Aufgabe - Wärmeleitung in einer Kugelschale

Für die Ermittelung der stationären Temperaturverteilung in der im Tutorium gezeigten Kugelschale bietet sich die Verwendung von Kugelkoordinaten an. Für die Koordinatentransformation gibt es zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit

Verwenden der vorgegebenen Gleichung in Kugelkoordinaten für Δu:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = \frac{2}{r}\,\partial_r u + \partial_r^2 u + \frac{\cot\theta}{r^2}\,\partial_\theta u + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2 u + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2 u \tag{1}$$

Anhand der Geometrie und der vorgegebenen Randbedingung kann man erkennen, dass die Temperaturverteilung radialsymmetrisch ist. D. h. die Temperatur u ist vom Winkel unabhängig, es gilt $u = u\,(r)$. Demzufolge ist $\partial_\theta u = \partial_\theta^2 u = \partial_\varphi^2 u = 0$. Damit vereinfacht sich Gleichung (1) zu:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r \tag{2}$$

Durch einsetzen in die stationäre Wärmleitungsgleichung mit konstantem Wärmeleitkoeffizienten ergibt sich die zu lösende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r = 0 \tag{3}$$

2. Möglichkeit:

Eigenständiges umrechnen des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten. Da aufgrund der vorliegenden Symmetrie die Winkelanteile keine Rolle spielen müssen die Ortsvariablen x, y und z nur durch die Variable r ersetzt werden. Für die Beziehung zwischen diesen Variablen gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Umrechnung von u_{xx}:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 2\,x\,\tfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}}_{\text{Kettenregel}} = \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{x}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \partial x = \frac{r}{x}\,\partial r \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}}_{u}\ \underbrace{\frac{x}{r}}_{v}\right) \qquad \boxed{\text{Produktregel}} \tag{7}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial r}}_{u'}\ \underbrace{\frac{x}{r}}_{v} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}}_{u}\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)}_{v'}$$

$$u'\,v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{x}{r} = \frac{\partial}{\frac{r}{x}\,\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{x}{r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{x^2}{r^2}$$

$$u\,v' = \frac{\partial u}{\partial r}\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)}_{\substack{\text{Quotienten-}\\ \text{regel}}} \qquad \boxed{\text{Beachte } r = r\,(x,y,z)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1\,r - x\,\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \quad \rightarrow$$

$$u\,v' = \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) \tag{8}$$

Analog folgt für u_{yy} und u_{zz}:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right) \tag{10}$$

Setzt man nun die Gleichung (8-10) in die zu lösende Differentialgleichung $\Delta u = 0$ ein so erhält man:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{1}{r^2}\underbrace{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}_{=\,r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{3}{r} - \underbrace{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}}_{=\,\frac{1}{r}}\right)$$

$$= u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r = 0 \tag{11}$$

Die Lösung der sich ergebenden gewöhnlichen Differentialgleichung erfolgt wie im Tutorium gezeigt.