TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

25. 2. 2015

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen die Wärmeleitung in einer Vollkugel mit Radius R um den Ursprung betrachten. Es sei eine Quelle vorhanden.

   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten auf.

   b) Welche Koordinaten sind hier am günstigsten zu verwenden?

   c) Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ in angepaßten Koordinaten aus?

   d) Die obere Hälfte der Kugeloberfläche soll isoliert sein, an der unteren Hälfte der Kugeloberfläche findet freier Wärmeübergang statt. Formulieren Sie entsprechende Randbedingungen in angepaßten Koordinaten.

   e) Die Quelle verschwinde nun. Schreiben Sie das zugehörige stationäre Modell auf. Wieviele Schritte erfordert ein Separationsverfahren zur Lösung des stationären Modells? Geben Sie die entsprechenden Schritte an.

2. Wir untersuchen die partielle Differentialgleichung

$$\Delta^2 u = f(r, \varphi)$$

   für $u = u(r, \varphi)$ in Polarkoordinaten r, φ mit $0 < r < R$.

   a) Was modelliert diese partielle Differentialgleichung? Gehen Sie auch auf die physikalische Bedeutung des Quellterms f ein.

   b) Formulieren Sie Randbedingungen, um ein korrekt gestelltes Problem zu erhalten.

   c) Welche weitere Bedingung bezüglich φ ist zu berücksichtigen?

   d) Wir betrachten nun radialsymmetrische Lösungen $u = u(r)$ bei ebenfalls radialsymmetrischer Quelle $f = f(r)$. Benutzen Sie

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

   um die partielle Differentialgleichung in der Form

$$a(r)u_{rrrr} + b(r)u_{rrr} + c(r)u_{rr} + d(r)u_r = f(r)$$

   zu schreiben.

3. Wir wollen die Saitenschwingungsgleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

unter den Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t > 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f(x), \qquad 0 < x < \pi, \\ u_t(0,x) &= 0, \end{aligned}$$

betrachten. Dabei ist $f = f(x)$ eine gegebene Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.

Lösen Sie dieses Anfangs-Randwert-Problem mit Hilfe der Fourierschen Methode!

4. Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}e^{-x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

   a) Berechnen Sie mit Hilfe der Definition der Fouriertransformierten einer Funktion die Fouriertransformierte $F(g)(\xi)$ von g.
   b) Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Fouriertransformation das Cauchy-Problem

$$u_t = u_{xx} - u, \qquad u(0,x) = g(x), \qquad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

   (Falls a) nicht gelöst wurde, kann hier auch mit einer allgemeinen Fouriertransformierten $F(g)(\xi)$ gerechnet werden.)