).

Wichtig!

Im Falle von nicht konstanten Koeffizienten vor der Quantität oder einer ihrer Ableitungen, sollten diese auf die Seite gebracht werden welche schon von diesen Variablen abhängt (siehe Skript Seite 34-36).

b) • nach gegebenenfalls mehrstufigem Verfahren ergibt sich eine Menge gewöhnlicher Differentialgleichungen

Beispiel I

$T'' - \lambda T = 0 \quad$ und $\quad X'' - \lambda X = 0$

Beispiel II

$T' - \lambda T = 0 \quad$ und $\quad \Phi'' - \lambda \Phi = 0$

Beispiel III

$T'' - \lambda T = 0\;, \quad X'' - (\lambda + \mu)\, X = 0 \quad$ und $\quad Y'' + \mu Y = 0$

c) • die Randbedingungen an die vorgelegte PDGL werden zu Randbedingungen an die erhaltenen gewöhnlichen Differentialgleichungen

Beispiel I — fest eingespannte schwingende Saite (siehe 2. Tutorium)

$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = X(L) = 0$

Beispiel II — Wärmeleitung in kreisförmigem Draht

Anstelle der Randbedingung tritt die Periodizitätsbedingung auf:

$u(t,\varphi) = u(t,\varphi + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$

d) • damit werden die Randwertprobleme zu **Sturm-Liouville Problemen** (Eigenwertproblemen)

Beispiel I

$X'' - \lambda X = 0\,, \quad X(0) = X(L) = 0$

Beispiel II

$\Phi'' - \lambda \Phi = 0\,, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$

• gilt für Randbedingungen des Drichilet- und Neumann-Typ's

e) • suchen der Lösungen des Randwertproblems, dazu wird wie folgt vorgegangen:

• lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Wichtig!

Fallunterscheidung bei der Separationskonstante (z. B. λ) notwendig:

$$\lambda = 0\,, \quad \lambda > 0 \quad \text{und} \quad \lambda < 0$$

Beispiel I

$$\begin{aligned} \lambda = 0: &\quad X'' = 0 && \Rightarrow \quad X(x) = a\,x + b \\ \lambda > 0: &\quad X'' - \lambda\,X && \Rightarrow \quad X(x) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,x} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,x} \\ \lambda < 0: &\quad X'' - \lambda\,X && \Rightarrow \quad X(x) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) + D\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) \end{aligned}$$

Beispiel II

$$\begin{aligned} \lambda = 0: &\quad \Phi'' = 0 && \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = a\,\varphi + b \\ \lambda > 0: &\quad \Phi'' - \lambda\,\Phi && \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,\varphi} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,\varphi} \\ \lambda < 0: &\quad \Phi'' - \lambda\,\Phi && \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,\varphi\right) + D\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,\varphi\right) \end{aligned}$$

- ermitteln von Konstanten und Eigenwerten aus den Randbedingungen

Beispiel I

Aus den Randbedingungen $X(0) = X(L) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda = 0: &\quad a = 0\,, \quad b = 0 && \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0 \\ \lambda > 0: &\quad A = 0\,, \quad B = 0 && \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0 \\ \lambda < 0: &\quad C = 0\,, \quad D = \text{const.} && \Rightarrow \quad \lambda_k = -\left(\tfrac{k\,\pi}{L}\right)^2 \end{aligned}$$

Beispiel II

Aus den Randbedingungen $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda = 0: &\quad a = 0\,, \quad b = \text{const.} && \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = b \\ \lambda > 0: &\quad A = 0\,, \quad B = 0 && \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) \equiv 0 \\ \lambda < 0: &\quad C = \text{const.}\,, \quad D = \text{const.} && \Rightarrow \quad \lambda_k = -k^2 \end{aligned}$$

- gesucht sind nur von Null verschiedene Lösungen

f) • dies führt zu diskret verteilten Eigenfunktionen

Beispiel I

$X_k(x) = D\sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right) = \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)$ $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow\;$ $k = 0$ entfällt, da $X_0(x) \equiv 0$

Beispiel II

$\Phi_k(\varphi) = C\cos(k\,\varphi) + D\sin(k\,\varphi)$ $\qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow\;$ $k = 0$ entfällt nicht, da $\Phi_0(\varphi) = \text{const.} = C$, außerdem deckt es automatisch die Lösung $\Phi(\varphi) = \text{const.}$ für den Fall von $\lambda = 0$ mit ab.

- man nennt λ_k Eigenwert und $X_k(x)$ bzw. Φ_k die zugehörige Eigenfunktion

Wichtig!

Enthält die Eigenfunktion nur eine Konstante so kann diese Eins gesetzt werden, da diese später im Zuge des Produktansatzes wieder mit einer Konstanten multipliziert wird und sowieso eine neue Konstante entsteht. Im Falle von zwei Konstanten wie in Beispiel II funktioniert dies allerdings nicht.

g) • ermitteln einer allgemeinen Lösung T_k der Zeit-Differentialgleichung unter Zuhilfenahme der zuvor berechneten Eigenwerte λ_k

Beispiel I

$$T'' + \left(\frac{k\,\pi}{L}\right)^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k\,(t) = C_k^* \cos\left(\frac{k\,\pi}{L}\,t\right) + D_k^* \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,t\right)$$

Beispiel II

$$T' + \frac{k^2}{R^2}\,T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k\,(t) = C_k^*\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{R^2}\,t}$$

h) • formulieren der Lösung im Sinne des Produktansatzes

Beispiel I

$$u_k\,(t, x) = \left[C_k^* \cos\left(\frac{k\,\pi}{L}\,t\right) + D_k^* \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,t\right)\right] \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)$$

Beispiel II

$$u_k\,(t, \varphi) = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{R^2}\,t}\left[\widetilde{C}_k \cos\left(k\,\varphi\right) + \widetilde{D}_k \sin\left(k\,\varphi\right)\right]$$

i) • anwenden des Superpositionsprinzips

Beispiel I

$$u\,(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k^* \cos\left(\frac{k\,\pi}{L}\,t\right) + D_k^* \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,t\right)\right] \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\,x\right)$$

Beispiel II

$$u\,(t, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{R^2}\,t}\left[\widetilde{C}_k \cos\left(k\,\varphi\right) + \widetilde{D}_k \sin\left(k\,\varphi\right)\right]$$

j) • entwickeln der Anfangsfunktionen (Vergleichsfunktionen) in gleichmäßig konvergente Fourierreihen mithilfe des Entwicklungssatzes

Beispiel I

AB: $u(0,x) = u_0(x)$ und $u_t(0,x) = v_0(x)$

mit $u_0(0) = u_0(L) = 0$ und $v_0(0) = v_0(L) = 0$

da Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind, können u_0 und v_0 als Vergleichsfunktionen aufgefasst werden:

$u(0,x) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right)$

$u_t(0,x) = v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k\, X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right)$

Beispiel II

AB: $u(0,\varphi) = u_0(\varphi)$ mit $u_0(\varphi) = u_0(\varphi + 2\pi)$

da Verträglichkeitsbedingung erfüllt, kann u_0 als Vergleichsfunktion aufgefasst werden:

$u(0,\varphi) = u_0(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k} \cos(k\,\varphi) + C_{2k} \sin(k\,\varphi)$

k) • bestimmen von den Fourierkoeffizienten der zur Reihe entwickelten Anfangs- bzw. Vergleichsfunktion

Beispiel I

$$C_k = \frac{\int_0^L u_0(x)\, X_k(x)\, dx}{\int_0^L X_k^2(x)\, dx} = \frac{\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) dx}$$

$$D_k = \frac{\int_0^L v_0(x)\, X_k(x)\, dx}{\int_0^L X_k^2(x)\, dx} = \frac{\int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) dx}$$

Beispiel II

$$C_{1k} = \frac{\int_0^{2\pi} u_0(\varphi) \cos(k\,\varphi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \cos^2(k\,\varphi)\, d\varphi} \qquad C_{2k} = \frac{\int_0^{2\pi} u_0(\varphi) \sin(k\,\varphi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \sin^2(k\,\varphi)\, d\varphi}$$

l) • Koeffizientenvergleich zwischen der Lösung aus dem Superpositionsansatz für $t = 0$ mit den aus den Anfangsfunktionen entwickelten Reihen

Beispiel I

$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) \quad \Rightarrow \quad C_k^* = C_k$

$u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^* \frac{k\,\pi}{L} \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}\, x\right) \quad \Rightarrow \quad D_k^* = \frac{D_k\, L}{k\,\pi}$

Beispiel II

$u\,(0,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{C}_k \cos{(k\,\varphi)} + \widetilde{D}_k \sin{(k\,\varphi)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k} \cos{(k\,\varphi)} + C_{2k} \sin{(k\,\varphi)}$

$\Rightarrow \ \widetilde{C}_k = C_{1k}$ und $\widetilde{D}_k = C_{2k}$

m) • gegebenenfalls Konvergenzuntersuchung der erhaltenen Lösung

Fouriersche Methode - Übungsaufgabe

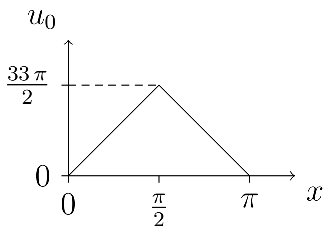
Wir betrachten die zeitabhängige Temperaturverteilung u in einem eindimensionalen Stab der Länge π mit dem Wärmeleitkoeffizient $K = 1$ (normierte Wärmeleitungsgleichung):

$$u_t = u_{xx} \qquad u = u(t, x) \tag{1}$$

Die beiden Enden des Stabes werden auf eine konstante Temperatur von Null gekühlt. Damit ergibt sich die Randbedingung:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \tag{2}$$

Es ist folgende Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben:



$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 33\,x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 33\,(\pi - x) & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \tag{3}$$

a) Separation der PDGL

Produktansatz und bilden der benötigten Ableitungen:

$$u(t, x) = X(x)\,T(t) \tag{4}$$

$$u_t = T'\,X \qquad u_{xx} = X''\,T \tag{5}$$

Einsetzen von (5) in Gleichung (1):

$$T'\,X = X''\,T \quad \Rightarrow \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \tag{6}$$

b) Gewöhnliche DGL

Aus Gleichung (6) lassen sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen gewinnen:

$$T' - \lambda\,T = 0 \tag{7}$$

$$X'' - \lambda\,X = 0 \tag{8}$$

c) Randbedingung der gewöhnlichen DGL

Übertragen der in Gleichung (2) gegebenen Randbedingung auf Gleichung (8)

$$u\,(t,0) = u\,(t,0) \quad \Rightarrow \quad X\,(0) = X\,(\pi) = 0 \tag{9}$$

d) Sturm Louvillesches Randwertproblem

Aus Gleichung (8) und (9) erhält man das Eigenwertproblem:

$$X'' - \lambda\, X = 0 \tag{10}$$

e) $\lambda = 0$

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{X\,(x) = a\,x + b} \tag{11}$$

Einsetzen von (9) in (11):

$$a\,0 + b = 0 \;\; \text{und} \;\; a\,\pi + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0 \quad \Rightarrow \quad X \equiv 0$$

e) $\lambda > 0$

$$\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad X'' - \lambda\, X = 0 \tag{12}$$

$$\text{Ansatz:} \qquad X\,(x) = \mathrm{e}^{\beta\, x} \quad \to \quad X''\,(x) = \beta^2\,\mathrm{e}^{\beta\, x} \tag{13}$$

Einsetzen von (13) in (12):

$$\beta^2\,\mathrm{e}^{\beta\, x} - \lambda\,\mathrm{e}^{\beta\, x} = 0$$

$$\underbrace{\mathrm{e}^{\beta\, x}}_{\neq\, 0}\left(\beta^2 - \lambda\right) = 0$$

$$\beta^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \tag{14}$$

Das ergibt die allgemeine Lösung:

$$\underline{X\,(x) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\, x} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\, x}} \tag{15}$$

siehe Höhere Mathematik für Ingenieure II zum lösen von linearen Differentialgleichungen mit konstantem Koeffizienten

Einsetzen von (9) in (15):

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -A = B$$
$$X(\pi) = A\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,\pi} - A\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0$$
$$A\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,\pi} - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}\right) = 0$$

1. Möglichkeit: $A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad X \equiv 0$

2. Möglichkeit: $\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}\,\pi} - \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\pi = -\sqrt{\lambda}\,\pi \quad \Rightarrow \quad 1 = -1$ ↯

e) $\lambda < 0$

$$\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad X'' - \lambda\,X = 0 \tag{16}$$

Ansatz: $X(x) = \mathrm{e}^{\alpha\,x} \quad \rightarrow \quad X''(x) = \alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha\,x}$ (17)

Einsetzen von (17) in (16):

$$\mathrm{e}^{\alpha\,x}\left(\alpha^2 - \lambda\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - \lambda = 0$$
$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\sqrt{(-1)\cdot(-\lambda)} = \pm\mathrm{i}\sqrt{-\lambda} \tag{18}$$

Lösung der char. Gleichung	Basislösung der DGL
$\alpha = a + b\,\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{a\,x}\cos(b\,x)$
$\alpha = a - b\,\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{a\,x}\sin(b\,x)$

Merziger et al., *"Formeln und Hilfen zur höheren Mathematik"*, 5. Auflage, Seite: 161, ISBN-13: 978-3-923 923-35-9

$$\Downarrow$$

$$\underline{X(x) = C\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) + D\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right)} \tag{19}$$

Einsetzen von (9) in (19):

$$X(0) = C\cos 0 + D\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \tag{20}$$
$$X(\pi) = D\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,\pi\right) = 0$$

für $D = 0$ ergibt sich wieder nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$, daher $D = \text{const.}$ und:

$$\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,\pi\right) = 0 \quad \text{wenn} \quad \sqrt{-\lambda}\,\pi = k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$\sqrt{-\lambda} = k \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = -k^2 \tag{21}$$

f) Eigenfunktionen X_k

Aus (19), (20) und (21) folgt:

$$\underline{X_k(x) = \sin(k\,x)} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

wobei hier $D = 1$ gesetzt wurde, da in der Zeit-Differential-Gleichung noch eine weitere freie Konstante auftaucht, welche mit D multipliziert wird.

g) Allgemeine Lösung der Zeit-Differentialgleichung

Lösen von (7) mithilfe der ermittelten λ_k aus Gleichung (21):

$$T' - \lambda_k\,T = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + k^2\,T = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -k^2\,dt$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{T_k = C_k^*\,\mathrm{e}^{-k^2\,t}} \tag{23}$$

h) Produktansatz

Aus Gleichung (4), (22) und (23) ergibt sich:

$$u_k(t, x) = C_k^*\,\mathrm{e}^{-k^2\,t}\sin(k\,x) \tag{24}$$

i) Superpositionsprinzip

Anwenden des Superpositionsprinzips auf Gleichung (24):

$$\underline{u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^*\,\mathrm{e}^{-k^2\,t}\sin(k\,x)} \tag{25}$$

j) Entwicklungssatz

Das ermitteln der Koeffizienten C_k^* aus Gleichung (25) erfolgt über die Verarbeitung der Anfangsbedingung. Da die Verträglichkeitsbedingung:

$$u_0\left(0\right) = u_0\left(L\right) = 0 = u\left(0,0\right) = u\left(0,L\right)$$

erfüllt ist, darf die Funktion u_0 aus Gleichung (3) hier als Vergleichsfunktion aufgefasst werden.

Darstellen der Vergleichsfunktion u_0 durch eine gleichmäßig konvergente Reihe mithilfe der Eigenfunktion aus Gleichung (22):

$$u_0\left(x\right) = \begin{cases} 33\,x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 33\left(\pi - x\right) & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(k\,x\right) \tag{26}$$

k) Ermitteln der Fourierkoeffizienten

Bestimmen der Fourierkoeffizienten C_k aus Gleichung (26):

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{\int_0^L u_0\left(x\right) X_k\left(x\right) dx}{\int_0^L X_k^2\left(x\right) dx} = \frac{\int_0^\pi u_0\left(x\right) \sin\left(k\,x\right) dx}{\int_0^\pi \sin^2\left(k\,x\right) dx} \\ &= \frac{\int_0^{\pi/2} 33x \sin\left(k\,x\right) dx + \int_{\pi/2}^\pi 33\left(\pi - x\right) \sin\left(k\,x\right) dx}{\int_0^\pi \sin^2\left(k\,x\right) dx} \\ &= 33\,\frac{\int_0^{\pi/2} x \sin\left(k\,x\right) dx + \pi \int_{\pi/2}^\pi \sin\left(k\,x\right) dx - \int_{\pi/2}^\pi x \sin\left(k\,x\right) dx}{\int_0^\pi \sin^2\left(k\,x\right) dx} \end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \sin^2\left(k\,x\right) dx = \frac{2k\,x - \sin\left(2k\,x\right)}{4k} + \text{const.}$
- $\displaystyle\int \sin\left(k\,x\right) dx = -\frac{1}{k}\cos\left(k\,x\right) + \text{const.}$
- $\displaystyle\int x \sin\left(k\,x\right) dx = -\frac{x}{k}\cos\left(k\,x\right) + \frac{1}{k^2}\sin\left(k\,x\right) + \text{const.}$

$$\blacktriangleright \quad \int_0^{\pi/2} x \sin(k\,x)\,dx = -\frac{\pi}{2k}\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)$$

$$\blacktriangleright \quad \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin(k\,x)\,dx = -\frac{\pi}{k}\cos(k\,\pi) + \frac{\pi}{2k}\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) - \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)$$

$$\blacktriangleright \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(k\,x)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(k\,\pi) + \frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)$$

$$\blacktriangleright \quad \int_0^{\pi} \sin^2(k\,x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$C_k = \frac{33}{\frac{\pi}{2}}\left[\pi\,\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2k}\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2k}\cos\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) \right.$$
$$\left. - -\frac{\pi}{k}\cos(k\,\pi) - \pi\frac{1}{k}\cos(k\,\pi) + \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) - -\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$C_k = \frac{66}{\pi}\left(\frac{2}{k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\right) = \frac{132}{\pi\,k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) \tag{27}$$

Einsetzen von (27) in Gleichung (26):

$$\underline{u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{132}{\pi\,k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\sin(k\,x)} \tag{28}$$

l) Koeffizientenvergleich

Koeffizientenvergleich von Gleichung (25) für $t = 0$ mit Gleichung (28):

$$u(0,x) = u_0(x)$$

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* \sin(k\,x)$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{132}{\pi\,k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\sin(k\,x)$$

$$\Downarrow$$

$$C_k^* = \frac{132}{\pi\,k^2}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Alle geraden k führen zu $C_k^* = 0$, daher gilt:

$$k = 2n + 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$C_k^* = C_n = \frac{132}{\pi\,(2n+1)^2} \underbrace{\sin\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{2}\right)}_{=\,(-1)^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u\,(t,x) = \frac{132}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-(2n+1)^2\,t} \sin\big(\,(2n+1)\,x\big)}{(2n+1)^2}} \tag{29}$$

jkl*) Orthogonalitätsrelation

Alternativ zu den Schritten (j-l) unter Verwendung des Entwicklungsatzes kann der Superpositionsansatz (25) für $t = 0$, unter Zuhilfenahme der Orthogonalitätsrelation, auch gleich mit der Anfangsbedingung (3) verglichen werden:

$$u\,(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* \sin\,(k\,x) = u_0\,(x) = \begin{cases} 33\,x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 33\,(\pi - x) & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

Als nächstes erfolgt die Multiplikation mit einer Eigenfunktion $\sin\,(l\,x)$ mit anderem Zählindex und danach dann die Integration über den gesamten Stab von 0 bis π:

$$\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* \sin\,(k\,x) \sin\,(l\,x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 33x \sin\,(l\,x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 33\,(\pi - x) \sin\,(l\,x)\,dx$$

Auf der linken Seite können Integral und Summe vertauscht werden, die Orthogonalitätsrelation liefert dann:

$$\int_0^{\pi} \sin\,(k\,x) \sin\,(l\,x)\,dx = 0 \quad \text{für} \quad l \neq k$$

Einzig für $k = l$ ist das Integral ungleich Null und die unendliche Summe reduziert sich auf ein Element, damit ergibt sich:

$$C_l^* \int_0^{\pi} \sin^2(l\,x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 33x \sin(l\,x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 33\,(\pi - x) \sin(l\,x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$C_l^* = \frac{\int_0^{\pi/2} 33x \sin(l\,x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 33\,(\pi - x) \sin(l\,x)\,dx}{\int_0^{\pi} \sin^2(l\,x)\,dx}$$

Die Berechnung von C_l^* ist analog zur Berechnung von C_k aus Schritt (k). Ein Koeffizientenvergleich ist nicht mehr nötig, C_l^* bzw. C_k^* kann direkt in Gleichung (25) eingesetzt werden.

m*) Konvergenzuntersuchung

Anwenden des Majorantenkriteriums auf die Reihe aus Gleichung (29):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} (-1)^n \, \mathrm{e}^{-(2n+1)^2\,t} \sin\big((2n+1)\,x\big) < \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-(2n+1)^2\,t} \cdot 1$$

Ist letztere Reihe konvergent so konvergiert auch die Lösung $u\,(t,x)$. Überprüfung durch Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)^2\,t}}{\mathrm{e}^{-(2n+1)^2\,t}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-8(n+1)t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Reihe ist konvergent für } t > 0$$

Info

Die Anfangstemperaturverteilung mit Knick ist Lipschitz-stetig (alle Sekanten einer Funktion haben eine Steigung, welche nicht größer als eine Konstante ist) und die zugehörige Fourierreihe somit gleichmäßig konvergent. Zudem wird der Anteil $\mathrm{e}^{-(2n+1)^2\,t}$ für $t > 0$ mit wachsendem n sehr schnell klein, was dafür sorgt, dass die Lösung für alle $t > 0$ beliebig oft differenzierbar ist $\rightarrow$ der Knick aus der gestellten Anfangsbedingung verschwindet sofort für $t > 0$.