Dr. G. Semmler
TU Bergakademie Freiberg

Klausur Gewöhnliche Differentialgleichungen für Naturwissenschaftler

3. 3. 2015

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$x'(t) = \frac{2t+2x}{3t+x}, \qquad x(2) = 0.$$

Lösung: Weil in

$$x' = \frac{2t+2x}{3t+x} = \frac{2+2\frac{x}{t}}{3+\frac{x}{t}}$$

die rechte Seite nur von x/t abhängt, handelt es sich um eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, die durch die (natürliche) Substitution $y(t) := x(t)/t$ gelöst wird. Wir erhalten $x = yt$ und damit

$$y + ty' = \frac{2+2y}{3+y}.$$

Dies ist eine trennbare Differentialgleichung:

$$ty' = \frac{2+2y}{3+y} - y = \frac{-y^2-y+2}{3+y}$$

$$\frac{(3+y)\,dy}{-y^2-y+2} = \frac{dt}{t}. \tag{1}$$

Zur Integration der linken Seite wenden wir Partialbruchzerlegung an, beginnend mit dem Ansatz

$$\frac{3+y}{-y^2-y+2} = -\frac{3+y}{(y+2)(y-1)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y-1}$$

folgt

$$-3-y = A(y-1) + B(y+2),$$

und daraus $A = \frac{1}{3}$ und $B = -\frac{4}{3}$. Integration von (1) liefert damit

$$\ln|t| = \frac{1}{3}\ln|y+2| - \frac{4}{3}\ln|y-1| + C.$$

Nun kommt die Rücksubstitution:

$$\ln|t| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{t}+2\right| - \frac{4}{3}\ln\left|\frac{x}{t}-1\right| + C.$$

Umgeformt ergibt sich (mit neuem C)

$$t^3 = C\frac{\frac{x}{t}+2}{\left(\frac{x}{t}-1\right)^4}$$

bzw.

$$(x-t)^4 = C(x+2t).$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$(0-2)^4 = C(0+4) \qquad \Rightarrow \qquad C = 4.$$

Die Lösung in impliziter Form lautet

$$(x-t)^4 = 4(x+2t).$$

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8e^t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

   (b) Ermitteln Sie nun die allgemeine Löung des inhomogenen Systems mittels Variation der Konstanten.

   Lösung:

   (a) *Wir beginnen mit den Eigenwerten. Das charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4$$

   hat die Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Ein Eigenvektor zu λ_1 errechnet sich so

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   ein Eigenvektor zu λ_2 ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Damit lautet die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$x(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) *Wir machen den Ansatz*

$$x(t) = X(t)C(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & 2e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

   mit der Fundamentalmatrix $X(t)$. Weil $x'(t) = X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = AX(t)C(t) + b(t)$ auf $X(t)C'(t) = b(t)$ führt, haben wir damit

$$\begin{pmatrix} -2e^{-t} & 2e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^t \\ 4 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Weil $\det X(t) = -2e^{2t} - 2e^{2t} = -4e^{2t}$, *ergibt die Invertierung der Fundamentalmatrix*

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -2e^{3t} \\ -e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8e^t \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 2e^t \\ 2e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Eine Integration liefert

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^t + D_1 \\ -e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + D_2 \end{pmatrix}$$

mit freien Konstanten D_1, D_2. *Eingesetzt in den Ansatz erhalten wir als allgemeine Lösung*

$$x(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & 2e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^t + D_1 \\ -e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ \frac{4}{3} - 2e^t \end{pmatrix} + D_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + D_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Wir betrachten einen harmonischen Oszillator ohne Reibung, der aus dem Ruhezustand durch eine zunächst linear anwachsende und dann konstante äußere Kraft angeregt wird. Lösen Sie dazu das Anfangswertproblem

$$x'' + \omega_0^2 x = f(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

mit einer Konstanten $\omega_0 > 0$ und

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases}$$

mit Hilfe der Laplacetransformation.

Hinweise: Stellen Sie die rechte Seite mit Hilfe der Funktion

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \ge 1, \end{cases}$$

dar und verwenden Sie $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$. *Lösung: Weil* $f(t) = t - u_1(t)(t-1)$, *ergibt eine Transformation der Differentialgleichung*

$$s^2 F(s) + \omega_0^2 F(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2}$$

für die Laplacetransformierte $F(s)$ *der Lösung. Wir erhalten*

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega_0^2)} - e^{-s}\frac{1}{s^2(s^2+\omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+\omega_0^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-s}\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right),$$

wobei letztere Zerlegung einer Partialbruchzerlegung entspricht. Damit können wir rücktransformieren:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\omega_0^2}\left(t - \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t - u_1(t)(t-1) + \frac{1}{\omega_0}u_1(t)\sin\omega_0(t-1)\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2}t - \frac{1}{\omega_0^3}\sin\omega_0 t, & 0 \le t \le 1, \\ \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^3}\sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^3}\sin\omega_0(t-1), & t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$