TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

19. 7. 2016

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur – Lösungen

1. a) $u_{tt} = c^2 \triangle u - k u_t$ mit $u = u(t, x, y, z)$

   b) $u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z)$, $u_t(0, x, y, z) = u_1(x, y, z)$

   c) Weil

$$
\begin{aligned}
u_t &= -\alpha e^{-\alpha t} f \\
u_{tt} &= \alpha^2 e^{-\alpha t} f \\
\triangle u &= e^{-\alpha t} \triangle f = 0
\end{aligned}
$$

   erhält man

$$\alpha^2 e^{-\alpha t} f = -k(-\alpha) e^{-\alpha t} f$$

   und daher $\alpha^2 = k\alpha$. Wir erhalten die beiden Lösungen $\alpha = 0$ und $\alpha = k$.

   d) $\triangle u = 0$, die Laplacegleichung

2. a) Es handelt sich um die Laplacegleichung in Polarkoordinaten. Sie modelliert zum Beispiel die stationäre Auslenkung einer kreisförmigen Membran. Die Nebenbedingungen sind (in dieser Reihenfolge) die Periodizitätsbedingung, eine Beschränktheitsbedingung im Ursprung und eine Randbedingung zweiter Art auf dem Kreisrand.

   b) Der Ansatz $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ eingesetzt liefert

$$
\begin{aligned}
R''\Phi + \frac{1}{r} R'\Phi + \frac{1}{r^2} R\Phi'' &= 0 \\
\frac{r^2 \left(R'' + \frac{1}{r} R'\right)}{R} &= -\frac{\Phi''}{\Phi}.
\end{aligned}
$$

   Da die linke Seite nur von r, die rechte nur von φ abhängt, sind beide Seiten konstant. Setzt man sie jeweils gleich λ, so führt dies auf die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \tag{1}$$

   und

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \tag{2}$$

   Wir lösen zunächst (1) unter der Nebenbedingung

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \tag{3}$$

   die sich aus der Periodizitätsbedingung ergibt.

   1. Fall $\lambda < 0$. Die allgemeine Lösung von (1) gewinnt man aus einem Exponentialansatz $\Phi(\varphi) = e^{\mu\varphi}$, so dass $\mu^2 + \lambda = 0$, also $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ und damit

$$\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

   Diese Funktion erfüllt (3) nur für $C_1 = C_2 = 0$.

   2. Fall $\lambda = 0$. Da sich (1) auf $\Phi'' = 0$ reduziert, lautet die allgemeine Lösung jetzt $\Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2$. (3) ist erfüllt falls $C_1 = 0$, C_2 kann beliebig sein.

3. Fall $\lambda > 0$. Die allgemeine Lösung von (1) gewinnt man aus einem Exponentialansatz $\Phi(\varphi) = e^{\mu\varphi}$, so dass $\mu^2 + \lambda = 0$, also $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ und damit

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\varphi).$$

Die Bedingung (3) ist erfüllt, falls $\sqrt{\lambda} = k$ ganzzahlig ist, also $\lambda = k^2$.

Wir kommen nun zur Lösung von (2).

Im Fall $\lambda = 0$ ist $rR'' + R' = 0$ zu lösen. Da hier R selbst nicht vorkommt, fassen wir dies als Gleichung für $y(r) := R'(r)$ auf: Es gilt also $ry' = -y$ und damit

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dr}{r},$$

woraus $y = C/r$ folgt und damit $R(r) = C \ln r + D$. Damt die Lösung noch im Ursprung definiert ist, muß C=0 sein. Insgesamt haben wir $u_0(r,\varphi) = C_2 D = const =: C_0$.

Im Fall $\lambda = k^2$ lösen wir (2) mit Hilfe des Ansatzes $R(r) = r^a$. Einsetzen ergibt

$$r^2 a(a-1)r^{a-2} + rar^{a-1} - k^2 r^a = 0,$$

wovon nach Zusammenfassen und Kürzen von r^a nur $a^2 = k^2$ übrigbleibt. Also gilt $a = \pm k$, wovon die negativen a wegen der Definiertheit im Ursprung entfallen. Wir finden also

$$u_k(r,\varphi) = r^k (C_{1,k} \cos(k\varphi) + C_{2,k} \sin(k\varphi)),$$

so daß wir nach Superposition der Lösungen erhalten

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (C_{1,k} \cos(k\varphi) + C_{2,k} \sin(k\varphi)).$$

Es bleibt, die Randbedingung zu erfüllen. Setzt man $r = 0$ ein, folgt $C_0 = 0$. Setzt man $r = 1$, so erhält man die Fourierreihe

$$g(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k(C_{1,k} \cos(k\varphi) + C_{2,k} \sin(k\varphi)), \tag{4}$$

d.h. die Koeffizienten ergeben sich aus den bekannten Formeln

$$C_{1,k} = \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad C_{2,k} = \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi.$$

c) Die Funktion g läßt sich nur dann in eine Fourierreihe der Gestalt (4) entwickeln, wenn der nullte Fourierkoeffizient verschwindet, d.h.

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Die Erfülltheit dieser Bedingung kann durch kleine Störungen von g verletzt werden, d.h. die Lösbarkeit des Problems ist nicht mehr gegeben bei kleinen Änderungen der Daten. Somit ist das Problem nicht korrekt gestellt.

3. a) Wärmeleitung oder Diffusion

   b) Polarkoordinaten r, φ

   c) eine Randbedingung

   Randbedingung 1. Art (Dirichletsche):

$$u(t,r,0) = a(t,r), \qquad u\left(t,r,\frac{\pi}{2}\right) = b(t,r), \qquad u(t,R,\varphi) = c(t,\varphi)$$

Randbedingung 2. Art (Neumannsche):

$$u_\varphi(t,r,0) = a(t,r), \qquad u_\varphi\left(t,r,\frac{\pi}{2}\right) = b(t,r), \qquad u_r(t,R,\varphi) = c(t,\varphi)$$

Randbedingung 3. Art (Robinsche):

$$u(t,r,0) + a_1(t,r)u_\varphi(t,r,0) = a(t,r), \qquad u\left(t,r,\frac{\pi}{2}\right) + b_1(t,r)u_\varphi\left(t,r,\frac{\pi}{2}\right) = b(t,r)$$
$$u(t,R,\varphi) + c_1(t,\varphi)u_r(t,R,\varphi) = c(t,\varphi)$$

d) eine Anfangsbedingung: $u(0,r,\varphi) = u_0(r,\varphi)$

4. a)

$$F(g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x)\,dx = \int_1^2 e^{-i\xi x}\,dx = -\frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x}\Big|_1^2 = \frac{1}{i\xi}\left(e^{-i\xi} - e^{-2i\xi}\right)$$

b) Wir bezeichnen mit

$$v(t,\xi) = F_x(u(t,x))(t,\xi)$$

die partielle Fouriertransformierte bezüglich x. Damit schreibt sich die transformierte Gleichung als

$$v_t = -\xi^2 v - 2v = -(\xi^2+2)v.$$

Bei festgehaltenem ξ ist dies eine trennbare gewöhnliche Differentialgleichung.

$$\int \frac{dv}{v} = -\int (\xi^2+2)dt$$
$$\ln|v| = -(\xi^2+2)t + C$$
$$v = C(\xi)e^{-(\xi^2+2)t}$$

Transformation der Anfangsbedingung liefert nun

$$v(0,\xi) = F(g)(\xi) = \frac{1}{i\xi}\left(e^{-i\xi} - e^{-2i\xi}\right)$$

und damit

$$v(t,\xi) = F(g)(\xi)e^{-(\xi^2+2)t} = \frac{1}{i\xi}\left(e^{-i\xi} - e^{-2i\xi}\right)e^{-(\xi^2+2)t}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$u(t,x) = F_\xi^{-1}\left(F(g)(\xi)e^{-(\xi^2+2)t}\right) = g * F_\xi^{-1}\left(e^{-(\xi^2+2)t}\right).$$