TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

17. 7. 2012

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen die Wärmeleitung in einem **dreieckigen Prisma** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq a,\ 0 \leq z \leq H\}$ mit $a > 0$ und Höhe $H > 0$ betrachten, das vollständig isoliert ist. Es liegt eine Quelle vor.
   a) Schreiben Sie die zu betrachtende Differentialgleichung auf.
   b) Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ aus?
   c) Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t > 0$ für alle 5 Seitenflächen!
   d) Auf welche Verträglichkeitsbedingungen ist zu achten?
   e) Schreiben Sie die ersten beiden Ansätze des Separationsverfahrens auf.

2. Wir wollen die Laplacegleichung im halbunendlichen Streifen

$$\triangle u = 0, \qquad 0 < x < 1, y > 0$$

   unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} &u(0, y) = u(1, y) = 0, \qquad y > 0 \\ &u(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x < 1 \\ &\lim_{y \to +\infty} u(x, y) = 0, \qquad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

   betrachten. Dabei ist $g(x)$ eine gegebene Vergleichsfunktion, für die der Entwicklungssatz gilt.
   a) Was wird durch diese Gleichungen modelliert?
   b) Lösen Sie die Laplacegleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} = \triangle^2 u\ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2\ ,$$

   in der **Halbkreisscheibe** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 < R^2, x \geq 0\}$.
   a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?
   b) Welche angepaßten Koordinaten sind für dieses Problem zu verwenden?

c) Wieviele Randbedingungen darf man stellen? Schreiben Sie eine Art möglicher Randbedingungen für die zwei Teile des Randes in angepaßten Koordinaten auf. Was wird durch sie modelliert?

d) Wie viele Anfangsbedingungen lassen sich stellen? Formulieren Sie sie wieder in angepaßten Koordinaten.

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - e^{-t^2} u_{xx} = 0, \quad u(0, x) = g(x), \quad u_t(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \; t > 0.$$

Leiten Sie durch Anwendung der partiellen Fouriertransformation eine Lösungsdarstellung her!