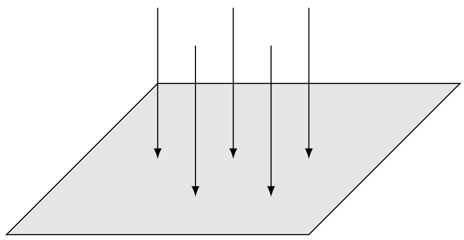
TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

14. 3. 2013

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir betrachten eine rechteckige Membran mit den Seitenlängen a und b. Sie befindet sich in waagerechter Lage und ist an zwei gegenüberliegenden Seiten fest eingespannt. An den anderen beiden Seiten kann sie frei schwingen. Es wirkt eine konstante Kraft vertikal nach unten.



   a) Schreiben Sie die zu betrachtende partielle Differentialgleichung auf.
   b) Wie sehen geeignete Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ aus?
   c) Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t > 0$ für alle vier Seiten der Membran!
   d) Geben Sie die zugehörige stationäre Gleichung an. Wie heißt diese Gleichung?
   e) Wir nehmen nun an, dass die äußere Kraft verschwindet. Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes für das nichtstationäre Problem notwendig? Schreiben Sie die Ansätze des Separationsverfahrens auf.

2. Wir wollen die in Polarkoordinaten gegebene partielle Differentialgleichung

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \qquad 0 \leq r \leq 1$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi), \\ &u(1,\varphi) = g(\varphi), \\ &|u(0,\varphi)| < \infty \end{aligned}$$

betrachten. Dabei ist $g(\varphi)$ eine gegebene, 2π-periodische Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.

   a) Was wird durch diese Gleichung modelliert? Gehen Sie auch auf die Bedeutung der Nebenbedingungen ein.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung unter den gegebenen Nebenbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!

   Hinweis: Die sich in Abhängigkeit von r ergebende gewöhnliche Differentialgleichung ist im Falle *nichtverschwindender* Separationskonstante vom Eulerschen Typ und kann dann durch einen Ansatz r^a mit zu ermittelndem Exponenten a gelöst werden.

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \triangle u \ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \ ,$$

   in der Kugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$.

   a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

   b) Welche angepaßten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

   c) Wie viele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie sie in angepaßten Koordinaten.

   d) Schreiben Sie mindestens zwei Arten von Randbedingungen in angepaßten Koordinaten auf.

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$u_t + u_{xxxx} = 0, \quad u(0, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$$

   Leiten Sie durch Anwendung der partiellen Fouriertransformation eine Lösungsdarstellung her!