TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

22. 3. 2010

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Lösungshinweise

1. a) $u_t - K \triangle u = f(x, y, z, t)$ mit $u = u(x, y, z, t)$, $\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

   b) Zylinderkoordinaten $u(r, h, \varphi, t)$

   c) $u(r, h, \varphi, t = 0) = u_0(r, h, \varphi)$

   d) $u_r(r = R, h, \varphi, t) = u_h(r, h = 0, \varphi, t) = u_h(r, h = H, \varphi, t) = 0$

   e) $\partial_r u_0(r = R, h, \varphi) = \partial_h u_0(r, h = 0, \varphi) = \partial_h u_0(r, h = H, \varphi) = 0$

   f) 3 Schritte: $u(r, h, \varphi, t) = v(r, h, \varphi)T(t)$, $v(r, h, \varphi) = w(r, h)\Phi(\varphi)$, $w(r, h) = R(r)H(h)$

2. a) Saite an beiden Enden fest eingespannt

   b) siehe Skript Kapitel 4.2.

   c) Die allgemeine Lösung der Gleichung unter den Randbedingungen hat die Form $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)(c_k \cos(k\pi t) + d_k \sin(k\pi t))$. Eingesetzt in die Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$u(0, x) = \sin(\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)c_k,$$
$$u_t(0, x) = \sin(2\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)d_k k\pi$$

   Eine Berechnung der Fourierkoeffizienten ist also nicht nötig, sondern wir können ablesen: $c_1 = 1$, $c_k = 0$ für $k > 1$, $d_2 = \frac{1}{2\pi}$, $d_k = 0$ für $k \neq 2$. Also

$$u(t, x) = \sin(\pi x)\cos(\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\sin(2\pi t).$$

3. a) stationäre Plattengleichung

   b) Funktionswerte und Normalenableitungen vorgegeben auf dem Rand: $u(x, 0) = u_1(x)$, $u(x, b) = u_2(x)$, $u(0, y) = u_3(y)$, $u(a, y) = u_4(y)$, $u_y(x, 0) = u_5(x)$, $u_y(x, b) = u_6(x)$, $u_x(0, y) = u_7(y)$, $u_x(a, y) = u_8(y)$ (fest eingespannt)

   Funktionswerte und Laplaceoperator vorgegeben auf dem Rand: $u(x, 0) = u_1(x)$, $u(x, b) = u_2(x)$, $u(0, y) = u_3(y)$, $u(a, y) = u_4(y)$, $\triangle u(x, 0) = u_5(x)$, $\triangle u(x, b) = u_6(x)$, $\triangle u(0, y) = u_7(y)$, $\triangle u(a, y) = u_8(y)$ (frei beweglich eingespannt)

c) Die Differentialgleichung ist erfüllt wegen $\partial_x^2 u_p = -c^2 u_p, \partial_y^2 u_p = -d^2 u_p$, also

$$\triangle u_p = -(c^2 + d^2) u_p, \qquad \triangle^2 u_p = \underbrace{(c^2 + d^2)^2}_{\lambda} u_p.$$

Die Randbedingungen ergeben

$$\begin{aligned}
u_p(0,y) = u_p(a,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin(ac)\sin(dy) = 0 \quad (y \in [0,b]) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{k\pi}{a}, \\
u_p(x,0) = u_p(x,b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin(cx)\sin(db) = 0 \quad (x \in [0,a]) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{l\pi}{b}, \\
\partial_x^2 u_p(0,y) = \partial_x^2 u_p(a,y) = 0, \quad &\Rightarrow \quad -c^2 \sin(ac)\sin(dy) = 0 (y \in [0,b]) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{k\pi}{a}, \\
\partial_y^2 u_p(x,0)^2 = \partial_y^2 u_p(x,b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -d^2 \sin(cx)\sin(db) = 0 (x \in [0,a]) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{l\pi}{b}
\end{aligned}$$

mit $k, l \in \mathbb{Z}$.

4. Sei $v(t,\xi) = F_x(u(t,x))(t,\xi)$ die Fouriertransformierte bezüglich x der Lösung. Fouriertransformieren der Gleichung $u_t = e^{-t} u_{xx}$ ergibt dann

$$v_t = e^{-t}(-\xi^2) v.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung lösen wir bei festem ξ durch Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{v} &= -e^{-t}\xi^2 dt \\
\int \frac{dv}{v} &= -\int e^{-t}\xi^2 dt \\
\ln|v| &= e^{-t}\xi^2 + C(\xi) \\
v(t,\xi) &= a(\xi) e^{e^{-t}\xi^2}
\end{aligned}$$

mit $a(\xi) = \pm e^{C(\xi)}$. Die Anfangsbedingung ergibt die Forderungen $v(0,\xi) = F(f)(\xi)$. $t = 0$ setzen liefert

$$\begin{aligned}
F(f)(\xi) &= a(\xi) e^{\xi^2} \\
a(\xi) &= F(f)(\xi) e^{-\xi^2} \\
v(t,\xi) &= F(f)(\xi) e^{(e^{-t}-1)\xi^2}.
\end{aligned}$$

Nach Rücktransformation erhält man also

$$u(x,t) = f * F_\xi^{-1}\left(e^{(e^{-t}-1)\xi^2}\right).$$

Da die Fouriertransfomierten der Gaußfunktionen bekannt sind, lässt sich hier die inverse Fouriertransformierte folgendermaßen hinschreiben (wurde nicht unbedingt erwartet)

$$F_\xi^{-1}\left(e^{(e^{-t}-1)\xi^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(1-e^{-t})}\right)$$

und das Faltungintegral nimmt die Gestalt an

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4(1-e^{-t})}\right) dy.$$