TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

20. 3. 2014

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. In einer Kreisscheibe sei die instationäre partielle Differentialgleichung

$$u_t - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad 0 < r < 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

gegeben, wobei $u = u(t, r, \varphi)$ mit Polarkoordinaten r, φ.

a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert? Schreiben Sie diese Gleichung auch in kartesischen Koordinaten auf!

b) Formulieren Sie Randbedingungen erster Art und zweiter Art in Polarkoordinaten!

c) Wieviele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Schreiben sie solche Bedingungen auf! Auf welche Verträglichkeitsannahmen der Anfangsbedingungen zu den Randbedingungen erster bzw. zweiter Art muß jeweils geachtet werden?

d) In welchem Punkt der Kreisscheibe muß für alle Zeiten t eine Beschränktheitsbedingung gestellt werden und wie sieht eine solche aus?

e) Erläutern Sie, warum auch $u(t, r, \varphi) = u(t, r, \varphi + 2\pi)$ gefordert werden muß!

f) Wie vereinfacht sich die gegebene partielle Differentialgleichung, wenn wir nur an rotationssymmetrischen Lösungen interessiert sind?

g) Falls das zugehörige stationäre Modell existiert, so geben man die entsprechende partielle Differentialgleichung an und benenne sie.

h) Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes notwendig? Schreiben Sie die entsprechenden Ansätze auf.

2. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \triangle u \qquad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Wieviele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie diese!

c) Die Gleichung soll nun durch einen Ansatz der Form

$$u(t, x, y) = f(ax + by - t)$$

gelöst werden. Geben Sie Bedingungen an a und b an, so daß dieser Ansatz für jede zweifach stetig differenzierbare Funktion f einer Veränderlichen eine Lösung von (1) liefert. Finden Sie auch möglichst allgemeine Funktionen f, so daß der Ansatz sogar für alle $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung liefert.

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

unter den Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \qquad t > 0.$$

a) Was wird durch diese Gleichung und die Randbedingungen modelliert?

b) Lösen Sie die partielle Differentialgleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe der Fourierschen Methode (Separationsansatz und Superposition der Produktlösungen)!

c) Geben Sie nun diejenige Lösung an, die zusätzlich den Anfangsbedingungen

$$u(0,x) = \sin(3\pi x), \qquad u_t(0,x) = 0$$

genügt.

4. a) Beweisen Sie für die Laplacetransformation die Rechenregel

$$L\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right)(s) = aL(f)(sa)$$

mit Hilfe einer Substitution im Laplaceintegral.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die folgende Rand-Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \qquad t, x > 0,\\
&u(0,x) = 0, \qquad x > 0,\\
&u(t,0) = f(t), \qquad t > 0,\\
&\lim_{x \to +\infty} u(t,x) = 0, \qquad t > 0,\\
&|u(t,x)| \le C < \infty.
\end{aligned}$$