TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

21. 7. 2015

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir betrachten die Auslenkung $u(x, y, t)$ mit $x, y \in [a, b], t \geq 0$ einer quadratischen Membran. Es greift eine äußere Kraft (z. B. Schwerkraft) an.

   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.

   b) Wie sehen geeignete Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ aus?

   c) Wieviele Randbedingungen muß man hinzunehmen, um ein korrekt gestelltes Problem zu erhalten? Formulieren Sie diese für die verschiedenen Teile des Randes.

   d) Wieviele Schritte erfordert ein Separationsverfahren zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung? Geben Sie die entsprechenden Ansätze an.

   e) Unter welchen Bedingungen existert ein zugehöriges stationäres Modell? Geben Sie es an.

2. Wir untersuchen die partielle Differentialgleichung

$$u_t = \Delta u$$

   für $u = u(t, r, \varphi, h)$ mit Koordinaten $0 < r < R$, $0 < h < H$, $0 < \varphi < 2\pi$, $t > 0$.

   a) Was modelliert diese partielle Differentialgleichung? In welcher Geometrie ist sie gestellt?

   b) Wieviele Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ kann man hier fordern? Formulieren Sie sie in angepaßten Koordinaten.

   c) Schreiben Sie die Randbedingungen 3. Art (Robinsche Randbedingungen)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) = 0, \qquad h, u_0 = const$$

   für den gesamten Rand des Definitionsgebiets in angepaßten Koordinaten auf. Was ist die physikalische Bedeutung dieser Bedingungen?

   d) Welche weitere Bedingung bezüglich φ ist zu berücksichtigen? Schreiben Sie diese ebenfalls auf.

   e) Diskutieren Sie unter Berücksichtigung der vorher formulierten Randbedingungen das Langzeitverhalten der Lösung, d.h. was ist für $u(t, r, \varphi, h)$ für $t \to +\infty$ zu erwarten?

3. Gegeben sei das Anfangs-Randwert-Problem

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} - 2\gamma u_t, \qquad 0 < \gamma < \frac{\pi}{L},\\
&u(t,0) = u(t,L) = 0,\\
&u(0,x) = f(x),\\
&u_t(0,x) = 0,
\end{aligned}
$$

wobei $0 \leq x \leq L$ und $t \geq 0$. Dabei ist $f = f(x)$ eine gegebene Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.

   a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert? Gehen Sie auch auf die Bedeutung des Terms $2\gamma u_t$ und die Anfangs- und Randbedingungen ein.

   b) Lösen Sie dieses Anfangs-Randwert-Problem mit Hilfe der Fourierschen Methode!

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$
u_t = \frac{1}{1+t^2} u_{xx}, \qquad u(0,x) = f(x), \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.
$$

Leiten Sie mit Hilfe der partiellen Fouriertransformation eine Lösungsdarstellung her!