2. Tutorium
Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Martin Rudolph

Technische Universität Bergakademie Freiberg

2. Februar 2015

Innengebiete

Prozess findet in einem abgeschlossenen Intervall, Bereich oder Volumen statt:

- schwingende Saite 1D
- schwingende Trommelmembran 2D
- Konvektion in einer Tasse 3D

Innengebiete

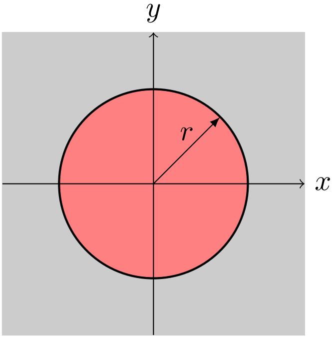
Prozess findet in einem abgeschlossenen Intervall, Bereich oder Volumen statt:

- schwingende Saite 1D
- schwingende Trommelmembran 2D
- Konvektion in einer Tasse 3D

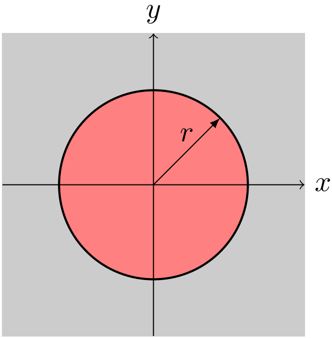
Außengebiete

Prozess findet im Komplementär eines abgeschlossenen Intervalls, Bereichs oder Volumens statt:

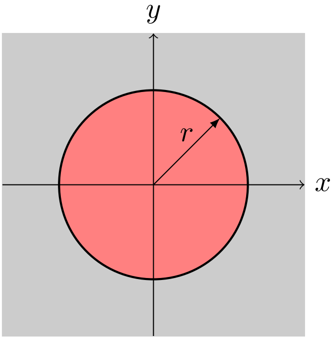
- Gravitation der Erde
- Wärmeentwicklung um eine Tasse



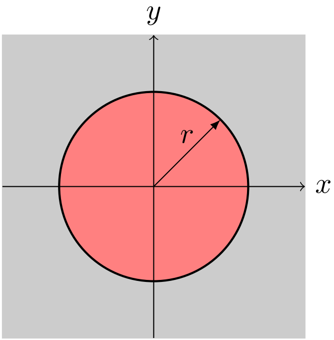
- Innengebiet:



- Innengebiet:
  $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\right\}$
- Außengebiet:



- Innengebiet:
  $$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$$
- Außengebiet:
  $$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > r^2\}$$
- Rand:



- Innengebiet:

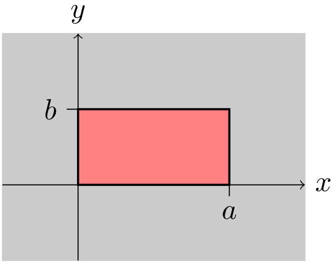
  $$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$$

- Außengebiet:

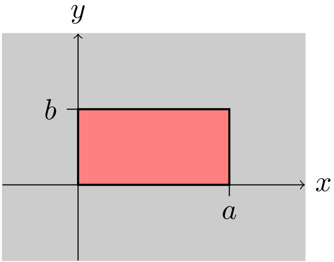
  $$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > r^2\}$$

- Rand:

  $$\partial G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$



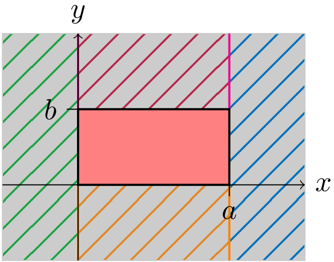
- Innengebiet:



- Innengebiet:

$$G = \underset{\substack{\in \\ x}}{(0,a)} \times \underset{\substack{\in \\ y}}{(0,b)}$$

- Außengebiet:



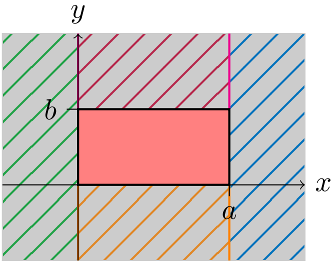
- Innengebiet:

$$G = \underset{\substack{\in \\ x}}{(0,a)} \times \underset{\substack{\in \\ y}}{(0,b)}$$

- Außengebiet:

$$\begin{aligned} G = {} & \underline{\{(-\infty,0) \times (-\infty,\infty)\}} \cup \underline{\{(a,\infty) \times (-\infty,\infty)\}} \\ & \cup \underline{\{[0,a] \times (-\infty,0)\}} \cup \underline{\{[0,a] \times (b,\infty)\}} \end{aligned}$$

- Rand:



- Innengebiet:

$$G = \underset{\underset{x}{\in}}{(0,a)} \times \underset{\underset{y}{\in}}{(0,b)}$$

- Außengebiet:

$$G = \underline{\{(-\infty,0) \times (-\infty,\infty)\}} \cup \underline{\{(a,\infty) \times (-\infty,\infty)\}} \cup \underline{\{[0,a] \times (-\infty,0)\}} \cup \underline{\{[0,a] \times (b,\infty)\}}$$

- Rand:

$$\partial G = \underline{\{x=0, y \in (0,b)\}} \cup \underline{\{x=a, y \in (0,b)\}} \cup \underline{\{x \in [0,a], y=0\}} \cup \underline{\{x \in [0,a], y=b\}}$$

Streifengebiete

- Verkehrsfluss auf unendlicher Straße 2D
- Strömungen in unendlichen Leitungen 3D

Streifengebiete

- Verkehrsfluss auf unendlicher Straße 2D
- Strömungen in unendlichen Leitungen 3D

Außengebiete zu Streifengebieten

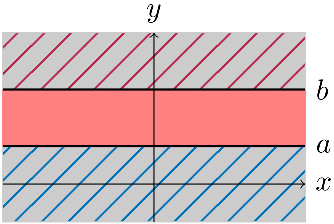
- Strömung um einen unendlich langen Zylinder

Streifengebiete

- Verkehrsfluss auf unendlicher Straße 2D
- Strömungen in unendlichen Leitungen 3D

Außengebiete zu Streifengebieten

- Strömung um einen unendlich langen Zylinder



- Streifengebiet:

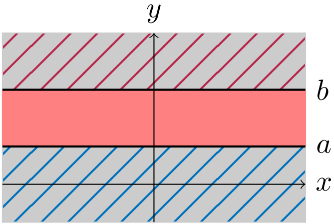
Geometrien von Gebieten bei bestimmten Prozessen

Streifengebiete

- Verkehrsfluss auf unendlicher Straße — 2D
- Strömungen in unendlichen Leitungen — 3D

Außengebiete zu Streifengebieten

- Strömung um einen unendlich langen Zylinder



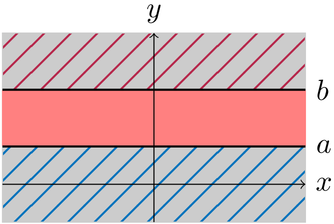
- Streifengebiet: $G = \mathbb{R}_x \times (a, b)$
- Außengebiete zu Streifengebiet:

Streifengebiete

- Verkehrsfluss auf unendlicher Straße — 2D
- Strömungen in unendlichen Leitungen — 3D

Außengebiete zu Streifengebieten

- Strömung um einen unendlich langen Zylinder



- Streifengebiet: $G = \mathbb{R}_x \times (a, b)$
- Außengebiete zu Streifengebiet:

$$G_1 = \underline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < a\}}$$

$$G_2 = \underline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > b\}}$$

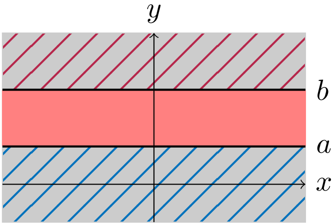
- Rand zu Innengebiet:

Streifengebiete

- Verkehrsfluss auf unendlicher Straße 2D
- Strömungen in unendlichen Leitungen 3D

Außengebiete zu Streifengebieten

- Strömung um einen unendlich langen Zylinder



- Streifengebiet: $G = \mathbb{R}_x \times (a, b)$
- Außengebiete zu Streifengebiet:

$$G_1 = \underline{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < a\right\}}$$

$$G_2 = \underline{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > b\right\}}$$

- Rand zu Innengebiet: $\partial G = \underline{\{x \in \mathbb{R}, y = a\}} \cup \underline{\{x \in \mathbb{R}, y = b\}}$

Halbraum

- Schallausbreitung hinter unendlicher Schallschutzwand
  z. B. $G = (a, \infty) \times \mathbb{R}_y$

Gesamter Raum

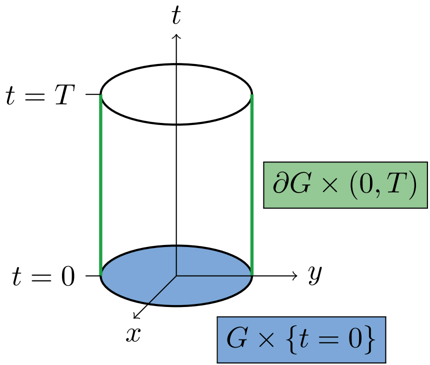
- Ausbreitung ebener Wellen
- Gravitation eines Massenpunktes

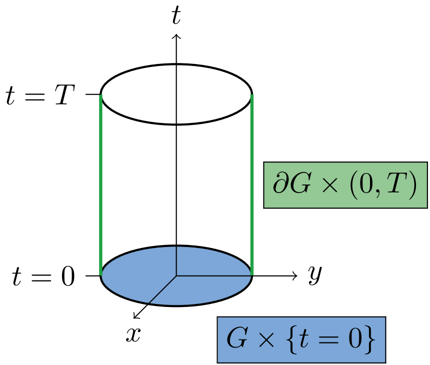
Gebiet

Ein Gebiet G ist eine offene und zusammenhängende Menge, der Rand ∂G gehört nicht dazu.

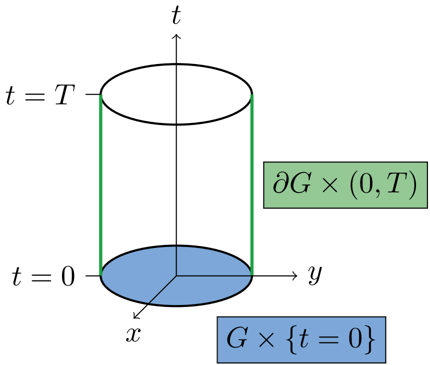
Raum-Zeit-Zylinder $Z = G \times (0, T)$

Anfangs- und Randbedingungen



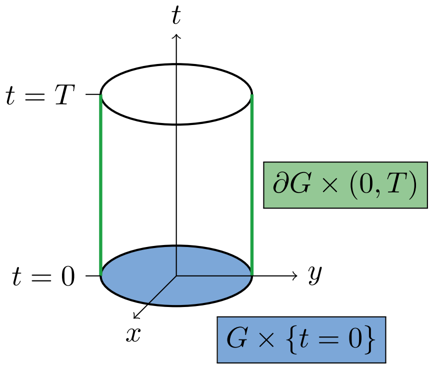


- Grundfläche $G \times \{t = 0\}$: Auf dieser Fläche werden Anfangsbedingungen gestellt



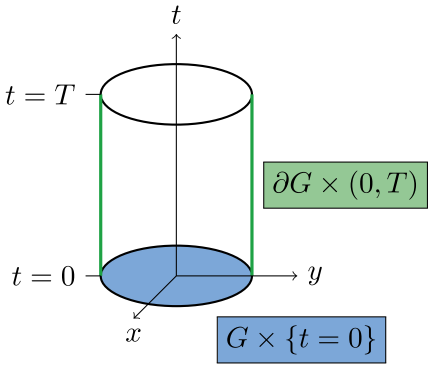
- Grundfläche $G \times \{t = 0\}$: Auf dieser Fläche werden Anfangsbedingungen gestellt

- Eine allgemeine Anfangsbedingung ist:
  $u\left(t = 0, x, y\right) = u_0\left(x, y\right), \ (x, y) \in G$



- Grundfläche $G \times \{t = 0\}$: Auf dieser Fläche werden Anfangsbedingungen gestellt
- Mantelfläche $\partial G \times (0, T)$: Auf dieser Fläche werden Randbedingungen gestellt

- Eine allgemeine Anfangsbedingung ist:
  $u\,(t = 0, x, y) = u_0\,(x, y)\,,\ (x, y) \in G$



- Grundfläche $G \times \{t = 0\}$: Auf dieser Fläche werden Anfangsbedingungen gestellt
- Mantelfläche $\partial G \times (0, T)$: Auf dieser Fläche werden Randbedingungen gestellt

- Eine allgemeine Anfangsbedingung ist:
  $u\left(t = 0, x, y\right) = u_0\left(x, y\right), \ (x, y) \in G$
- Eine allgemeine Randbedingung ist z.B.:
  $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\left(t, x, y\right), \ (x, y) \in \partial G$ (1. Art)

Wichtig!!!

Der Raum-Zeit-Zylinder Z sollte nicht wie hier gezeigt als dreidimensionales Gebilde mit kreisförmigem Gebiet G im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Obwohl dies z. B. für eine runde Trommelmembran zutreffend ist, dient dies lediglich der leichteren Vorstellung. Man sollte den Raum-Zeit-Zylinder im allgemeinen Fall als vierdimensionales Gebilde betrachten mit einem beliebigen Gebiet im $\mathbb{R}^3$, damit gilt z. B. für eine allgemeine Anfangsbedingung:

$$u\left(t=0, x, y, z\right) = u_0\left(x, y, z\right), \ \left(x, y, z\right) \in G$$

und für eine allgemeine Randbedingung 1. Art:

$$u|_{\partial G \times (0,T)} = g\left(t, x, y, z\right), \ \left(x, y, z\right) \in \partial G$$

Anzahl von Anfangs- und Randbedingungen

- $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} - \Delta^n u = f(t,x,y,z)$

Anzahl von Anfangs- und Randbedingungen

- $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} - \Delta^n u = f(t, x, y, z)$
- m Anfangsbedingungen
- n Randbedingungen

Stationäre Prozesse

Anzahl von Anfangs- und Randbedingungen

- $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} - \Delta^n u = f(t, x, y, z)$
- m Anfangsbedingungen
- n Randbedingungen

Stationäre Prozesse

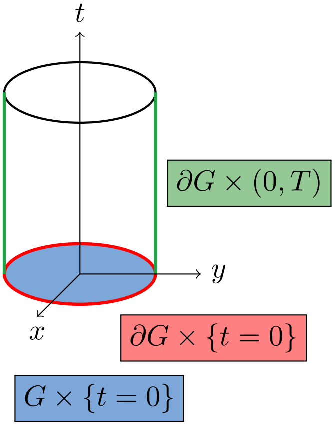
- keine Anfangsbedingungen

Anzahl von Anfangs- und Randbedingungen

- $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} - \Delta^n u = f(t, x, y, z)$
- m Anfangsbedingungen
- n Randbedingungen

Stationäre Prozesse

- keine Anfangsbedingungen
- Randbedingungen werden auf dem Rand ∂G der Geometrie G gestellt
- Allgemeine Randbedingung 1. Art ist z. B. $u|_{\partial G} = g\,(x, y, z)\,,\ (x, y, z) \in \partial G$



Anfangsbedingung:
$u\,(t=0,x,y) = u_0\,(x,y)\,,\ \ (x,y) \in G$

Randbedingung 1. Art:
$u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t,x,y)\,,\ \ (x,y) \in \partial G$

Verträglichkeitsmenge:
$\partial G \times \{t=0\}$

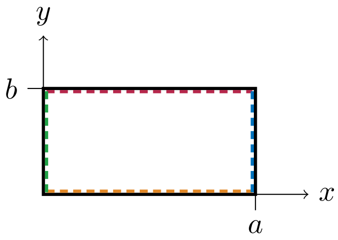
Es ist sinnvoll auf $\partial G \times \{t=0\}$ Verträglichkeitsbedingungen zu stellen

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u_0\,(x,y) = g\,(t=0,x,y)\,,(x,y) \in \partial G}$$

Dies ist nur ein einzelnes Beispiel, je nach Anfangsbedingung und Art der Randbedingung sehen die Verträglichkeitsbedingungen anders aus.

Neben den Verträglichkeitsbedingungen zwischen Rand- und Anfangsbedingung existieren auch Verträglichkeitsbedingungen zwischen den einzelnen Funktionen auf dem Rand eines Gebietes.

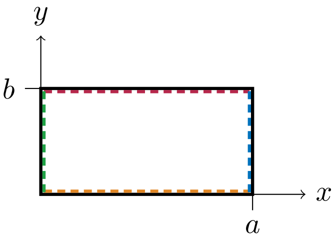


Das Randverhalten auf ∂G wird durch vier Funktionen beschrieben:

- $g_1\left(y\right), y \in [0, b]$
- $g_2\left(y\right), y \in [0, b]$
- $f_1\left(x\right), x \in (0, a)$
- $f_2\left(x\right), x \in (0, a)$

Es müssen vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein:

Neben den Verträglichkeitsbedingungen zwischen Rand- und Anfangsbedingung existieren auch Verträglichkeitsbedingungen zwischen den einzelnen Funktionen auf dem Rand eines Gebietes.



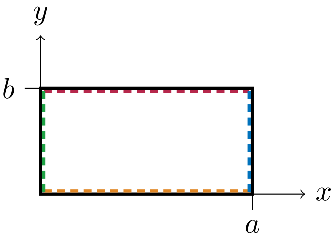
Das Randverhalten auf ∂G wird durch vier Funktionen beschrieben:

- $g_1(y), y \in [0, b]$
- $g_2(y), y \in [0, b]$
- $f_1(x), x \in (0, a)$
- $f_2(x), x \in (0, a)$

Es müssen vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein:

- $f_1(0) = g_1(0)$

Neben den Verträglichkeitsbedingungen zwischen Rand- und Anfangsbedingung existieren auch Verträglichkeitsbedingungen zwischen den einzelnen Funktionen auf dem Rand eines Gebietes.



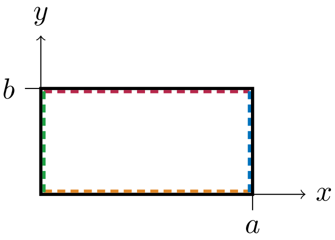
Das Randverhalten auf ∂G wird durch vier Funktionen beschrieben:

- $g_1(y), y \in [0, b]$
- $g_2(y), y \in [0, b]$
- $f_1(x), x \in (0, a)$
- $f_2(x), x \in (0, a)$

Es müssen vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein:

- $f_1(0) = g_1(0)$
- $f_1(a) = g_2(0)$

Neben den Verträglichkeitsbedingungen zwischen Rand- und Anfangsbedingung existieren auch Verträglichkeitsbedingungen zwischen den einzelnen Funktionen auf dem Rand eines Gebietes.



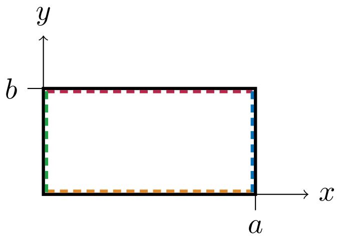
Das Randverhalten auf ∂G wird durch vier Funktionen beschrieben:

- $g_1(y), y \in [0, b]$
- $g_2(y), y \in [0, b]$
- $f_1(x), x \in (0, a)$
- $f_2(x), x \in (0, a)$

Es müssen vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein:

- $f_1(0) = g_1(0)$
- $f_2(0) = g_1(b)$
- $f_1(a) = g_2(0)$

Neben den Verträglichkeitsbedingungen zwischen Rand- und Anfangsbedingung existieren auch Verträglichkeitsbedingungen zwischen den einzelnen Funktionen auf dem Rand eines Gebietes.



Das Randverhalten auf ∂G wird durch vier Funktionen beschrieben:

- $g_1(y), y \in [0, b]$
- $g_2(y), y \in [0, b]$
- $f_1(x), x \in (0, a)$
- $f_2(x), x \in (0, a)$

Es müssen vier Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein:

- $f_1(0) = g_1(0)$
- $f_1(a) = g_2(0)$
- $f_2(0) = g_1(b)$
- $f_2(a) = g_2(b)$

Für z. B. $\Delta u = 0$ existiert nur eine Randbedingung (z. B. $u|_{\partial G} = h(x, y)$) wobei sich $h(x, y)$ wie der Rand aus mehreren einzelnen Funktionen zusammensetzen kann, solange die Verträglichkeiten erfüllt sind.

Randbedingungen 1. Art ⇒ **Dirichlet-Typ**

- Die Lösung ist auf der Mantelfläche $\partial G \times (0, T)$ des Raum-Zeit-Zylinders vorgeben
- $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t, x, y, z)\,,\ (x, y, z) \in \partial G$

Randbedingungen 1. Art $\Rightarrow$ **Dirichlet-Typ**

- Die Lösung ist auf der Mantelfläche $\partial G \times (0,T)$ des Raum-Zeit-Zylinders vorgeben
- $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t,x,y,z)\,,\;(x,y,z) \in \partial G$

Randbedingungen 2. Art $\Rightarrow$ **Neumann-Typ**

Randbedingungen 1. Art $\Rightarrow$ **Dirichlet-Typ**

- Die Lösung ist auf der Mantelfläche $\partial G \times (0, T)$ des Raum-Zeit-Zylinders vorgeben
- $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t, x, y, z)\,, \; (x, y, z) \in \partial G$

Randbedingungen 2. Art $\Rightarrow$ **Neumann-Typ**

- Die Normalenableitung der Lösung ist auf der Mantelfläche vorgeben

Randbedingungen 3. Art $\Rightarrow$ **Robin-Typ**

Randbedingungen 1. Art $\Rightarrow$ **Dirichlet-Typ**

- Die Lösung ist auf der Mantelfläche $\partial G \times (0,T)$ des Raum-Zeit-Zylinders vorgeben
- $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t,x,y,z)\,,\ (x,y,z) \in \partial G$

Randbedingungen 2. Art $\Rightarrow$ **Neumann-Typ**

- Die Normalenableitung der Lösung ist auf der Mantelfläche vorgeben
- $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t,x,y,z)\,,\ (x,y,z) \in \partial G$

Randbedingungen 3. Art $\Rightarrow$ **Robin-Typ**

Randbedingungen 1. Art $\Rightarrow$ **Dirichlet-Typ**

- Die Lösung ist auf der Mantelfläche $\partial G \times (0,T)$ des Raum-Zeit-Zylinders vorgeben
- $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t,x,y,z)\,,\;\; (x,y,z) \in \partial G$

Randbedingungen 2. Art $\Rightarrow$ **Neumann-Typ**

- Die Normalenableitung der Lösung ist auf der Mantelfläche vorgeben
- $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t,x,y,z)\,,\;\; (x,y,z) \in \partial G$

Randbedingungen 3. Art $\Rightarrow$ **Robin-Typ**

- Linearkombination der ersten beiden Arten

Randbedingungen 1. Art $\Rightarrow$ **Dirichlet-Typ**

- Die Lösung ist auf der Mantelfläche $\partial G \times (0, T)$ des Raum-Zeit-Zylinders vorgeben
- $u|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t, x, y, z)\,,\ (x, y, z) \in \partial G$

Randbedingungen 2. Art $\Rightarrow$ **Neumann-Typ**

- Die Normalenableitung der Lösung ist auf der Mantelfläche vorgeben
- $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t, x, y, z)\,,\ (x, y, z) \in \partial G$

Randbedingungen 3. Art $\Rightarrow$ **Robin-Typ**

- Linearkombination der ersten beiden Arten
- $\left(h_1\,(x, y, z) \cdot u + h_2\,(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial G \times (0,T)} = g\,(t, x, y, z)$

Abklingbedingungen

- in Außengebieten sowie im Halbraum, da die Randbedingungen zur Bestimmung einer Lösung normalerweise nicht ausreichend sind
- im gesamten Raum, da keine Randbedingungen existieren
- z. B. eine Wasserwelle die mit zunehmendem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ von der Quelle abklingt

  Abklingbedingung:

Abklingbedingungen

- in Außengebieten sowie im Halbraum, da die Randbedingungen zur Bestimmung einer Lösung normalerweise nicht ausreichend sind
- im gesamten Raum, da keine Randbedingungen existieren
- z. B. eine Wasserwelle die mit zunehmendem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ von der Quelle abklingt

  Abklingbedingung:

  $|u(x, y, z)| = O\left(\ln \frac{1}{r}\right), \; r \to \infty \qquad \mathbb{R}^2$

Abklingbedingungen

- in Außengebieten sowie im Halbraum, da die Randbedingungen zur Bestimmung einer Lösung normalerweise nicht ausreichend sind
- im gesamten Raum, da keine Randbedingungen existieren
- z. B. eine Wasserwelle die mit zunehmendem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ von der Quelle abklingt

  Abklingbedingung:

$$
\begin{aligned}
|u(x,y,z)| &= O\left(\ln \tfrac{1}{r}\right), \quad r \to \infty \qquad \mathbb{R}^2 \\
|u(x,y,z)| &= \underbrace{O\left(\tfrac{1}{r}\right)}_{\text{Landau Symbol}}, \quad r \to \infty \qquad \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

Abklingbedingungen

- in Außengebieten sowie im Halbraum, da die Randbedingungen zur Bestimmung einer Lösung normalerweise nicht ausreichend sind
- im gesamten Raum, da keine Randbedingungen existieren
- z. B. eine Wasserwelle die mit zunehmendem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ von der Quelle abklingt

  Abklingbedingung:

$$|u(x,y,z)| = O\left(\ln \tfrac{1}{r}\right), \quad r \to \infty \qquad \mathbb{R}^2$$

$$|u(x,y,z)| = \underbrace{O\left(\tfrac{1}{r}\right)}_{\text{Landau Symbol}}, \quad r \to \infty \qquad \mathbb{R}^3$$

- Bedeutung:

$$\boxed{|u(x,y,z)| = O\left(\tfrac{1}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad |u(x,y,z)| \leq \frac{C}{r} \qquad C = \text{konst.}}$$

Koordinatentransformation

Polarkoordinaten

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r}\,\partial_r u + \frac{1}{r^2}\,\partial_\varphi^2 u$$

Kugelkoordinaten

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u$$

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial_\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial_\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \\
&= \frac{2}{r}\,\partial_r u + \partial_r^2 u + \frac{\cot\theta}{r^2}\,\partial_\theta u + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2 u + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2 u
\end{aligned}$$