Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg

Klausur Gewöhnliche Differentialgleichungen für Naturwissenschaftler

17. 7. 2017

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$tx' - x = -2tx^2, \qquad x(2) = 1$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Lösung: Die Gleichung ist vom Bernoullischen Typ. Wir substituieren

$$y(t) := \frac{1}{x(t)}, \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{y}, \quad x' = -\frac{y'}{y^2}$$

und erhalten durch Einsetzen

$$-t\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} = -\frac{2t}{y^2},$$

also die lineare Differentialgleichung

$$ty' + y = 2t. \tag{1}$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung $ty' + y = 0$ läßt sich durch Trennen der Veränderlichen lösen.

$$\begin{aligned} t\frac{dy}{dt} &= -y \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dt}{t} \\ \ln|y| &= -\ln|t| + C \\ y &= \frac{C_1}{t} \end{aligned}$$

Also gehen wir die Lösung der inhomogenen Gleichung (1) *mit dem Ansatz*

$$y(t) = \frac{C(t)}{t}$$

zur Variation der Konstanten an. Wir finden

$$y' = \frac{C't - C}{t^2},$$

was eingesetzt in (1) *auf*

$$\frac{C't - C}{t} + \frac{C}{t} = 2t$$

und damit $C' = 2t$ führt. Integration ergibt

$$C(t) = \int 2t\,dt = t^2 + D$$

und damit

$$y(t) = t + \frac{D}{t}$$

als allgemeine Lösung von (1)*. Also ist*

$$x(t) = \frac{1}{t + \frac{D}{t}} = \frac{t}{t^2 + D}$$

die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung und Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$1 = x(2) = \frac{2}{4 + D} \qquad \Rightarrow \qquad D = -2.$$

Die Lösung

$$x(t) = \frac{t}{t^2 - 2}$$

des Anfangswertproblems existiert auf dem Intervall $(\sqrt{2}, \infty)$*.*

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 12t \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

   (b) Ermitteln Sie nun die allgemeine Löung des inhomogenen Systems mittels Variation der Konstanten.

   Lösung:

   (a) Aus dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 1$$

   ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 1$*. Wir berechnen noch die Eigenvektoren:*

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Damit lautet die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$x(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Wir machen den Ansatz

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

   Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung liefert

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 12t \end{pmatrix}.$$

Weil
$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & e^{-t}\\ e^t & 2e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & -e^{-t}\\ e^t & -2e^{-t}\end{pmatrix}$$
bleibt davon nur
$$\begin{pmatrix}e^t & e^{-t}\\ e^t & 2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'(t)\\ C_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ 12t\end{pmatrix}$$
stehen. Da
$$\begin{vmatrix}e^t & e^{-t}\\ e^t & 2e^{-t}\end{vmatrix}=2-1=1$$
liefert die Cramersche Regel
$$\begin{pmatrix}C_1'(t)\\ C_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-t} & -e^{-t}\\ -e^t & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ 12t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10te^{-t}\\ 11te^t\end{pmatrix}.$$
Wir können nun integrieren:
$$\begin{aligned}C_1(t)&=\int -10te^{-t}\,dt=10te^{-t}-\int 10e^{-t}\,dt=10te^{-t}+10e^{-t}+D_1\\ C_2(t)&=\int 11te^t\,dt=11te^t-\int 11e^t\,dt=11te^t-11e^t+D_2\end{aligned}$$
Damit lautet die Lösung
$$\begin{aligned}x(t)&=\begin{pmatrix}e^t & e^{-t}\\ e^t & 2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10te^{-t}+10e^{-t}+D_1\\ 11te^t-11e^t+D_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10t+10+D_1e^t+11t-11+D_2e^{-t}\\ 10t+10+D_1e^t+22t-22+2D_2e^{-t}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}21t-1\\ 32t-12\end{pmatrix}+D_1e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+D_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Man löse folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplacetransformation:
$$x''+4x'+3x=8e^{-t},\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=6.$$
Hinweis: $\mathcal{L}(te^{-at})=\dfrac{1}{(s+a)^2}$.

Lösung: Es sei $F(s)=\mathcal{L}(x)(s)$. Dann ist
$$\mathcal{L}(x')(s)=sF(s)-x(0)=sF(s),\qquad \mathcal{L}(x'')(s)=s^2F(s)-sx(0)-x'(0)=s^2F(s)-6.$$
Transformation der Differentialgleichung liefert daher
$$\begin{aligned}s^2F(s)-6+4sF(s)+3F(s)&=\frac{8}{s+1}\\ (s^2+4s+3)F(s)&=\frac{8}{s+1}+6=\frac{6s+14}{s+1}\\ F(s)&=\frac{6s+14}{(s+1)^2(s+3)}.\end{aligned}$$
Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet damit
$$\frac{6s+14}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+3},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 6s+14 &= A(s+1)(s+3)+B(s+3)+C(s+1)^2 = A(s^2+4s+3)+B(s+3)+C(s^2+2s+1) \\ &= (A+C)s^2+(4A+B+2C)s+3A+3B+C \end{aligned}$$

Wir haben also $A+C=0$, $4A+B+2C=6$ *und* $3A+3B+C=14$ *zu erfüllen. Es folgt* $C=-A$, *damit* $2A+B=6$ *und* $2A+3B=14$, *und dann* $2B=8$, $B=4$, $A=1$, $C=-1$. *Damit ist*

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{4}{(s+1)^2}-\frac{1}{s+3}$$

zurückzutransformieren. Wir erhalten die Lösung

$$x(t)=e^{-t}+4te^{-t}-e^{-3t}.$$