TU Bergakademie Freiberg
Institut für Angewandte Analysis
Prof. Dr. M. Reissig
Dr. G. Semmler

22. 3. 2010

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur

1. Wir wollen die Wärmeleitung in einem Zylinder $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H\}$ mit Radius R und Höhe H betrachten, der vollständig isoliert ist. Es liegt eine Quelle vor.
   a) Welche Differentialgleichung müssen wir benutzen? Sie kann in kartesischen Koordinaten angegeben werden.
   b) Welche angepaßten Koordinaten sind zu wählen?
   c) Wie sieht eine geeignete Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ in angepaßten Koordinaten aus?
   d) Formulieren Sie die Randbedingung für alle Zeiten $t \geq 0$ in angepaßten Koordinaten für die verschiedenen Teile des Randes!
   e) Auf welche Verträglichkeitsbedingung ist zu achten?
   f) Wieviele Schritte sind bei der Methode des Separationsansatzes notwendig? Schreiben Sie für jeden Schritt den Separationsansatz auf.

2. Wir betrachten eine schwingende Saite auf dem Intervall $[0, 1]$, beschrieben durch die Gleichung
$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
unter den Randbedingungen
$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \qquad (t \geq 0).$$
   a) Was wir durch die Randbedingungen modelliert?
   b) Lösen Sie die Gleichung unter den gegebenen Randbedingungen mit Hilfe eines Separationsansatzes!
   c) Wie sieht die Lösung aus, wenn zusätzlich die Anfangsbedingungen
$$u(0, x) = \sin(\pi x), \qquad u_t(0, x) = \sin(2\pi x)$$
   vorgegeben sind?

3. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung
$$\triangle^2 u = 0\ , \quad \triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2\ ,$$
in einer rechteckigen Geometrie $G = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$, $a, b > 0$.

a) Was wird durch diese partielle Differentialgleichung modelliert?

b) Geben Sie zwei Arten möglicher Randbedingungen an! Was wird durch sie jeweils modelliert?

c) Für welche $c, d \in \mathbb{R}$ ist

$$u_p(x, y) = \sin(cx)\sin(dy)$$

eine Lösung des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned}
&\triangle^2 u = \lambda u \\
&u_p(0, y) = u_p(a, y) = 0, \qquad \partial_x^2 u_p(0, y) = \partial_x^2 u_p(a, y) = 0, \qquad (y \in [0, b]), \\
&u_p(x, 0) = u_p(x, b) = 0, \qquad \partial_y^2 u_p(x, 0)^2 = \partial_y^2 u_p(x, b) = 0, \qquad (x \in [0, a])?
\end{aligned}$$

4. Gegeben sei das Cauchy-Problem

$$u_t = e^{-t} u_{xx}, \qquad u(0, x) = f(x), \qquad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Leiten Sie mit Hilfe der partiellen Fouriertransformation eine Lösungsdarstellung her!