Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg

Klausur Gewöhnliche Differentialgleichungen für Naturwissenschaftler

18. 3. 2021

Lösungen

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$t(t^2 + 3x^2 + 6x)x' + 3(t^2 + x^2) = 0. \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.

   (b) Die Differentialgleichung (1) besitzt einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$. Finden Sie einen solchen und machen Sie die Differentialgleichung durch Multiplikation mit μ exakt.

   (c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) in impliziter Form.

   Lösung:

   (a) Die Differentialgleichung (1) *ist von der Form* $h(t,x)x'(t) + g(t,x) = 0$ *mit*

$$h(t,x) = t(t^2 + 3x^2 + 6x), \qquad g(t,x) = 3(t^2 + x^2).$$

   Sie ist in ganz $\mathbb{R}^2$ *gestellt, also einem einfach zusammenhängenden Gebiet, so dass für die Exaktheit die Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

   hinreichend und notwendig ist. Wegen

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = 3t^2 + 3x^2 + 6x$$

   ist die Integrabilitätbedingung nicht erfüllt und somit die Gleichung nicht exakt.

   (b) Ein integrierender Faktor der Form $\mu(x)$ *ergibt sich als Lösung von*

$$\mu_x = \frac{h_t - g_x}{g}\mu = \frac{3t^2 + 3x^2 + 6x - 6x}{3(t^2 + x^2)}\mu = \mu.$$

   Trennung der Variablen führt auf

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{\mu} &= dx \\ \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int dx \\ \ln|\mu| &= x \quad (+C) \\ \mu(x) &= e^x.\end{aligned}$$

   (Hätte man natürlich auch gleich sehen können.) Daher ist die Gleichung

$$e^x t(t^2 + 3x^2 + 6x)x' + 3e^x(t^2 + x^2) = 0 \tag{2}$$

   exakt.

(c) *Weil (2) exakt ist, gibt es eine Stammfunktion $F(t,x)$, die*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 3e^x(t^2 + x^2) \tag{3}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x t(t^2 + 3x^2 + 6x) \tag{4}$$

erfüllt. Wir integrieren zuerst (3):

$$F(t,x) = \int 3e^x(t^2 + x^2)\,dt = e^x(t^3 + 3tx^2) + C(x).$$

Dies setzen wir in (4) ein:

$$e^x(t^3 + 3tx^2) + e^x(6tx) + C'(x) = e^x(t^3 + 3tx^2 + 6tx).$$

Also folgt $C'(x) = 0$, so dass $C = const$ ist. Damit ist

$$F(t,x) = e^x(t^3 + 3tx^2) = C$$

eine Lösungdarstellung in impliziter Form.

2. Gegeben sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} x + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

(b) Ermitteln Sie die Lösung des inhomogenen Systems (5) unter der Anfangsbedingung

$$x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) *Wir berechnen die Eigenwerte der Systemmatrix:*

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ -4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-7-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

Also ist $\lambda = -1$ der einzige Eigenwert. Wir suchen zugehörige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es gibt also bis auf lineare Abhängigkeit nur einen Eigenvektor v_1. Wir brauchen deshalb noch einen Hauptvektor v_2 zweiter Stufe als Lösung von $(A - \lambda E)v_2 = v_1$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Zu v_2 könnte man ein beliebiges Vielfaches von v_1 addieren.) Die Funktionen

$$x_1(t) = e^{\lambda t}v_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$x_2(t) = e^{\lambda t}(tv_1 + v_2) = e^{-t}\left(t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 3t-1 \\ -2t+1 \end{pmatrix}$$

bilden damit ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems lautet

$$x(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 3t-1 \\ -2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

(b) *Wir machen den Ansatz*

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen seine Ableitung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & (3-3t+1)e^{-t} \\ 2e^{-t} & (-2+2t-1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix}$$

in das inhomogene System ein und erhalten

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -3e^{-t} & (4-3t)e^{-t} \\ 2e^{-t} & (-3+2t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wovon nach Durchführung der Matrixmultiplikation nur noch

$$\begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

übrigbleibt. Die Determinante der Fundamentalmatrix ist

$$W(t) = \begin{vmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{vmatrix} = (-6t+3+6t-2)e^{-2t} = e^{-2t},$$

wir erhalten also durch Multiplikation mit der inversen Matrix

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} & (-3t+1)e^{-t} \\ 2e^{-t} & 3e^{-t} \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8t+3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Integration liefert daher

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^2+3t+D_1 \\ 8t+D_2 \end{pmatrix},$$

so dass die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & (3t-1)e^{-t} \\ -2e^{-t} & (-2t+1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4t^2+3t+D_1 \\ 8t+D_2 \end{pmatrix}$$

lautet. Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $D_1 = 1$, $D_2 = -1$. *Also lautet die gesuchte Lösung*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} 3 & 3t-1 \\ -2 & -2t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4t^2+3t+1 \\ 8t-1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -12t^2+9t+3+24t^2-8t-3t+1 \\ 8t^2-6t-2-16t^2+2t+8t-1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 12t^2-2t+4 \\ -8t^2+4t-3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'' + 4x' + 3x = 60\cos(3t), \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = -1$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Lösung: Sei $F(s) = \mathcal{L}(x)(s)$ die Laplacetransformierte der gesuchten Lösung. Wir finden

$$\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0) = sF(s) - 1,$$
$$\mathcal{L}(x'')(s) = s^2\mathcal{L}(x)(s) - sx(0) - x'(0) = s^2F(s) - s + 1.$$

Anwendung der Laplacetransformation auf die gegebene Differentialgleichung liefert daher

$$\begin{aligned} s^2F(s) - s + 1 + 4(sF(s) - 1) + 3F(s) &= \frac{60s}{s^2+9} \\ (s^2+4s+3)F(s) &= \frac{60s}{s^2+9} + s + 3 = \frac{60s + s^3 + 3s^2 + 9s + 27}{s^2+9} \\ F(s) &= \frac{s^3+3s^2+69s+27}{(s^2+9)(s^2+4s+3)} \end{aligned}$$

$s^2 + 4s + 3$ hat die Nullstellen

$$s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1,$$

also $s_1 = -3$ und $s_2 = -1$. Wir machen daher folgenden Ansatz zur Partialbruchzerlegung:

$$F(s) = \frac{s^3+3s^2+69s+27}{(s^2+9)(s+1)(s+3)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$\begin{aligned} s^3+3s^2+69s+27 &= (As+B)(s+1)(s+3) + C(s^2+9)(s+3) + D(s^2+9)(s+1) \\ &= (As+B)(s^2+4s+3) + C(s^3+3s^2+9s+27) + D(s^3+s^2+9s+9) \\ &= (A+C+D)s^3 + (4A+B+3C+D)s^2 + (3A+4B+9C+9D)s + (3B+27C+9D) \end{aligned}$$

so dass wir durch Koeffizientenvergleich auf die Gleichungen

$$A + C + D = 1 \tag{6}$$
$$4A + B + 3C + D = 3 \tag{7}$$
$$3A + 4B + 9C + 9D = 69 \tag{8}$$
$$3B + 27C + 9D = 27 \tag{9}$$

geführt werden. Zieht man von (8) das 9-fache von (6) ab, bleibt

$$-6A + 4B = 60 \tag{10}$$

übrig. Zieht man von (9) das 9-fache von (7) ab, erhält man

$$-36A - 6B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = -6A.$$

Eingesetzt in (10) erhalten wir

$$-6A - 24A = 60 \qquad \Rightarrow \qquad A = -2.$$

Mit (10) bekommen wir $B = 12$. Also lauten (6) und (7)

$$C + D = 3, \qquad 3C + D = -1$$

woraus man unschwer $C = -2$ und $D = 5$ errechnet. Damit gilt

$$F(s) = \frac{-2s+12}{s^2+9} - \frac{2}{s+1} + \frac{5}{s+3}$$

und die Rücktransformation liefert

$$x(t) = -2\cos(3t) + 4\sin(3t) - 2e^{-t} + 5e^{-3t}.$$