TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

19. 7. 2016

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Betrachtet werden soll die Wellengleichung mit Dämpfung im Gesamtraum $\mathbb{R}^3$.
   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.
   b) Wie sehen geeignete Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ aus?
   c) Sei $f(x, y, z)$ harmonisch in $\mathbb{R}^3$. Für welche α stellt dann
   $$u(t, x, y, z) = e^{-\alpha t} f(x, y, z)$$
   eine Lösung der partiellen Differentialgleichung dar?
   d) Geben Sie das zugehörige stationäre Modell an und benennen es, sofern es existiert.

2. Wir wollen die in Polarkoordinaten gegebene partielle Differentialgleichung
   $$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad 0 \le r \le 1$$
   unter den Nebenbedingungen
   $$\begin{aligned} &u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi), \\ &u(0, \varphi) = 0, \\ &u_r(1, \varphi) = g(\varphi) \end{aligned}$$
   betrachten. Dabei ist $g(\varphi)$ eine gegebene, 2π-periodische, stetig differenzierbare Funktion.
   a) Was wird durch diese Gleichung modelliert? Erklären Sie auch die obigen Nebenbedingungen.
   b) Lösen Sie die Differentialgleichung unter den gegebenen Nebenbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!

      Hinweis: Die sich in Abhängigkeit von r ergebende gewöhnliche Differentialgleichung ist im Falle *nichtverschwindender* Separationskonstante vom Eulerschen Typ und kann dann durch einen Ansatz r^a mit zu ermittelndem Exponenten a gelöst werden.
   c) Unter welcher Zusatzbedingung an g besitzt die Randwertaufgabe eine Lösung? Entscheiden Sie, ob es sich um ein korrekt gestelltes Problem handelt.

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_t = \triangle u \ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 \ ,$$

im **Viertelkreis** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < R^2, x > 0, y > 0\}$.

a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Welche angepaßten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Wieviele Randbedingungen darf man stellen? Schreiben Sie alle drei Arten möglicher Randbedingungen für die jeweils drei Teile des Randes in angepaßten Koordinaten auf. Was wird durch sie modelliert?

d) Wie viele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie diese wieder in angepaßten Koordinaten.

4. Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Definition der Fouriertransformierten einer Funktion die Fouriertransformierte $F(g)(\xi)$ von g.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Fouriertransformation das Cauchy-Problem

$$u_t = u_{xx} - 2u, \qquad u(0, x) = g(x), \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

(Falls a) nicht gelöst wurde, kann hier auch mit einer allgemeinen Fouriertransformierten $F(g)(\xi)$ gerechnet werden.)