4. Tutorium
Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Martin Rudolph

Technische Universität Bergakademie Freiberg

9. Februar 2015

Orthogonalitätsrelation

- Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten (λ_k, λ_l) sind orthogonal zueinander
- d. h. Integral des Produktes der Eigenfunktionen über die Periode verschwindet

$$\hookrightarrow \int_0^L X_k\,(x)\,X_l\,(x)\,dx = 0 \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \Phi_k\,(\varphi)\,\Phi_l\,(\varphi)\,d\varphi = 0$$

$$\boxed{k \neq l}$$

- einzig im Fall von $k = l$ liefert das Integral einen endlichen Wert
- die Orthogonalitätsrelation gestattet es über den Entwicklungssatz die unbekannten Koeffizienten der Lösung zu bestimmen

Superpositionsprinzip

- Produktansatz liefert im allgemeinen eine Lösung $u_k(t, x)$ bzw. $u_k(t, \varphi)$ mit unbekannten Koeffizienten (1D-Fall)
- besitzt die PDGL **keine Quelle oder Senke** so ist die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung
- bilden der **formalen Lösung** durch Linearkombination der unendlich vielen Produktlösungen

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, x) \quad \text{bzw.} \quad u(t, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t, \varphi)}$$

Vergleichsfunktionen

- Vergleichsfunktionen erfüllen 2 wesentliche Eigenschaften:
  - 2-mal stetig differenzierbar (auf dem Periodizitätsintervall)
  - erfüllen die homogenen Randbedingungen
- die Verträglichkeitsbedingung zwischen RB und AB garantieren, dass die Anfangsfunktionen auch die homogenen Randbedingungen erfüllen
- im Allgemeinen können somit die **Anfangsfunktionen als Vergleichsfunktionen aufgefasst** werden
- notwendig zum Ermitteln der unbekannten Koeffizienten aus dem Superpositionsansatz

Entwicklungssatz

- jede Vergleichsfunktion $u_0\left(x\right)$ bzw. $u_0\left(\varphi\right)$ kann auf $[0, L]$ bzw. $[0, 2\pi]$ als gleichmäßig konvergente Reihe dargestellt werden
- die Reihen werden über die Eigenfunktionen gewonnen

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u_0\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, X_k\left(x\right) \quad \text{bzw.} \quad u_0\left(\varphi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k} \cos\left(k\,\varphi\right) + C_{2k} \sin\left(k\,\varphi\right)}$$

- Reihen werden als Fourierreihen bezeichnet und die Koeffizienten C_k, C_{1k} und C_{2k} als Fourierkoeffizienten
- die Fourierkoeffizienten können mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen ermittelt werden
- anschließend kann aus den Fourierkoeffizienten über einen Koeffizientenvergleich die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten aus dem Superpositionsansatz erfolgen

erlaubt das Vertauschen von Grenzprozessen (Integrale, Differentiale, Summen)

Entwicklungssatz

Bestimmung der Fourierkoeffizienten

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, X_k(x) \qquad \Big|\ \cdot X_l(x)$$

$$u_0(x)\, X_l(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, X_k(x)\, X_l(x) \qquad \Big|\ \int_0^L$$

$$\int_0^L u_0(x)\, X_l(x)\, dx = \int_0^L \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_k\, X_k(x)\, X_l(x)}_{\text{gleichmäßig konvergente Reihe}} \; dx$$

$\Rightarrow$ Integral und Summe dürfen vertauscht werden

$$\int_0^L u_0(x)\, X_l(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \underbrace{\int_0^L X_k(x)\, X_l(x)\, dx}_{=0 \text{ für } k \neq l}$$

Entwicklungssatz

Bestimmung der Fourierkoeffizienten

$\Rightarrow$ unendliche Summe reduziert sich dank der Orthogonalitätsrelation auf einen Wert:

$$\int_0^L u_0(x)\, X_l(x)\, dx = C_l \int_0^L X_l(x)\, X_l(x)\, dx$$

$$C_l = \frac{\int_0^L u_0(x)\, X_l(x)\, dx}{\int_0^L X_l^2(x)\, dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_k = \frac{\int_0^L u_0(x)\, X_k(x)\, dx}{\int_0^L X_k^2(x)\, dx}}$$

$\Rightarrow$ Analog dazu ergibt sich:

$$\boxed{C_{1k} = \frac{\int_0^{2\pi} u_0(\varphi) \cos(\varphi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\, d\varphi}} \quad \boxed{C_{2k} = \frac{\int_0^{2\pi} u_0(\varphi) \sin(\varphi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\, d\varphi}}$$

Plattengleichung

Stationäre Plattengleichung (2D):

$$\Delta^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x^4 u + 2\partial_x^2\partial_y^2 u + \partial_y^4 u = 0$$

Instationäre Fall:

$u_{tt} - \Delta^2 u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad$ 2 AB und 2 RB

Randbedingungen

	fest gelagert	frei gelagert
1. RB	$u\|_{\partial G} = 0$	$u\|_{\partial G} = 0$
2. RB	$\frac{\partial u}{\partial n}\Big\|_{\partial G} = 0$	$\Delta u = 0$
Tangente am Rand ist horizontal		Momentenbedingung: Tangente am Rand muss nicht horizontal sein