Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg

Klausur Gewöhnliche Differentialgleichungen für Naturwissenschaftler

7. 3. 2017

1. Gegeben sei die Differentialgleichung
$$x' - e^{2t} - x + 1 = 0.$$
   (a) Zeigen Sie, daß diese Differentialgleichung nicht exakt ist.
   (b) Die Differentialgleichung besitzt einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(t)$. Finden Sie einen solchen und bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung
$$h(x,t)x' + g(x,t) = 0$$
ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet wie im vorliegenden Fall $\mathbb{R}^2$ exakt genau dann, wenn die Integrabilitätsbedingung
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$
erfüllt ist. Hier ist
$$h(x,t) = 1, \qquad g(x,t) = -e^{2t} - x + 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$
und damit die Differentialgleichung nicht exakt.

(b) Weil
$$\frac{g_x - h_t}{h} = -1$$
nicht von x abhängt, gibt es einen nur von t abhängigen integrierenden Faktor μ, der sich aus der Differentialgleichung
$$\mu_t = \frac{g_x - h_t}{h}\mu = -\mu$$
ergibt. Trennung der Veränderlichen liefert
$$\int \frac{d\mu}{\mu} = -\int dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln \mu = -t \qquad \Rightarrow \qquad \mu(t) = e^{-t}.$$
Die mit diesem Faktor multiplizierte Gleichung
$$e^{-t}x' - e^{t} - xe^{-t} + e^{-t} = 0$$
ist nun exakt, daher gibt es eine Stammfunktion $F = F(x,t)$, die
$$\frac{\partial F}{\partial t} = -e^{t} - xe^{-t} + e^{-t} \tag{1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-t} \tag{2}$$
erfüllt. Integration von (1) liefert
$$F(x,t) = \int -e^{t} - xe^{-t} + e^{-t}\,dt = -e^{t} + e^{-t}x - e^{-t} + C(x).$$

Setzt man das in (2) ein, erhält man

$$e^{-t} + C'(x) = e^{-t} \qquad \Rightarrow \qquad C'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C(x) = const.$$

Damit ist

$$F(x,t) = -e^t + e^{-t}x - e^{-t} = C$$

eine implizite Lösungsdarstellung. Wir gewinnen daraus die explizite Lösung

$$x(t) = e^{2t} + 1 + Ce^t.$$

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene System bildet.

(b) Bestimmen Sie nun die Lösung des inhomogenen Systems (3) unter der Anfangsbedingung

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Durch Einsetzen bestätigt man, daß $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen des homogenen Systems sind:

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1'(t),$$

$$Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} = x_2'(t).$$

Um die lineare Unabhängigkeit der Lösungen zu zeigen, bilden wir die Wronskideterminante

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{vmatrix} = 2t \neq 0$$

für $t \neq 0$ (für $t = 0$ ist das System (3) gar nicht definiert).

Hinweis: Die Koeffizientenmatrix dieses Systems ist nicht konstant, daher kann man hier nicht mit Eigenwerten und -vektoren arbeiten!

(b) Um die allgemeine Lösung von (3) zu bestimmen, machen wir den Ansatz zur Variation der Konstanten

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

Ableiten liefert

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Setzt man das mit

$$Ax + b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix}$$

gleich, erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2t}\begin{pmatrix} 2t & -t^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix} = \frac{1}{2t}\begin{pmatrix} -3t^3 \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Integration ergibt

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3 + D_1 \\ \frac{3}{2}t + D_2 \end{pmatrix}$$

und daher die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3 + D_1 \\ \frac{3}{2}t + D_2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + D_1 \\ \frac{3}{2} + D_2 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + D_1 \\ \frac{3}{2} + D_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und endlich $D_1 = 1$, $D_2 = -2$. Also lautet die Lösung

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3 + 1 \\ \frac{3}{2}t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 - 2t^2 + 1 \\ 3t^2 - 4t \end{pmatrix}.$$

3. Man löse folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$x'' + 2x' + 2x = 3\sin t + \cos t, \qquad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$$

Lösung: Es sei $F(s) = \mathcal{L}(x)(s)$. Dann ist

$$\mathcal{L}(x')(s) = sF(s) - x(0) = sF(s) + 1, \qquad \mathcal{L}(x'')(s) = s^2F(s) - sx(0) - x'(0) = s^2F(s) + s.$$

Transformation der Differentialgleichung liefert daher

$$\begin{aligned} s^2F(s) + s + 2(sF(s) + 1) + 2F(s) &= \frac{3}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} \\ (s^2 + 2s + 2)F(s) &= \frac{3+s}{s^2+1} - s - 2 = \frac{-s^3 - 2s^2 + 1}{s^2+1} \\ F(s) &= \frac{-s^3 - 2s^2 + 1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}. \end{aligned}$$

Da der Nenner keine reellen Nullstellen hat, lautet der Ansatz zur Partialbruchzerlegung

$$\frac{-s^3 - 2s^2 + 1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} = \frac{As + B}{s^2+1} + \frac{Cs + D}{s^2+2s+2},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} -s^3 - 2s^2 + 1 &= (As + B)(s^2 + 2s + 2) + (Cs + D)(s^2 + 1) \\ &= (A + C)s^3 + (2A + B + D)s^2 + (2B + 2A + C)s + (2B + D). \end{aligned}$$

Wir haben also $A + C = -1$, $2A + B + D = -2$, $2B + 2A + C = 0$ und $2B + D = 1$ zu erfüllen. Es folgt nacheinander $2B + A = 1$, $2A - B = -3$, $A = -1$, $B = 1$, $D = -1$, $C = 0$. Damit ist

$$F(s) = \frac{-s+1}{s^2+1} + \frac{-1}{(s+1)^2+1}$$

zurückzutransformieren. Wir erhalten die Lösung

$$x(t) = -\cos t + \sin t - e^{-t}\sin t.$$