Wellengleichungen

Vorlesung gehalten durchgängig ab Wintersemester 2006-2007
von Prof. M. Reissig

1 Einführung

Wir wollen uns in dieser Vorlesung mit der Theorie von Wellengleichungen $u_{tt} - c^2 \triangle u = 0$, c^2 ist eine positive Konstante, $\triangle = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2$ ist der Laplace-Operator, beschäftigen. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung einer Welle (oder einer Störung) und sie tritt bei der Behandlung zahlreicher technischer Modelle auf. Einige dieser Modelle sind die schwingende Saite, die schwingende Membran, longitudinale Schwingungen elastischer Stäbe oder Balken, oberflächliche Wasserwellen, akustische Probleme für Flüsse von Fluiden, in denen eine Schallausbreitung möglich ist, die Übertragung von elektrischen Signalen in Kabeln, oder die Beschreibung elektrischer und magnetischer Felder. Letztere werden durch die *Maxwellschen Gleichungen* im $\mathbb{R}^3$

$$\partial_t D - \text{ rot } H = 0 \ , \ \ \partial_t B + \text{ rot } E = 0$$

mit den Anfangsbedingungen ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$)

$$D(0,x) = D_0(x) \ , \ \ B(0,x) = B_0(x)$$

und den Nebenbedingungen

$$\text{div } D = \text{ div } B = 0$$

beschrieben. Dabei bezeichnen mit $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$

$D = (D_1, D_2, D_3) = D(t,x)$ den Verschiebungsstrom,

$H = (H_1, H_2, H_3) = H(t,x)$ das magnetische Feld,

$B = (B_1, B_2, B_3) = B(t,x)$ die magnetische Induktion,

$E = (E_1, E_2, E_3) = E(t,x)$ das elektrische Feld.

Elektrische und magnetische Ströme werden vernachlässigt. Dann beschreibt obiges partielles Differentialgleichungssystem 1. Ordnung elektromagnetische Wellen ohne Dämpfungseffekt, d.h. die elektrische Leitfähigkeit ist Null.
Die zu bestimmenden Vektorfelder sind $D = \varepsilon(E)$, $B = \mu(H)$ (bzw. $E = \varepsilon^{-1}(D)$, $H = \mu^{-1}(B)$). Wir nehmen dabei an, daß $\varepsilon, \mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glatte Bijektionen sind mit der Eigenschaft, daß die Jacobi-Matrizen $\frac{\partial \varepsilon}{\partial E}$, $\frac{\partial \mu}{\partial H}$ gleichmäßig

positiv definit sind bez. der Argumente auf jeder kompakten Menge des $\mathbb{R}^3$. Wir erinnern uns

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_1} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_2} & \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial E_3} \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_1} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_2} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial E_3} \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial E_1} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial E_2} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial E_3} \end{pmatrix} .$$

Der nichtlineare Ansatz $D = \varepsilon(E)$, $B = \mu(H)$ scheint doch recht allgemein, deshalb verwendet man häufig die Vereinfachungen

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 E + O(|E|^3) \text{ für } |E| \to 0 \, , \; \mu(H) = \mu_0 H + O(|H|^3) \text{ für } |H| \to 0 \, .$$

Man nennt ε_0 die *Dielektrizitätskonstante* und μ_0 die *Permeabilität.* Wir können diese o.B.d.A gleich 1 setzen. Verwenden wir nun die inversen Abhängigkeiten

$$\varepsilon^{-1}(D) = D + O(|D|^3) \text{ für } |D| \to 0 \, , \; \mu^{-1}(B) = B + O(|B|^3) \text{ für } |B| \to 0 \, ,$$

dann erhalten wir

$$\partial_t D - \text{ rot } B = \text{ rot } F(B) \, , \; \partial_t B + \text{ rot } D = \text{ rot } G(D) \, ,$$

mit glatten Vektorfunktionen $F = F(B)$ und $G = G(D)$. Diese besitzen das asymptotische Verhalten $F(B) = O(|B|^3)$ für $|B| \to 0$ und $G(D) = O(|D|^3)$ für $|D| \to 0$. Wir vernachlässigen jetzt die "kleinen Nichtlinearitäten" rot $F(B)$ und rot $G(D)$. Natürlich ist abzuklären, ob das überhaupt erlaubt ist, da man dadurch ein nichtlineares Modell zu einem linearen Modell abändert. Besser ist, das nichtlineare Modell beizubehalten und in erster Instanz das "linearisierte Modell"

$$\partial_t D - \text{ rot } B = 0 \; , \; \partial_t B + \text{ rot } D = 0$$

zu studieren. Nach Differentiation ∂_t ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_t^2 D - \text{ rot } \partial_t B = \partial_t^2 D + \text{ rot rot } D = 0 \, , \\ \partial_t^2 B + \text{ rot } \partial_t D = \partial_t^2 B + \text{ rot rot } B = 0 \, . \end{aligned}$$

Verwenden wir die aus der Vektoranalysis bekannte Beziehung $\triangle B = \text{grad div } B -$ rot rot B, so erhalten wir mit der vorausgesetzten Divergenzfreiheit von B und D sofort die Wellengleichungen

$$\partial_t^2 D - \triangle D = 0, \; \partial_t^2 B - \triangle B = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} & D(0,x) = D_0(x), \;\; B(0,x) = B_0(x), \\ & \partial_t D(0,x) = \text{ rot } H(0,x) = \text{ rot } \mu^{-1}(B_0(x)), \\ & \partial_t B(0,x) = - \text{ rot } E(0,x) = - \text{ rot } \varepsilon^{-1}(D_0(x)). \end{aligned}$$

Mitunter führen Modellierungen zu *Wellengleichungen mit Termen niederer Ordnung.*

Klein-Gordon Gleichung

Klein (1927) und Gordon (1926) haben folgende relativistische Gleichung für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld hergeleitet ($m^2 > 0$ ist eine Konstante):

$$\Box\, u + m^2 u = \partial_t^2 u - \triangle u + m^2 u = 0\,.$$

Mit $\Box$ bezeichnen wir den d'Alembertschen Operator $\partial_t^2 - \triangle$. Der Term $m^2 u$ heißt *Masseterm oder Potential.*

Telegraphen-Gleichung

Diese lautet mit positiven Konstanten a und b

$$u_{tt} - u_{xx} + a\, u_t + b\, u = 0\ .$$

Sie tritt auf bei der Behandlung der Ausbreitung von elektrischen Signalen bei der Datenfernübertragung, bei der Ausbreitung von Druckwellen bei pulsierenden Blutströmungen in Arterien oder bei der zufälligen Bewegung von Käfern entlang einer Hecke. Mit $b\,u$ wird wieder ein *Masseterm*, mit $a\,u_t$ ein *Dämpfungsterm* beschrieben (vgl. mit dem harmonischen Oszillator aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen).

Wellengleichungen mit Konvektionsterm

Schließlich treten noch Modelle der Form

$$u_{tt} - \triangle u + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x)\partial_{x_k} u = u_{tt} - \triangle u + \vec{a}(t,x)\cdot\ \text{grad}\ u = 0$$

auf. Der Term $\vec{a}(t,x)\cdot$ grad u beschreibt eine Konvektion oder ein Transportverhalten.

Merke: In allen eingeführten Modellen kann die homogene rechte Seite durch eine rechte Seite $f = f(t,x)$ (mitunter hängt die rechte Seite auch von der gesuchten Lösung oder deren Ableitungen ab - siehe Maxwellsche Gleichungen) ersetzt werden. Diese beschreibt *Quellen oder Senken.*

2 Lösungsdarstellungen für Wellengleichungen

2.1 Klassische Lösungsdarstellungen

2.1.1 Der Anschauungsraum $\mathbb{R}^1$

Wir wenden uns dem Cauchy-Problem

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \;\; u(0,x) = f(x)\;, \;\; u_t(0,x) = g(x)$$

zu. Neue Koordinaten $\xi = x - t$, $\eta = x + t$ (motiviert über den *Begriff der Charakteristik*) transformieren die partielle Differentialgleichung zu $-4u_{\xi\eta} = 0$. Diese hat die allgemeine Lösung $u = u(\xi,\eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta)$. Rücktransformation liefert $u = u(t,x) = u_1(x-t) + u_2(x+t)$. Damit ist die allgemeine Lösung u der Wellengleichung eine lineare Superposition von zwei Wellen. Der Term $u_1(x-t)$ stellt eine Welle (oder Störung) dar, die sich mit der Geschwindigkeit 1 nach rechts bewegt. Die Welle $u_2(x+t)$ bewegt sich nach links mit der Geschwindigkeit 1. Beide Lösungen (vorausgesetzt, daß u_1, u_2 zweimal differenzierbar sind) nennt man *traveling wave solutions*. Es bleibt noch, die Cauchy-Bedingungen zu verarbeiten, d.h.

$$u(0,x) = f(x) = u_1(x) + u_2(x), \quad u_t(0,x) = g(x) = -u_1'(x) + u_2'(x).$$

Integration der zweiten Gleichung liefert $-u_1(x) + u_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(r)dr$, x_0 ist eine beliebige Konstante. Damit erhalten wir

$$u_1(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} g(r)dr, \; u_2(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} g(r)dr.$$

Zusammenfassend erhalten wir die sogenannte *d'Alembertsche Lösungsdarstellung*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(f(x-t) + f(x+t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(r)dr.$$

2.1.2 Was liefert uns die d'Alembertsche Lösungsdarstellung?

2.1.2.1 Regularitätsaussagen

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(0,x) = f(x)$, $u_t(0,x) = g(x)$ mit Daten $f \in C^k(\mathbb{R}^1)$ und $g \in C^{k-1}(\mathbb{R}^1)$.

Satz 2.1 *Das obige Cauchy Problem besitzt genau eine Lösung $u \in C^k([0,\infty) \times \mathbb{R}^1)$. Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, d.h. falls wir f und g bez. der*

Topologien von $C^k(\mathbb{R}^1)$ und $C^{k-1}(\mathbb{R}^1)$ ein wenig ändern, dann ändert sich die Lösung ein wenig in der Topologie des $C^k([0,\infty)\times\mathbb{R}^1)$.

Beweis: Die Existenz einer Lösung ergibt sich mit der d'Alembertschen Lösungsformel. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß sich die allgemeine Lösung von $u_{tt}-u_{xx}=0$ in der Form $u(t,x)=u_1(x-t)+u_2(x+t)$ darstellen läßt. Die stetige Abhängigkeit von den Daten ergibt sich aus der Lösungsdarstellung.
$\square$

Aufgabe 1 Wir betrachten das Cauchy-Problem mit $f=g=0$ außerhalb des Intervalls $[-l,l]$. Zeigen Sie, daß zu jedem Punkt x_0 Zahlen $T(x_0)$ und U mit $u(x_0,t)=U$ für $t\geq T(x_0)$ existieren. Bestimmen Sie diese.

2.1.2.2 Qualitative Eigenschaften der Lösungen

Aus der d'Alembertschen Lösungsformel ergeben sich bemerkenswerte Eigenschaften der Lösungen von Wellengleichungen, die nur für *Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen* (die Wellengleichung ist ein Repräsentant dieser Klasse) charakteristisch sind.

Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen

Vorgelegt sei unser Cauchy-Problem mit Daten $f\in C^2(\mathbb{R}^1)$ und $g\in C^1(\mathbb{R}^1)$. Wir stören diese Daten durch $f_s\in C^2(\mathbb{R}^1)$ und $g_s\in C^1(\mathbb{R}^1)$ nur auf einem Intervall $[a,b]$. Uns interessiert wie sich diese Störung fortpflanzt. Dazu studieren wir das Cauchy-Problem

$$u_{tt}-u_{xx}=0,\ \ u(0,x)=f_s(x),\ \ u_t(0,x)=g_s(x)$$

mit $f_s=g_s=0$ außerhalb von $[a,b]$. Als Lösung erhalten wir

$$u_s(t,x)=\frac{1}{2}\Big(f_s(x-t)+f_s(x+t)\Big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g_s(r)dr.$$

Frage: Wann spüren wir die Störungen in einem Punkt $x_0\in\mathbb{R}^1$, der außerhalb von $[a,b]$ liegt? Es ist natürlich klar, daß für kleine Zeiten in x_0 Ruhe herrscht.

Antwort: Nach der endlichen Zeit $T=\text{dist}\ (x_0,[a,b])$ spürt man die Störung. Deshalb spricht man von einer *endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen oder von der Existenz einer vorderen Wellenfront.*

Abhängigkeitsmenge

Frage: Welche Informationen der Daten bestimmen die Lösung u in einem Punkt (t_0,x_0)?

Antwort: Wir benötigen zur Bestimmung von $u(t_0, x_0)$ das Datum f an den Stellen $x_0 - t_0$ und $x_0 + t_0$ und das Datum g im Intervall $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. Man nennt deshalb das Intervall $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ *Abhängigkeitsmenge* für die Lösung u im Punkt (t_0, x_0).

Huygens-Prinzip

Das *Huygens-Prinzip* beschreibt die Existenz einer *hinteren Wellenfront*, d.h. die Eigenschaft, daß in einem Ortspunkt $x_0 \in \mathbb{R}^1$ nach einer gewissen Zeit $T(x_0)$ wieder Ruhe herrscht, sofern man an der Ausbreitung von Störungen in einem Intervall $[a, b]$ interessiert ist. Da für $u(t_0, x_0)$ die Abhängigkeitsmenge $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ ist, kann i.allg. keine hintere Wellenfront beoachtet werden. Gilt aber $g \equiv 0$, dann wird $u(t_0, x_0)$ nur durch $f(x_0 - t_0)$ und $f(x_0 + t_0)$ bestimmt. Somit müßte klar sein, daß ab dem Zeitpunkt $T = \max(x_0 - a, b - x_0)$ in x_0 Ruhe herrscht. Zusammenfassend gilt damit das Huygens-Prinzip eingeschränkt unter der Annahme $g \equiv 0$.

2.1.2.3 Wellenmodelle mit Quellen

Wenden wir uns dem Wellenmodell

$$u_{tt} - u_{xx} = F(t, x), \;\; u(0, x) = f(x), \;\; u_t(0, x) = g(x)$$

zu. Wir setzen voraus, daß die Quelle F geeignet integrierbar sei, so daß alle späteren Rechnungen sinnvoll sind (z.B. $F \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R})$). Für die gesuchte Lösung wählen wir den Ansatz $u = v + w$, wobei v und w den Cauchy-Problemen (hier kommt die Linearität unseres Ausgangsproblems zum Tragen)

$$\begin{aligned} &v_{tt} - v_{xx} = F(t, x), \;\; v(0, x) = 0, \;\; v_t(0, x) = 0, \\ &w_{tt} - w_{xx} = 0, \;\; w(0, x) = f(x), \;\; w_t(0, x) = g(x) \end{aligned}$$

genügen. Die Bestimmung von w ist klar, so daß wir uns nur noch mit der von v beschäftigen müssen.

Aufgabe 2 Leiten Sie die Lösungsdarstellung

$$v(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-t')}^{x+(t-t')} F(x', t') dx' dt'$$

her und überprüfen Sie, ob v tatsächlich das Cauchy-Problem löst. Welche Werte von F bestimmen die Lösung v im Punkt (t_0, x_0)? Bestimmen Sie das Abhängigkeitsgebiet. Es ist in diesem Zusammenhang abzuklären, in welchem Sinne $v = v(t, x)$ eine Lösung unter der Voraussetzung $F \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ ist.

2.1.3 Der Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ - Die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung

Wir wenden uns wieder dem Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u = 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x), \;\; x \in \mathbb{R}^3,$$

zu. Wir haben jetzt keine solche einfache Lösungsprozedur wie im eindimensionalen Fall. Starten werden wir aber mit einer einfachen Beobachtung.

Lemma 2.1 *Es sei $u_p = u_p(t,x)$ eine Lösung von*

$$u_{tt} - \triangle u = 0, \;\; u(0,x) = 0, \;\; u_t(0,x) = p(x),$$

$p = p(x)$ sei hinreichend glatt. Dann erfüllt $\partial_t u_p =: v$ das Cauchy-Problem

$$v_{tt} - \triangle v = 0, \;\; v(0,x) = p(x), \;\; v_t(0,x) = 0.$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie die Aussage dieses Lemmas.

Folgerung 2.1 *Eine Lösung $u = u(t,x)$ von*

$$u_{tt} - \triangle u = 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x)$$

mit hinreichend glatten Daten f und g ergibt sich in der Form $u(t,x) = u_g(t,x) + \partial_t u_f(t,x)$.

Wenden wir uns der Herleitung einer Formel für $u_p = u_p(t,x)$ zu. Dazu betrachten wir das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u = 0, \;\; u(0,x) = 0, \;\; u_t(0,x) = \delta_\varepsilon(x), \;\; x \in \mathbb{R}^3,$$

mit $\delta_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}), \;\; \varepsilon > 0.$

Es gilt $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$ und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

Das Anfangsdatum $\delta_\varepsilon(x)$ hängt nur vom Polarabstand $r = |x|$ ab, es ist somit radialsymmetrisch. Man könnte erwarten, daß dann auch die Lösung radialsymmetrisch ist, d.h. nur von r und t abhängt.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, daß jede radialsymmetrische Lösung $u = u(t,r)$ von $u_{tt} - \triangle u = 0, \; x \in \mathbb{R}^3$, in folgender Form darstellbar ist:

$$u(t,r) = \frac{u_1(r+t)}{r} + \frac{u_2(r-t)}{r}$$

mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen u_1, u_2 (Umrechnung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten). Man bezeichnet $u_2 = u_2(r-t)$ als *expandierende Welle* und $u_1 = u_1(r+t)$ als *sich zusammenziehende Welle.*

Nutzen wir die Anfangsbedingungen dann folgt

$$u_1(r) + u_2(r) = 0, \;\; u_1'(r) - u_2'(r) = r\,\delta_\varepsilon.$$

Somit ist $u_1 = -u_2$ und $u_2'(r) = -\frac{r\,\delta_\varepsilon}{2}$. Unbestimmte Integration liefert

$$u_2(r) = \int -\frac{r}{2}\,(4\pi\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \exp\Big(-\frac{r^2}{4\varepsilon}\Big)dr = \varepsilon\,(4\pi\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} \exp\Big(-\frac{r^2}{4\varepsilon}\Big) + C.$$

Damit ergibt sich die Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} u(t,x) = I_\varepsilon(r,t) - J_\varepsilon(r,t) := \\ \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\;\exp\left(-\frac{(r-t)^2}{4\varepsilon}\right) - \frac{1}{4\pi r}\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\;\exp\left(-\frac{(r+t)^2}{4\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Das Datum $p = p(y)$ ist stetig. Damit ist p in einem kleinen Volumen Δy annähernd konstant. Somit ergibt sich als Näherungslösung $u = u(t,x)$ zu dem Datum $p(y)\delta_\varepsilon(|x-y|)\Delta y$ (Δy bedeutet lokalisiert um y!)

$$u(t,x) = p(y)\Big(I_\varepsilon(|x-y|,t) - J_\varepsilon(|x-y|,t)\Big)\Delta y.$$

Durch Überlagerung aller Einflüsse von lokalisierten Daten erhalten wir

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} p(y)\Big(I_\varepsilon(|x-y|,t) - J_\varepsilon(|x-y|,t)\Big)dy.$$

Unsere gesuchte Lösung ergibt sich dann als

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} p(y)\Big(I_\varepsilon(|x-y|,t) - J_\varepsilon(|x-y|,t)\Big)dy.$$

Da J_ε gegen 0 strebt für alle $t > 0$ schlußfolgern wir

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} p(y) I_\varepsilon(|x-y|,t)dy.$$

Nach Einführung von Kugelkoordinaten $y = x + \rho\omega$, ω ist ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$, bekommen wir

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^3} p(y)\;\frac{1}{4\pi|x-y|}\;\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\exp\Big(-\frac{(|x-y|-t)^2}{4\varepsilon}\Big)dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \exp\Big(-\frac{(\rho-t)^2}{4\varepsilon}\Big)\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\Big(\frac{1}{\rho}\int_{|\omega|=1} p(x+\rho\omega)\rho^2 d\sigma_\omega\Big)d\rho. \end{aligned}$$

Setzen wir schließlich $\rho - t = 2\sqrt{\varepsilon}z$ und vertauschen die Integrationsreihenfolge (gleichmäßige Konvergenz überprüfen, das Datum $p = p(x)$ sei so beschaffen, daß Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden können), dann folgt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{-t}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\infty} p(x+(t+2\sqrt{\varepsilon}z)\omega)(t+2\sqrt{\varepsilon}z)\exp(-z^2)dz\, d\sigma_\omega \\ &= \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} p(x+t\omega)d\sigma_\omega. \end{aligned}$$

Das Flächenelement der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius t ist $d\sigma_y = t^2 d\sigma_\omega$. Setzen wir $x + t\omega = y$, dann erhalten wir die äquivalente Lösungsdarstellung

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} p(y)d\sigma_y,$$

wobei $S_t(x)$ die Kugeloberfläche einer Kugel mit dem Zentrum x und dem Radius t bezeichnet.

Merke: Die Ausführungen dieses Abschnittes dienten nur dazu, einen Kandidaten für die Lösung von $u_{tt} - \triangle u = 0,\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = p(x),\ x \in \mathbb{R}^3$, zu erhalten.

Lemma 2.2. *Es sei $p \in C^k(\mathbb{R}^3)$ mit $k \geq 2$. Dann ist eine Lösung des obigen Cauchy-Problems durch die Kirchhoffsche Formel*

$$u_p(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} p(y)d\sigma_y$$

gegeben. Diese Lösung gehört zum Raum $C^k([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Siehe Vorlesungsskript "Partielle Differentialgleichungen". □

Satz 2.2 *Das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \triangle u = 0,\ \ u(0,x) = f(x),\ \ u_t(0,x) = g(x)$$

mit Daten $f \in C^k(\mathbb{R}^3)$ und $g \in C^{k-1}(\mathbb{R}^3)$ besitzt eine Lösung $u \in C^{k-1}([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$. Diese Lösung ist in der Form

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} g(y)d\sigma_y + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} f(y)d\sigma_y\Big)$$

darstellbar.

Frage: Wodurch unterscheiden sich die Aussagen der Sätze 2.1 und 2.2.?

Antwort: Im Satz 2.2 haben wir *keine Eindeutigkeitsaussage*. Weiterhin ist die Lösung aus Satz 2.2 nur aus dem Raum $C^{k-1}([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$. Wir *verlieren also eine Regularitätsordnung.*

Aufgabe 5 (Duhamelsches Prinzip) (vgl. mit Aufgabe 2)
Zeigen Sie, daß eine Lösung u von

$$u_{tt}-\triangle u=F(x,t),\;\; u(x,0)=u_t(x,0)=0,\;\; x\in\mathbb{R}^3,$$

in der Form

$$u(t,x)=\int_0^t w(x,t-\tau,\tau)d\tau$$

gegeben ist, wobei $w=w(x,t,\tau)$ das folgende Cauchy-Problem löst:

$$w_{tt}-\triangle_x w=0,\;\; w(x,0,\tau)=0,\;\; w_t(x,0,\tau)=F(x,\tau).$$

2.1.4 Energiemethode

Der *Begriff der Energie* einer Funktion (oder besser einer Lösung der Wellengleichung) ist ein wesentliches Hilfsmittel zum Studium qualitativer Eigenschaften. Es sei $u\in C([0,T],H^1(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^n))$ eine vorgelegte Funktion (zur Erklärung der verwendeten Bezeichnungen siehe Skript "Partielle Differentialgleichungen"). Dann bezeichnet

$$E(u)(t):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|u_t(t,x)|^2+|\nabla_x u(t,x)|^2\Big)dx=\frac{1}{2}\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$$

die Energie, die nur von der Zeitvariablen t abhängt. Mit $\frac{1}{2}\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2$ wird die *kinetische Energie* und mit $\frac{1}{2}\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$ die *elastische Energie* bezeichnet.
Ist man nicht an der totalen Energie interessiert, dann kann man zu einem Bereich $K\subset\mathbb{R}^n$ (Abschluß eines Gebietes) die Energie

$$E(u,K)(t):=\frac{1}{2}\int_K\Big(|u_t(t,x)|^2+|\nabla_x u(t,x)|^2\Big)dx$$

definieren. Es sei $(t_0,x_0), t_0>0$, ein fester Punkt im $\mathbb{R}^{n+1}$. Durch die Punktmenge $\{(t,x):|x-x_0|=|t-t_0|\}$ wird die Mantelfläche eines Doppelkegels mit der Spitze in (t_0,x_0) beschrieben. Der obere (untere) Kegel für $t\geq t_0$ ($t\leq t_0$) ist der vorwärts (rückwärts) gerichtete Kegel mit der Spitze in (t_0,x_0). Es sei $T\leq t_0$. Der Teil der Ebene $t=T$, die durch den rückwärts gerichteten Kegel herausgeschnitten wird, bezeichnen wir mit $K(x_0,t_0-T)$. Dieser stellt offensichtlich eine abgeschlossene Kugel um $x=x_0$ mit dem Radius t_0-T dar. Es gilt die folgende bemerkenswerte Aussage:

Satz 2.3. *(Abhängigkeitsgebiet-Ungleichung)*
Es sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *mit* $t_0 > 0$*. Mit* Ω *bezeichnen wir das kegelförmige Gebiet welches durch den rückwärts gerichteten Kegel mit der Spitze in* (t_0, x_0) *und der Ebene* $t = 0$ *berandet wird. Es sei* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *eine klassische Lösung der Wellengleichung* $u_{tt} - \triangle u = 0$*. Dann gilt*

$$E(u, K(x_0, t_0 - t)) \leq E(u, K(x_0, t_0)) \text{ für } t \in [0, t_0].$$

Beweis: Siehe Skript "Partielle Differentialgleichungen". □

Aus den Sätzen 2.2 und 2.3 schlußfolgern wir sofort

Folgerung 2.2. *Die in Satz 2.2 gegebene Lösung von*

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g(x)$$

ist in der Menge aller Lösungen $u \in C^{k-1}([0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ *eindeutig bestimmt.*

Aufgabe 6 Nutzen Sie das Duhamelsche Prinzip und die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung, um die Lösung von

$$u_{tt} - \triangle u = F(t,x) \ , \ \ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \ , \ \ x \in \mathbb{R}^3,$$

herzuleiten. Wir setzen voraus, daß $F \in C^2([0,T], C^2(\mathbb{R}^3))$ ist.

Aufgabe 7 Finden Sie die Lösung von

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = 1 \ , \ \ u_t(0,x) = \frac{1}{1+|x|^2} \ , \ \ x \in \mathbb{R}^3.$$

Satz 2.4. *(Energieerhaltung)*
Es sei $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ *eine Sobolevlösung (Verallgemeinerung der klassischen Lösung, siehe Skript "Partielle Differentialgleichungen") von*

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g(x) \ ,$$

mit Daten $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$*. Dann gilt*

$$E(u)(t) = E(u)(0) = \frac{1}{2}\Big(\|u_1\|^2_{L^2} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2}\Big) \quad \text{für alle } \ t \geq 0\,.$$

Beweis: Da der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, können wir die vorgelegten Daten $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch eine Folge von Daten

$\{f_k\}$, $\{g_k\}$ mit $f_k, g_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ approximieren. Wir betrachten die Familie von Hilfsproblemen

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f_k(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g_k(x) \ .$$

Nach den Sätzen 2.2 und 2.3 existiert genau eine Lösung $u_k \in C^\infty([0,T], C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$. Differenzieren wir nun $E(u_k)(t)$, dann ergibt sich

$$E'(u_k)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\partial_t u_k(t,x)\partial_t^2 u_k(t,x) + \nabla_x u_k(t,x) \cdot \nabla_x \partial_t u_k(t,x)\Big) ds \ .$$

Da für jedes $t \in [0,T]$ die Funktion $u_k(t,\cdot)$ zum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört, können wir partiell integrieren und wissen, daß die Randintegrale verschwinden. Benutzen wir noch die Wellengleichung, dann ergibt sich insgesamt

$$E'(u_k)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u_k(t,x) \triangle u_k(t,x) - \triangle u_k(t,x)\partial_t u_k(t,x)) dx = 0 \ .$$

Somit folgt $E(u_k)(t) = E(u_k)(0) = \frac{1}{2}\Big(\|g_k\|_{L^2}^2 + \|\nabla f_k\|_{L^2}^2\Big)$. Nach Voraussetzung haben wir $\lim\limits_{k\to\infty} E(u_k)(0) = E(u)(0)$.
In Abschnitt 2.2 werden wir verstehen, daß auch $\lim\limits_{k\to\infty} E(u_k)(t) = E(u)(t)$ gilt (Korrektheit des Cauchy-Problems in Sobolevräumen). Damit ist der Beweis erbracht. □

2.1.5 Was liefert uns die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung?

Wir wollen jetzt für den 3-d Fall die gleichen qualitativen Eigenschaften, wie für den 1-d Fall in Abschnitt 2.1.2.2 geschehen, diskutieren. Wir wissen, daß

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} g(y) d\sigma_y + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} f(y) d\sigma_y\Big)$$

die eindeutig bestimmte klassische Lösung von

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g(x) \ , \ \ x \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

ist. Dabei benötigen wir geeignete Regularitätsvoraussetzungen an die Daten f und g.

Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen

Wir betrachten obiges Cauchy-Problem mit Daten f und g, die hinreichend regulär sind und die außerhalb einer Kugel $K_R(x_0)$ um x_0 mit dem Radius R verschwinden.

Frage: Zu welchen Zeiten herrscht in einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^n$ Ruhe, d.h. wann ist $u(t, x_1) = 0$?

Antwort: Falls $S_t(x_1) \cap K_R(x_0) = \emptyset$ gilt $u(t, x_1) = 0$. Ist somit $x_1 \notin K_R(x_0)$, dann gilt $u(t, x_1) = 0$ für $t \leq \text{dist } (x_1, K_R(x_0))$. Damit liegt eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen vor.

Huygens-Prinzip

Nach der Zeit $T(x_1) = \max_{x \in \partial K_R(x_0)} |x_1 - x|$ herrscht in x_1 wieder Ruhe, d.h. $u(t, x_1) = 0$ für $t \geq T(x_1)$. Damit gilt das Huygens-Prinzip uneingeschränkt für den 3-d Fall.

Abhängigkeitsmenge

Frage: Welche Informationen der Daten bestimmen die Lösung u in einem Punkt (t_0, x_0)?

Antwort: Wir benötigen zur Bestimmung von $u(t_0, x_0)$ die Daten f und g auf der Kugeloberfläche

$$S_{t_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| = t_0\} .$$

2.1.6 Der Anschauungsraum $\mathbb{R}^2$ - die Abstiegsmethode

Vorgelegt sei jetzt das Cauchy-Problem im 2-d Fall

$$u_{tt} - \triangle u = 0 , \quad u(0, x) = f(x) , \quad u_t(0, x) = g(x) , \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Nach Satz 2.3 (dieser gilt für alle Dimensionen) wissen wir, daß höchstens eine klassische Lösung existiert sofern die Daten hinreichend glatt sind. An diese Lösung kommt man über die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung im $\mathbb{R}^3$

$$u_p(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} p(y) d\sigma_y$$

nach *Anwendung der Abstiegsmethode*. Dazu betrachten wir das gegebene Datum $p = p(x) = p(x_1, x_2)$ als Funktion im $\mathbb{R}^3$. Setzt man dieses Datum in die obige Lösungsdarstellung ein, dann ergibt sich

$$u_p(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x_1, x_2, x_3)} p(y_1, y_2) d\sigma_{(y_1, y_2, y_3)}.$$

Falls die rechte Seite nicht von x_3 abhängt, dann erhalten wir sofort die gesuchte Lösung von

$$u_{tt} - \triangle u = 0 , \quad u(0, x) = 0 , \quad u_t(0, x) = p(x) , \quad x \in \mathbb{R}^2 .$$

Die Kugeloberfläche $S_t(x_1, x_2, x_3)$ ist gegeben durch

$$\{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = x_3 \pm (t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2)^{1/2},\ (y_1, y_2) \in K_t(x_1, x_2)\},$$

wobei $K_t(x_1, x_2)$ die Kugel mit dem Radius t um $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Umrechnung des Flächenelementes liefert auf beiden Halbkugeloberflächen

$$\begin{aligned} d\sigma_{(y_1,y_2,y_3)} &= \left(1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2\right)^{1/2} d(y_1, y_2) \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die von x_3 unabhängige Lösung

$$\begin{aligned} u_p(t, x_1, x_2) &= \frac{2}{4\pi t}\, t \int_{K_t(x_1,x_2)} \frac{p(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, d(y_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_t(x_1,x_2)} \frac{p(y_1, y_2)}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}\, d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 8 Welchen wesentlichen Unterschied haben die Kirchhoffschen Lösungsdarstellungen im 2-d und im 3-d Fall?

Zusammenfassend haben wir folgende Aussage bewiesen:

Satz 2.5 *Das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \triangle u = 0\ ,\quad u(0, x) = f(x)\ ,\quad u_t(0, x) = g(x)$$

mit Daten $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$ *und* $g \in C^{k-1}(\mathbb{R}^2)$, $k \geq 3$, *besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung* $u \in C^{k-1}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$. *Diese Lösung ist in der Form*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{K_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy + \partial_t\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{K_t(x)} \frac{f(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy\Big)$$

darstellbar.

Aufgabe 9 Leiten Sie mit Hilfe der Abstiegsmethode die d'Alembertsche Lösungsformel aus Abschnitt 2.1.1 her.

Aufgabe 10 Untersuchen Sie die Eigenschaft der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen, beschreiben Sie die Abhängigkeitsmenge und zeigen Sie schließlich, daß das Huygens-Prinzip im 2-d Fall nicht gilt.

Aufgabe 11 Gegeben sei das Cauchy-Probem im $\mathbb{R}^2$ mit kompakten Träger Daten, d.h. $f(x) = g(x) = 0$ außerhalb einer Kugel $K_R(0)$. Wie verhält sich die Lösung $u = u(t, x)$ in einem festen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ falls $t \to \infty$ strebt?

Aufgabe 12 Gegeben sei das Cauchy-Problem aus Aufgabe 11, betrachtet in $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (wir legen Wert darauf, daß die Daten f und g einen kompakten Träger besitzen, d.h. $f = g \equiv 0$ außerhalb einer Kugel $K_R(0)$). Skizzieren Sie in jedem der drei Fälle Mengen im $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $n = 1, 2, 3$, auf welchen die Lösung verschwindet.

2.1.7 Wellengleichungen in den Räumen $\mathbb{R}^{2n+1} (n \geq 2)$

Motiviert durch die Untersuchungen für die Wellengleichungen in 1-d und 3-d Fall wollen wir jetzt einige Resultate für den allgemeinen Fall ungerader Raumdimensionen bringen. Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g(x) \ , \ \ x \in \mathbb{R}^{2n+1} \ , \ \ n \geq 1 \ .$$

Satz 2.6. *Gegeben seien Daten $f \in C^k(\mathbb{R}^{2n+1})$ und $g \in C^{k-1}(\mathbb{R}^{2n+1})$ mit $k \geq n+2$, $n \geq 1$. Dann besitzt obiges Cauchy-Problem eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^{k-n}([0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n+1})$. Die Lösung ist darstellbar in der Form*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \Big((j+1) a_j t^j \partial_t^j + a_j t^{j+1} \partial_t^{j+1} \Big) \frac{1}{\omega_{2n+1}} \int_{|y|=1} f(x+ty) d\sigma_y \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^{j+1} \partial_t^j \, \frac{1}{\omega_{2n+1}} \int_{|y|=1} g(x+ty) d\sigma_y \ , \end{aligned}$$

wobei $a_j = a_j(n)$ Konstanten sind mit $a_{n-1} \neq 0$, und ω_{2n+1} das Maß der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{2n+1}$ bezeichnet.

Frage: Was liefert uns diese Lösungsdarstellung?

Antwort: Wir erhalten sofort folgende Informationen:

- Der Ableitungsverlust beträgt n.
- Die Eigenschaften der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen, der Existenz einer Abhängigkeitsmenge und das Huygens-Prinzip sind erfüllt.

Frage: Wie beweist man die Eindeutigkeit der Lösung?

Beispiel: Für $n = 1$ ist $a_0 = 1$, und wir erhalten die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung im 3-d Fall

$$u(t,x) = (1 + t\,\partial_t) \, \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} f(x+ty) d\sigma_y + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x+ty) d\sigma_y \ .$$

2.1.8 Wellengleichungen in den Räumen $\mathbb{R}^{2n}$ $(n \geq 2)$

Als Verallgemeinerung des 2-d Falls wollen wir den allgemeinen Fall gerader Raumdimensionen behandeln. Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g(x) \ , \ \ x \in \mathbb{R}^{2n} \ , \ \ n \geq 1 \ .$$

Satz 2.7. *Gegeben seien Daten $f \in C^k(\mathbb{R}^{2n})$ und $g \in C^{k-1}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $k \geq n+2$, $n \geq 1$. Dann besitzt obiges Cauchy-Problem eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^{k-n}([0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n})$. Die Lösung ist darstellbar in der Form*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \Big((j+1) b_j t^j \partial_t^j + b_j t^{j+1} \partial_t^{j+1} \Big) \frac{2\Gamma(\frac{2n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n) t^{2n-1}} \\ &\quad \times \int_0^t \frac{r^{2n-1}}{\omega_{2n}(t^2-r^2)^{1/2}} \int_{|y|=1} f(x+ry) d\sigma_y dr \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} b_j t^{j+1} \partial_t^j \frac{2\Gamma(\frac{2n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n) t^{2n-1}} \int_0^t \frac{r^{2n-1}}{\omega_{2n}(t^2-r^2)^{1/2}} \int_{|y|=1} g(x+ry) d\sigma_y dr, \end{aligned}$$

wobei $b_j = b_j(n)$ Konstanten sind mit $b_{n-1} \neq 0$, und ω_{2n} das Maß der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet.

Frage: Was liefert uns diese Lösungsdarstellung?

Antwort: Wir erhalten sofort folgende Informationen:

- Der Ableitungsverlust beträgt n.
- Die Eigenschaften der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen und die Existenz einer Abhängigkeitsmenge sind erfüllt.

Beispiel: Für $n = 1$ erhalten wir die Kirchhoffsche Lösungsdarstellung im 2-d Fall

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (b_0 + b_0 t\, \partial_t) \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1) t} \int_0^t \frac{r}{\omega_2 (t^2-r^2)^{1/2}} \int_{|y|=1} f(x+ry) d\sigma_y dr \\ &\quad + b_0 \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1)} \int_0^t \frac{r}{\omega_2 (t^2-r^2)^{1/2}} \int_{|y|=1} g(x+ry) d\sigma_y dr \\ &= b_0 \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(1)} \Big(\partial_t \int_{K_t(x)} \frac{f(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}} dy + \int_{K_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}} dy \Big) \end{aligned}$$

nach geeigneter Wahl von $b_0 \neq 0$.

Vortragsthema 1 Lösungsdarstellungen von Wellengleichungen und Anwendungen

2.2 Lösungsdarstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren

2.2.1 Anwendung der partiellen Fouriertransformation

Die notwendigen Hilfsmittel zur Fouriertransformation findet man im Skript "Partielle Differentialgleichungen".

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u = 0 \ , \ \ u(0,x) = f(x) \ , \ \ u_t(0,x) = g(x) \ , \ \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ \ n \geq 1 \ .$$

Nach Anwendung der *partiellen Fouriertransformation* ($v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(u(t,x))$) erhalten wir das Hilfsproblem

$$v_{tt} + |\xi|^2 v = 0 \ , \ \ v(0,\xi) = F(f)(\xi) \ , \ \ v_t(0,\xi) = F(g)(\xi) \ .$$

Dieses Hilfsproblem ist ein Cauchy-Problem für eine gewöhnliche Differentialgleichung, die vom Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$ abhängt. Für $\xi \neq 0$ erhalten wir als allgemeine Lösung

$$v(t,\xi) = c_1(\xi)e^{-i|\xi|t} + c_2(\xi)e^{i|\xi|t} \ .$$

Die Cauchy-Bedingungen implizieren

$$c_1(\xi) + c_2(\xi) = F(f)(\xi), \ -i|\xi|c_1(\xi) + i|\xi|c_2(\xi) = F(g)(\xi) \ .$$

Daraus folgt unmittelbar

$$c_1(\xi) = \frac{1}{2}\, F(f)(\xi) - \frac{1}{2i|\xi|}\, F(g)(\xi), \quad c_2(\xi) = \frac{1}{2}\, F(f)(\xi) + \frac{1}{2i|\xi|}\, F(g)(\xi) \ .$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$v(t,\xi) = \cos(|\xi|t)F(f)(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\, F(g)(\xi) \ .$$

Unter Voraussetzung der Gültigkeit der *Fourierschen Umkehrformel* $u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}(F_{x\to\xi}(u(t,x))$ (das muß natürlich im Nachhinein überprüft werden) folgt

$$u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(|\xi|t)F(f)(\xi)\Big) + F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\, F(g)(\xi)\right) \ .$$

Damit ist eine Lösungsdarstellung für u gefunden. Man kann natürlich auch die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1}{2}\,F(f)(\xi)\right) - F^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-i|\xi|t}\frac{1}{2i|\xi|}\,F(g)(\xi)\right) \\ &+ F^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{i|\xi|t}\frac{1}{2}\,F(f)(\xi)\right) + F^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{i|\xi|t}\frac{1}{2i|\xi|}\,F(g)(\xi)\right) \end{aligned}$$

benutzen. Diese Darstellung besteht aus *Fouriermultiplikatoren*

$$F^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{i\phi(t,\xi)}a(t,\xi)\,F(u_0)(\xi)\right)\ .$$

Man nennt $\phi=\phi(t,\xi)$ *Phasenfunktion* und $a=a(t,\xi)$ *Amplitudenfunktion.* Es seien jetzt Daten $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $g\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ gegeben mit $s\geq 1$. Damit wird nach Satz 2.4 zumindest gesichert, daß für alle Zeiten $t\geq 0$ die Lösung eine *Energie* besitzt.

Satz 2.8. *Es seien $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $g\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n), s\geq 1, n\geq 1$ im Cauchy-Problem*

$$u_{tt}-\Delta u=0,\ u(0,x)=f(x),\ u_t(0,x)=g(x).$$

Dann existiert genau eine Lösung $u\in C([0,T],H^s(\mathbb{R}^n))\cap C^1([0,T],H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$.

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt nach Satz 2.4. Die Existenz einer Lösung ist in der Form

$$u(t,x)=F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(|\xi|t)F(f)(\xi)\Big)+F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(g)(\xi)\right)$$

gegeben, wenn wir zeigen können, dass u tatsächlich die geforderte Regularität besitzt. Übertragen wir die Voraussetzung an die Daten in das Fourierbild, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &F(f)(\xi)\in L^{2,s}, \quad \text{d.h.}\quad \langle\xi\rangle^s F(f)(\xi)\in L^2, \langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},\\ &F(g)(\xi)\in L^{2,s-1}, \quad \text{d.h.}\quad \langle\xi\rangle^{s-1}F(g)(\xi)\in L^2. \end{aligned}$$

Wir nutzen folgende Abschätzungen:

- $|\cos(|\xi|t)|\leq 1$,
- für $|\xi|\leq\varepsilon$ und $t\in[0,T]$ gilt $|\sin(|\xi|t)|\leq|\xi|t\leq|\xi|T$,
- für $|\xi|\geq\varepsilon$ und $t\in[0,T]$ gilt $|\sin(|\xi|t)|\leq 1$.

Mit diesen Abschätzungen folgt unmittelbar

$$|v(t,\xi)| \leq |F(f)(\xi)| + C(\varepsilon, T)\tfrac{|F(g)(\xi)|}{\langle\xi\rangle},$$
$$\langle\xi\rangle^s|v(t,\xi)| \leq \langle\xi\rangle^s|F(f)(\xi)| + C(\varepsilon, T)\langle\xi\rangle^{s-1}|F(g)(\xi)|.$$

Das bedeutet aber $v \in L^\infty([0,T], L^{2,s})$. Entsprechend erhalten wir für die Ableitung $\partial_t v \in L^\infty([0,T], L^{2,s-1})$. Bleibt noch, $v \in C([0,T], L^{2,s}) \cap C^1([0,T], L^{2,s-1})$ zu zeigen. Die Eigenschaft $v \in C([0,T], L^{2,s})$ folgt aus $\lim\limits_{t_1 \to t_2} ||v(t_1,\cdot) - v(t_2,\cdot)||_{L^{2,s}} = 0$.

Nutzen wir die explizite Lösungsdarstellung für $v = v(t,\xi)$, dann schließen wir wie folgt:

$$\lim_{t_1\to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |v(t_1,\xi) - v(t_2,\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

$$\leq \lim_{t_1\to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \sin(\tfrac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}) \sin(\tfrac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}) \right|^2 |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

$$+ \lim_{t_1\to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \cos(\tfrac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}) \sin(\tfrac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}) \right|^2 \tfrac{1}{|\xi|^2} |F(g)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi.$$

Es sei $K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ eine hinreichend große Kugel um den Ursprung mit dem Radius R. Wir zerlegen die Integrale $\int\limits_{\mathbb{R}^n}$ in $\int\limits_{K_R(0)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)}$.

Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \sin(\tfrac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}) \sin(\tfrac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}) \right|^2 |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

$$= \int\limits_{K_R(0)} \left| \sin(\tfrac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}) \sin(\tfrac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}) \right|^2 |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)} \left| \sin(\tfrac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}) \sin(\tfrac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}) \right|^2 |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

$$\leq \int\limits_{K_R(0)} \tfrac{|\xi|^2 (t_1-t_2)^2}{4} |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)} |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi$$

für $|t_1 - t_2| < \varepsilon(R)$. Das erste Integral der rechten Seite wird abgeschätzt durch $C_R(t_1 - t_2)^2 ||F(f)||^2_{L^{2,s}}$. Das zweite Integral der rechten Seite wird wegen der Stetigkeit des Lebesgue-Maßes abgeschätzt durch $\widetilde{\varepsilon}(R) \to 0$. Insgesamt bekommen wir also

$$\begin{aligned} &\lim_{t_1\to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \sin\left(\frac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}\right) \right|^2 |F(f)(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s} d\xi \\ &\quad \leq \lim_{t_1\to t_2} C_R(t_1-t_2)^2 ||F(f)||^2_{L^{2,s}} + \widetilde{\varepsilon}(R) = \widetilde{\varepsilon}(R). \end{aligned}$$

Für $R \to \infty$ strebt $\widetilde{\varepsilon}(R) \to 0$, somit schlussfolgern wir

$$\lim_{t_1 \to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \sin\left(\frac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}\right) \right|^2 |F(f)(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = 0.$$

Durch entsprechendes Vorgehen haben wir auch

$$\lim_{t_1 \to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \cos\left(\frac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|F(g)(\xi)|^2}{|\xi|^2} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = 0,$$

wobei wir jetzt $\int\limits_{\mathbb{R}^n}$ in $\int\limits_{K_\varepsilon(0)} + \int\limits_{K_R(0)\setminus K_\varepsilon(0)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)}$ zerlegen.

Zusammenfassend haben wir gezeigt $v \in C([0,T], L^{2,s})$. Da die Fouriersche Umkehrformel $u = F^{-1}_{\xi \to x}(F_{x\to\xi}(u(t,x)))$ gilt, ergibt sich sofort $u \in C([0,T], H^s)$. Eine analoge Vorgehensweise bringt $v \in C^1([0,T], L^{2,s-1})$ bzw. $u \in C^1([0,T], H^{s-1})$, wobei auch hier die Umkehrformel $\partial_t u = F^{-1}_{\xi \to x}(F_{x\to\xi}(\partial_t u(t,x)))$ strapaziert wird. Damit ist die Aussage von Satz 2.8 bewiesen. □

Aufgabe 13 Führen Sie den Beweisschritt

$$\lim_{t_1 \to t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \cos\left(\frac{|\xi|(t_1+t_2)}{2}\right) \sin\left(\frac{|\xi|(t_1-t_2)}{2}\right) \right|^2 \frac{|F(g)(\xi)|^2}{|\xi|^2} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi = 0$$

durch.

Die Ausführungen dieses Abschnittes zeigen, dass das Cauchy-Problem H^s-korrekt ist.

Folgerung 2.3. *Das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ n \geq 1$$

ist H^s-korrekt, d.h. zu jedem $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$. Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon)$ so, dass $||f_1 - f_2||_{H^s} + ||g_1 - g_2||_{H^{s-1}} < \delta$ sofort $||u_1 - u_2||_{C([0,T],H^s)\cap C^1([0,T],H^{s-1})} < \varepsilon$ impliziert.

Wir haben verschiedene Darstellungen für Lösungen von Wellengleichungen kennengelernt. Einerseits wurden wir vertraut gemacht mit klassischen Lösungsdarstellungen wie der d'Alembertschen oder der Kirchhoffschen Lösungdarstellung. Andererseits führte eine Integraltransformation zu Darstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren. Es ergibt sich sofort die Frage, ob die verschiedenen Darstellungen ineinander überführbar sind.

Aufgabe 14 Im $1-d$ Fall erhalten wir die Lösungsdarstellung

$$u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\left(\left(e^{i\xi t}+e^{-i\xi t}\right)\frac{1}{2}F(f)(\xi)\right) + F^{-1}_{\xi\to x}\left(\left(e^{i\xi t}-e^{-i\xi t}\right)\frac{1}{2i\xi}F(g)(\xi)\right).$$

Leiten Sie daraus die d'Alembertsche Lösungsdarstellung her.

Aus der Lösungsdarstellung

$$v(t,\xi) = \cos(|\xi|t)F(f)(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(g)(\xi) = \partial_t\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(f)(\xi) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(g)(\xi)$$

folgt

$$u(t,x) = \partial_t F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(f)(\xi)\right) + F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(g)(\xi)\right).$$

Damit müssen wir nur

$$F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}F(g)(\xi)\right)$$

verstehen.

Aufgabe 15 Worin liegt die Hauptschwierigkeit bei der Auswertung des letzten Fouriermultiplikators? Welche Methoden benutzt man in der Literatur zur Überwindung der Hauptschwierigkeit?

Frage: Worin liegen die Vorteile und worin die Nachteile der Anwendung der partiellen Fouriertransformation bei der Behandlung des Cauchy-Problems für Wellengleichungen.

Antwort:

Vorteile: Die Daten können aus Sobolevräumen H^s gewählt werden. Es tritt kein Ableitungsverlust auf. Falls $f \in H^s$ und $g \in H^{s-1}$ gewählt werden, dann liegt die Lösung in $C([0,T],H^s)\cap C^1([0,T],H^{s-1})$. Die Betrachtungsweise is unabhängig von der Raumdimension n.

Nachteile: Spezielle qualitative Eigenschaften der Lösungen wie Existenz von vorderer oder hinterer Wellenfront, wie endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit oder Abhängigkeitsgebiet sind nicht so leicht aus der Lösungdarstellung in Form von Fouriermultiplikatoren direkt zu erhalten.

3 Wellengleichungen mit Termen niederer Ordnung

3.1 Klein-Gordon Gleichung

Das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon-Gleichung lautet

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x)$$

mit einer Konstanten $m^2 > 0$.

Es steht natürlich die Frage nach der Definition einer geeigneten totalen Energie. Der auftretende Masseterm $m^2 u$ macht die Aufnahme einer dritten Energiekomponente, die der *potentiellen Energie* notwendig. Die Energie enthält also neben der *elastischen und kinetischen noch die potentielle Energiekomponente*:

$$E(u)(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_x u(t,\cdot)|^2 + |u_t(t,\cdot)|^2 + m^2|u(t,x)|^2\right) dx.$$

3.1.1 Energieabschätzungen

Entsprechend dem Vorgehen zum Beweis von Satz 2.4 lässt sich folgende Aussage beweisen:

Satz 3.1. *(Energieerhaltung)*
Es sei $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$ eine Sobolevlösung (Verallgemeinerung der klassischen Lösung, siehe Skript "Partielle Differentialgleichungen") von

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0\ , \quad u(0,x) = f(x)\ , \quad u_t(0,x) = g(x)\ ,$$

mit Daten $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$E(u)(t) = E(u)(0) = \frac{1}{2}\Big(\|g\|^2_{L^2} + \|\nabla f\|^2_{L^2} + m^2\|f\|^2_{L^2}\Big) \quad \textit{für alle } t \geq 0\,.$$

Aufgabe 16 Beweisen Sie die Aussage von Satz 3.1.

Die Energieerhaltung lässt sich auch mit Hilfe der *partiellen Fouriertransformation* zeigen. Die Fouriertransformierte $v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(u)(t,\xi)$ erfüllt mit $(f, \nabla_x f, g) \in L^2 \times L^2 \times L^2$ die gewöhnliche Differentialgleichung $v_{tt} + |\xi|^2 v + m^2 v = v_{tt} + \langle\xi\rangle^2_m v = 0$ mit $\langle\xi\rangle^2_m = |\xi|^2 + m^2$. Benutzen wir die expliziten Lösungsdarstellungen für

$v(t,\cdot)$ und $v_t(t,\cdot)$ und die *Parsevalsche Gleichung aus der Theorie der Fouriertransformation*, dann schlußfolgern wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
E(u)(t) &= \frac{1}{2}\big(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2} + m^2\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\|\,|\xi|\;v(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|v_t(t,\cdot)\|^2_{L^2} + m^2\|v(t,\cdot)\|^2_{L^2}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\|\langle\xi\rangle_m v(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|v_t(t,\cdot)\|^2_{L^2}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\|\langle\xi\rangle_m F(f)(\xi)\|^2_{L^2} + \|F(g)(\xi)\|^2_{L^2}\big)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\big(|\nabla_x f(x)|^2 + |g(x)|^2 + m^2|f(x)|^2\big)\,dx = E(u)(0).
\end{aligned}$$

Natürlich hinterfragt man sofort, ob auch eine entsprechende Aussage zu Satz 2.3 gilt. Ist man nicht an der totalen Energie interessiert, dann kann man zu einem Bereich $K \subset \mathbb{R}^n$ (Abschluß eines Gebietes) die Energie

$$E(u,K)(t) := \frac{1}{2}\int_K \Big(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla_x u(t,x)|^2 + m^2|u(t,x)|^2\Big)dx$$

definieren. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1.4 gilt die folgende bemerkenswerte Aussage:

Satz 3.2. *(Abhängigkeitsgebiet-Ungleichung)*
Es sei $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $t_0 > 0$. Mit Ω bezeichnen wir das kegelförmige Gebiet welches durch den rückwärts gerichteten Kegel mit der Spitze in (t_0,x_0) und der Ebene $t = 0$ berandet wird. Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung der Klein-Gordon Gleichung $u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0$. Dann gilt

$$E(u, K(x_0, t_0 - t)) \le E(u, K(x_0, t_0)) \text{ für } t \in [0, t_0].$$

Aus dem Satz 3.2 schlußfolgern wir sofort

Folgerung 3.1. *Das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0\ ,\ \ u(0,x) = f(x)\ ,\ \ u_t(0,x) = g(x)$$

besitzt höchstens eine klassische Lösung $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, sofern die Daten als hinreichend regulär vorausgesetzt werden.

Aufgabe 17 Beweisen Sie die Aussage von Satz 3.2. Benutzen Sie dabei das Skript "Partielle Differentialgleichungen".

3.1.2 Lösungsdarstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0\ ,\ \ u(0,x) = f(x)\ ,\ \ u_t(0,x) = g(x)\ ,\ \ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ \ n \geq 1\ .$$

Nach Anwendung der *partiellen Fouriertransformation* ($v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(u(t,x))$) erhalten wir das Hilfsproblem

$$v_{tt} + \langle\xi\rangle_m^2 v = 0\ ,\ \ v(0,\xi) = F(f)(\xi)\ ,\ \ v_t(0,\xi) = F(g)(\xi)\ ,$$

wobei $\langle\xi\rangle_m^2 = |\xi|^2 + m^2$. Entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 2.2.1 erhalten wir

$$v(t,\xi) = \cos(\langle\xi\rangle_m t)F(f)(\xi) + \frac{\sin(\langle\xi\rangle_m t)}{\langle\xi\rangle_m}\,F(g)(\xi)\ .$$

Unter Voraussetzung der Gültigkeit der *Fourierschen Umkehrformel* $u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}(F_{x\to\xi}(u(t,x))$ (das muß natürlich im Nachhinein überprüft werden) folgt

$$u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(\langle\xi\rangle_m t)F(f)(\xi)\Big) + F^{-1}_{\xi\to x}\left(\frac{\sin(\langle\xi\rangle_m t)}{\langle\xi\rangle_m}\,F(g)(\xi)\right)\ .$$

Damit ist eine Lösungsdarstellung für u gefunden. Es seien jetzt Daten $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ gegeben mit $s \geq 1$. Damit wird nach Satz 3.1 zumindest gesichert, daß für alle Zeiten $t \geq 0$ die Lösung eine *Energie* besitzt. Analog dem Beweis zu Satz 2.8 zeigen wir folgende Aussage:

Satz 3.3. *Es seien $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n), s \geq 1, n \geq 1$ im Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0,\ u(0,x) = f(x),\ u_t(0,x) = g(x).$$

Dann existiert genau eine Lösung $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$.

Merke: Die Aussagen der Sätze 2.8 und 3.3 stimmen überein. Wenn wir also Daten $(f,g) \in H^s \times H^{s-1}$ voraussetzen, erhalten wir die gleiche Regularität der Lösung. Somit hat der Masseterm auf Regularitätsaussagen keinen wesentlichen Einfluß. Masseterme haben aber einen Einfluß auf Energieabschätzungen wie Satz 3.1 belegt (im Gegensatz zur reinen Wellengleichung kann die potentielle Energie durch die Anfangsenergie kontrolliert werden). Auch die Ausführungen aus Abschnitt 2.3.2.3 und Aufgabe 21 zeigen Vorteile, die Masseterme garantieren.

3.1.3 Der von Wahlsche Trick

Der von Wahlsche Trick gestattet die Zurückführung von Cauchy-Problemen für Klein-Gordon-Gleichungen auf Cauchy-Probleme für Wellengleichungen. Vorgelegt sei mit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x).$$

Wir definieren

$$v(t, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) := e^{-i\, m\, x_{n+1}} u(t, x_1, \cdots, x_n).$$

Damit gilt

$$v_{tt} - \triangle v = 0, \quad v(0,x) = e^{-i\, m\, x_{n+1}} u_0(x_1, \cdots, x_n), \quad v_t(0,x) = e^{-i\, m\, x_{n+1}} u_1(x_1, \cdots, x_n).$$

Um Resultate aus Abschnitt 2.2 anwenden zu können, müssen wir geeignete Funktionenräume für die Daten festlegen. Nach Abschnitt 2.2 benötigen wir $(\nabla_x v_0, v_1) \in L^2 \times L^2$. Für v_1 gilt aber bereits:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |v_1(x_1, \cdots, x_{n+1})|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |u_1(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_1(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx\, dx_{n+1} = \infty.
\end{aligned}$$

Damit zerstört obige Transformation die geforderte L^2-Eigenschaft der Daten. Sie ist somit nicht unmittelbar für das Studium von Klein-Gordon-Gleichungen nutzbar.

Frage: Warum konnte vor drei Dekaden der von Wahlsche Trick trotzdem erfolgreich eingesetzt werden?

Antwort: Falls wir z.B. an Korrektheitsaussagen für das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x)$$

bei vorgegebenen Daten $(f, g) \in C^k(\mathbb{R}^n) \cap C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ interessiert sind, dann kann die von Wahlsche Transformation sofort angewendet werden. Man erhält ein Cauchy-Problem für die Wellengleichung mit Daten aus $C^k(\mathbb{R}^{n+1}) \cap C^{k-1}(\mathbb{R}^{n+1})$. Damit sind dann sofort die Sätze 2.6 oder 2.7 anwendbar. Zu prüfen ist natürlich, ob nach Rücktransformation die erhaltenen Resultate für das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon Gleichung optimal sind.

3.2 Gedämpfte Wellengleichung

Bei der gedämpften Wellengleichung beschreiben wir zusätzlich mit u_t die Dämpfung.

Aufgabe 18 Wiederholen Sie das in den Vorlesungen zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen erworbene Wissen über den *gedämpften harmonischen Oszillator*.

Wir werden uns jetzt mit folgendem Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + u_t \;=\; 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x)$$

beschäftigen. Wie im Fall der einfachen Wellengleichung definieren wir die totale Energie

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\nabla_x u(t,x)|^2 + |u_t(t,x)|^2\Big)dx.$$

3.2.1 Energieabschätzungen

Wir wollen zunächst eine erste Abschätzung für die Energie mithilfe der Differentiation nach t und anschließender partieller Integration erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} E'(u)(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (2\nabla_x u \cdot \nabla_x u_t + 2u_t u_{tt})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla_x u \cdot \nabla_x u_t + u_t(\triangle u - u_t))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -u_t(t,x)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Die Energie fällt für wachsende t. Das ist sicherlich nicht verwunderlich, da der Dämpfungsterm ein gewisses *hemmendes Verhalten* entwickelt. Von Interesse ist aber i.allg. wie sich die Energie für $t \to \infty$ verhält. Von besonderem Interesse ist dabei, ob $E(u)(t)$ für $t \to \infty$ gegen 0 strebt. Dieses Verhalten nennen wir *decay-Verhalten*.

3.2.2 Lösungsdarstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + u_t \;=\; 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x).$$

Schritt 1: Überführung der Dämpfung in Potential oder Masse
Wir definieren eine Funktion $w = w(t,x)$ durch $w(t,x) := e^{\frac{1}{2}t}u(t,x)$. Dann erfüllt w die partielle Differentialgleichung

$$w_{tt} - \triangle w - \frac{1}{4}w = 0\,, \;\; w(0,x) = f(x), \quad w_t(0,x) = \frac{1}{2}f(x) + g(x).$$

Im Gegensatz zur Klein-Gordon-Gleichung tritt jetzt ein *negativer Masseterm* auf, der eine spezielle Beachtung erfordert.

Schritt 2: Partielle Fouriertransformation

Die Anwendung der partiellen Fouriertransformation auf w liefert uns eine gewöhnliche Differentialgleichung mit $v = v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(w)(t,\xi)$:

$$v_{tt} + (|\xi|^2 - \frac{1}{4})v = 0, \;\; v(0,\xi) = v_0(\xi) = F(f)(\xi), \;\; v_t(0,\xi) = v_1(\xi) = \frac{1}{2}\,F(f)(\xi) + F(g)(\xi).$$

Wir nehmen jetzt eine Fallunterscheidung vor, denn für $|\xi| < \frac{1}{2}$ ist der Masseterm $|\xi|^2 - \frac{1}{4}$ im Phasenraum mit einem negativen und für $|\xi| > \frac{1}{2}$ mit einem positiven Vorzeichen versehen.

Fall 1: $\{\xi : |\xi| > \frac{1}{2}\}$

Da $|\xi|^2 > \frac{1}{4}$ gilt, können wir eine neue positive Variable $|\eta|$ definieren mit $|\eta|^2 := |\xi|^2 - \frac{1}{4} > 0$. So erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung $v_{tt} + |\eta|^2 v = 0$. Nutzen wir die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.2, dann erhalten wir sofort die Lösung $v(t,\xi)$:

$$v(t,\xi) \;\; = \;\; \cos\left(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\;t\right) v_0(\xi) + \frac{\sin\left(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\;t\right)}{\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}}\,v_1(\xi).$$

Fall 2: $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{2}\}$

Die Lösung für die transformierte Differentialgleichung mit $|\xi| < \frac{1}{2}$ lautet

$$\begin{aligned} v(t,\xi) \;\; &= \;\; \left(\frac{v_0(\xi)}{2} - \frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t} + \left(\frac{v_0(\xi)}{2} + \frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right) e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t} \\ &= \;\; v_0(\xi)\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2 t}\right) + \frac{2v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2 t}\right). \end{aligned}$$

Es sei jetzt das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + u_t \;\; = \;\; 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x)$$

mit $f \in H^s$ und $g \in H^{s-1}$ vorgegeben. Dann erhalten wir mit den obigen Untersuchungen und der Tatsache, daß für Regularitätsaussagen nur das Verhalten der Lösung des transformierten Problems für große Frequenzen von Bedeutung ist, sofort die folgende Aussage (Stetigkeit der Lösung bez. der Zeitvariablen t wird wie im Beweis zu Satz 2.8 gezeigt):

Satz 3.4. *Es seien $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n), s \geq 1, n \geq 1$ im Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x).$$

Dann existiert genau eine Lösung $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$.

Merke: Die Aussagen der Sätze 2.8 und 3.4 stimmen überein. Wenn wir also Daten $(f,g) \in H^s \times H^{s-1}$ voraussetzen, erhalten wir die gleiche Regularität der Lösung. Somit hat der Dämpfungsterm auf Regularitätsaussagen keinen wesentlichen Einfluß. Dämpfungsterme haben aber einen wesentlichen Einfluß auf Energieabschätzungen, sie erzeugen ein *decay* der Energie, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

Aufgabe 19 Vorgelegt sei das Cauchy-Problem für eine sehr große, gedämpfte Membran

$$u_{tt} - c^2 \triangle u + k u_t \; = \; 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x), \; x \in \mathbb{R}^2.$$

Lösen Sie dieses Problem nach Anwendung folgender Transformationen:

$$u(t,x) = \exp(-kt/2) w(t,x), \quad v(t,x_1,x_2,x_3) = w(t,x_1,x_2) \exp(kx_3/(2c)).$$

Aufgabe 20 Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon u_t \; = \; 0, \;\; u(0,x,\varepsilon) = f(x), \;\; u_t(0,x,\varepsilon) = g(x), \; x \in \mathbb{R}^1,$$

mit hinreichend glatten Daten f und g. Es sei $u = u(t,x,\varepsilon)$ die eindeutig bestimmte Lösung dieses Problems. Zeigen Sie, daß für jedes feste (t,x) gilt $\lim_{\varepsilon \to 0} u(t,x,\varepsilon) = w(t,x)$, wobei $w = w(t,x)$ das Cauchy-Problem

$$w_{tt} - w_{xx} \; = \; 0, \;\; w(0,x) = f(x), \;\; w_t(0,x) = g(x), \; x \in \mathbb{R}^1,$$

löst.

3.2.3 Decay-Verhalten und decay-Rate

Die *Anwendung der Partiellen Fouriertransformation* und eine anschließende *WKB Analysis* (das ist eine präzise Analysis zur Auswertung der Fouriermultiplikatoren, die in den Lösungsdarstellungen auftreten) ermöglicht uns die Energie für Lösungen der gedämpften Wellengleichung genauer abzuschätzen und ein *optimales decay-Verhalten* mit der genauen *decay-Rate* herzuleiten.

Satz 3.5. *Vorgelegt sei das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \triangle u + u_t \; = \; 0, \;\; u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x)$$

mit Daten $f \in H^1$ *und* $g \in L^2$*. Dann gelten folgende Abschätzungen:*

$$\begin{aligned} \|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \Big(\|g\|_{L^2} + \|f\|_{H^1} \Big) \\ \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-1} \Big(\|g\|_{L^2} + \|f\|_{H^1} \Big) \end{aligned}$$

und folglich

$$E(u)(t) \leq C(1+t)^{-1}\Big(\|g\|_{L^2}^2 + \|f\|_{H^1}^2\Big).$$

Beweis: Schritt 1: Übertragung der Energie in den Phasenraum
Sei $\hat{u}$ die Fouriertransformierte von u mit $\hat{u}(t,\xi) = F_{x\to\xi}(u)(t,\xi)$. Wie in Abschnitt 2.2 können wir die Energie wie folgt in den Phasenraum transformieren:

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\||\xi|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\hat{u}_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right).$$

Aus $u(t,x) = e^{-\frac{1}{2}t}w(t,x)$ und $v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(w)(t,\xi)$ folgt $\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}v(t,\xi)$. Im weiteren werden wir folgende Gleichungen nutzen: Für die elastische Energie nutzen wir

$$|\xi|\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\,|\xi|v(t,\xi),$$

für die kinetische Energie nutzen wir

$$\hat{u}_t(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\,\Big(v_t(t,\xi)\ -\frac{1}{2}\,v(t,\xi)\Big).$$

Schritt 2: Abschätzung der elastischen Energie
Wir schätzen zunächst den elastischen Energieterm ab, dazu nehmen wir wieder eine Fallunterscheidung vor.
Fall 1: $\{\xi:\ |\xi| > \frac{1}{2}\}$
Mit $|\xi|\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\ t)\ |\xi|v_0(\xi) + t\ \frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t)}{\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t}\ |\xi|v_1(\xi)\Big)$ schätzen wir die elastische Energie $\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$ ab. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\||\xi|\hat{u}(t,\xi)\|_{L^2\{|\xi|>\frac{1}{2}\}}^2 &= \int_{|\xi|>\frac{1}{2}} |\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq 2\Big(\int_{|\xi|>\frac{1}{2}} e^{-t}|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 d\xi \\
&+ \int_{\frac{1}{2}<|\xi|\leq 1} \underbrace{\frac{\sin^2(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t)}{\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}^2\ t^2}}_{\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\leq C} t^2 e^{-t}|\xi|^2|v_1(\xi)|^2 d\xi\ + \int_{|\xi|\geq 1} \underbrace{\frac{1}{|\xi|^2-\frac{1}{4}}|\xi|^2}_{\leq C} e^{-t}|v_1(\xi)|^2 d\xi\Big) \\
&\leq 2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|v_0(\xi)|^2 d\xi\ +\ Ct^2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |v_1(\xi)|^2 d\xi\ +\ Ce^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |v_1(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Insgesamt fällt dieser Term exponentiell. Es gilt

$$\int_{|\xi|>\frac{1}{2}} |\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq Ct^2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2) d\xi.$$

Fall 2: $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{2}\}$
Für die Abschätzung der elastischen Energie nutzen wir

$$\begin{aligned}|\xi|\hat{u}(t,\xi) &= |\xi|e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\Big(\frac{v_0(\xi)}{2} - \frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t} \\ &\quad + \Big(\frac{v_0(\xi)}{2} + \frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}\Big) \\ &= v_0(\xi)|\xi| \cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{2v_1(\xi)|\xi|}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} \sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)e^{-\frac{1}{2}t}.\end{aligned}$$

Zur weiteren Untersuchung teilen wir das Intervall $[0, \frac{1}{2})$ in zwei Teilintervalle.
a) $\{\xi : |\xi| \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\}$:
Wir schätzen die elastische Energie wie folgt ab:

$$\begin{aligned}|\xi||\hat{u}(t,\xi)| &= \Big|\, v_0(\xi)|\xi| \underbrace{\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)}_{\leq \cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)} e^{-\frac{1}{2}t} + \underbrace{\frac{\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)}{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}t}_{\leq C\, \cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)}\; v_1(\xi)|\xi|e^{-\frac{1}{2}t}\Big| \\ &\leq \big|\, v_0(\xi)|\xi| \underbrace{\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)e^{-\frac{1}{2}t}}_{\leq e^{-\delta t},\, \delta>0} + C \underbrace{v_1(\xi)|\xi|}_{\leq |v_1(\xi)|} \underbrace{\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)\; e^{-\frac{1}{2}t}}_{\leq e^{-\delta t},\, \delta>0} \big|,\end{aligned}$$

und erhalten schließlich

$$\int_{\frac{1}{4}\leq|\xi|<\frac{1}{2}} |\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \leq Ce^{-\delta t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2)d\xi.$$

b) $\{\xi : |\xi| \in [0, \frac{1}{4})\}$:
Da für $|\xi| < \frac{1}{2}$ gilt $-4|\xi|^2 \leq -1 + \sqrt{1-4|\xi|^2} \leq -2|\xi|^2$, können wir jetzt wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)|^2|\xi|^2 + |v_0(\xi)|^2|\xi|^2)(\underbrace{e^{-t-\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}_{\leq e^{-t}} + \underbrace{e^{-t+\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}_{\leq e^{-2|\xi|^2t}})d\xi \\ &\leq Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}}(|v_1(\xi)|^2|\xi|^2 + |v_0(\xi)|^2|\xi|^2)d\xi \\ &\quad + C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}}(|v_1(\xi)|^2 + |v_0(\xi)|^2)|\xi|^2 e^{-2|\xi|^2t}d\xi.\end{aligned}$$

Für den zweiten Term der letzten Ungleichung erhalten wir mit der Normungleichung $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{L^\infty}\|\cdot\|_{L^2}$

$$
\begin{aligned}
C \int_{|\xi|<\frac{1}{4}} & (|v_1(\xi)|^2 + |v_0(\xi)|^2)|\xi|^2 e^{-2|\xi|^2 t} d\xi \\
& \leq C \sup_{|\xi|<\frac{1}{4},\, t\geq 1} \frac{t|\xi|^2}{t} e^{-2|\xi|^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} (|v_1(\xi)|^2 + |v_0(\xi)|^2) d\xi \\
& \leq C \frac{1}{t} \underbrace{\sup_{|\xi|<\frac{1}{4},\, t\geq 1} t|\xi|^2 e^{-2|\xi|^2 t}}_{\leq C} \int_{\mathbb{R}^n} (|v_1(\xi)|^2 + |v_0(\xi)|^2) d\xi.
\end{aligned}
$$

Wir haben somit gezeigt, daß für $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{4}\}$ gilt

$$
\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi|^2 |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \quad \leq \quad C(1+t)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} (|v_0(\xi)|^2 + |\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2) d\xi.
$$

Schritt 3: Abschätzung der kinetischen Energie
Wir wollen den kinetischen Energieterm auswerten und verwenden die bereits gezeigte Beziehung
$\|u_t(t,\xi)\|^2_{L^2} = \|\hat{u}_t(t,\xi)\|^2_{L^2}$ mit $\hat{u}_t(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\Big(v_t(t,\xi) \ - \frac{1}{2}\, v(t,\xi)\Big)$.

Fall 1: $\{\xi : |\xi| > \frac{1}{2}\}$
Wir benötigen

$$
v_t(t,\xi) = -\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} \sin\Big(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t\Big) v_0(\xi) + \cos\Big(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t\Big) v_1(\xi)
$$

und erhalten daraus

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_t(t,\xi) \quad = \quad & e^{-\frac{1}{2}t}\Big(v_1(\xi)\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t) \ - \ \frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t)}{\sqrt{|\xi|^2 \ - \ \frac{1}{4}}}\Big) \\
& - v_0(\xi)\Big(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t) \ + \ \sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}} \sin(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Beim Abschätzen verwenden wir die Resultate der Auswertung für den elastischen Energieterm und gewinnen die Ungleichung

$$
\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2\{|\xi|>\frac{1}{2}\}} \leq C \int_{|\xi|>\frac{1}{2}} e^{-t}|v_1(\xi)|^2 \underbrace{\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t) - \frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\, t)}{\sqrt{|\xi|^2 \ - \ \frac{1}{4}}}\Big)^2}_{\leq C\, t^2} d\xi
$$

$$+ C\int_{|\xi|>\frac{1}{2}} e^{-t}|v_0(\xi)|^2\Big(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\,t)\;+\;\underbrace{\frac{1}{2}\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\,t)}_{\leq C}\Big)^2 d\xi.$$

Mit $(|\xi|^2-\frac{1}{4})\sin^2(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\,t)\leq|\xi|^2$ schlußfolgern wir für $\{\xi:|\xi|>\frac{1}{2}\}$

$$\int_{|\xi|>\frac{1}{2}}|\hat{u}_t(t,\xi)|^2 d\xi\leq Ct^2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2+|v_1(\xi)|^2)d\xi.$$

Fall 2: $\{\xi:|\xi|<\frac{1}{2}\}$
Nach der Berechnung von $v_t(t,\xi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,\xi) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\sqrt{1-4|\xi|^2}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)-\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\Big)v_0(\xi)\\ &+ e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)-\frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\Big)v_1(\xi).\end{aligned}$$

Jetzt führen wir erneut eine Teilung des Intervalls $[0,\ \frac{1}{2})$ durch.
a) $\{\xi:|\xi|\in[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})\}$:
Hier können wir wieder das exponentielle Fallen der kinetischen Energie zeigen. Nutzen wir einerseits

$$\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)+\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\leq 2\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)$$

und andererseits

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\Big|\leq C_\varepsilon t \text{ für } \frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\leq\varepsilon$$

dann erhalten wir sofort

$$\|\hat{u}_t(t,\xi)\|^2_{L^2\{|\xi|\in[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2})\}}\;\leq\;Ce^{-\delta t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2+|v_1(\xi)|^2)d\xi$$

mit einem geeigneten positiven δ.
b) $\{\xi:|\xi|<\frac{1}{4}\}$:
In diesem Fall erhalten wir

$$\hat{u}_t(t,\xi)=\Big(\frac{v_0(\xi)}{4}+\frac{v_1(\xi)}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)(\sqrt{1-4|\xi|^2}-1)e^{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}.$$

Somit können wir wie folgt abschätzen:

$$|\hat{u}_t(t,\xi)| \le \Big|\Big(\frac{v_1(\xi)}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}} + \frac{v_0(\xi)}{4}\Big)\Big(\underbrace{\sqrt{1-4|\xi|^2}-1}_{\le -2|\xi|^2}\Big)\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}_{\le e^{-|\xi|^2 t},\ |\xi|<\frac{1}{2}}\Big|.$$

Mit den Teilergebnissen für die elastische Energie erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}_t(t,\xi)\|^2_{L^2\{|\xi|<\frac{1}{4}\}} &\le C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,|\xi|^4\left(e^{-t}+e^{-2|\xi|^2 t}\right)d\xi \\
&\le Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,d\xi \;+\; C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,|\xi|^4 e^{-2|\xi|^2 t}d\xi \\
&\le Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,d\xi \\
&\quad + C\frac{1}{t^2}\underbrace{\sup_{|\xi|<\frac{1}{4},\,t\ge 1} t^2|\xi|^4 e^{-2|\xi|^2 t}}_{\le c}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,d\xi \\
&\le Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,d\xi \;+\; \frac{C}{(1+t)^2}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,d\xi \\
&\le \frac{C}{(1+t)^2}\int_{\mathbb{R}^n} \big(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\big)\,d\xi.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Aussagen von Satz 3.5 bewiesen. □

Frage: Wodurch wird das decay-Verhalten der Energie bestimmt?

Antwort: Das decay-Verhalten wird durch die kleinen Frequenzen $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{4}\}$ bestimmt.

Frage: Worauf haben große Frequenzen einen Einfluß?

3.2.4 Zusammenhang zur Wärmeleitungsgleichung – Diffusionsphänomene

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Aufgabe.

Aufgabe 21 Vorgelegt sei das gemischte Problem

$$\varepsilon^2 u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0,\ \ u(0,x,\varepsilon) = f(x),\ \ u_t(0,x,\varepsilon) = g(x),\ x \in (0,L),$$
$$u(t,0,\varepsilon) = u(t,L,\varepsilon) = 0,$$

mit hinreichend glatten Daten f und g. Wir setzen voraus, daß die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind. Es sei $u = u(t,x,\varepsilon)$ die eindeutig bestimmte Lösung dieses Problems. Untersuchen Sie, ob für jedes feste (t,x) gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,x,\varepsilon) = w(t,x)$, wobei $w = w(t,x)$ das gemischte Problem

$$w_t - w_{xx} = 0,\;\; w(0,x) = f(x),\; x \in (0,L), w(t,0) = w(t,L) = 0$$

löst.

<u>Frage:</u> Worauf orientiert diese Aufgabenstellung?
<u>Antwort:</u> Mitunter wird anstelle der Wärmeleitungsgleichung $w_t - w_{xx} = 0$, deren Lösungen eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen besitzen, die gedämpfte Wellengleichung $\varepsilon^2 u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0$, $\varepsilon^2 > 0$ ist klein, benutzt. Deren Lösungen haben eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Das Kernresultat dieses Abschnittes ist ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung und der gedämpften Wellengleichung.

Wir betrachten zunächst das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung

$$w_t - \Delta w = 0, \quad w(0,x) = f(x).$$

Die Anwendung der partiellen Fouriertransformation liefert für $\hat{w}(t,\xi) = F_{x\to\xi}(w(t,\cdot))(\xi)$ das Anfangswertproblem

$$\hat{w}_t + |\xi|^2 \hat{w} = 0, \quad \hat{w}(0,\xi) = \hat{f}(\xi),$$

dessen Lösung offensichtlich

$$\hat{w}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi)$$

ist. Nach Anwendung der inversen partiellen Fouriertransformation erhalten wir die Lösungsdarstellung

$$w(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-|\xi|^2 t}\hat{f}(\xi)\right).$$

Lemma 3.1 *Vorgelegt sei das Cauchy-Problem*

$$w_t - \Delta w = 0, \quad w(0,x) = f(x).$$

Dann erhält man folgende Abschätzungen für die Ableitungen $\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,\cdot)$ der Lösung w:

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,\cdot)\|_{L^2} \le C_{k,\alpha}(1+t)^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{H^{2k+|\alpha|}}.$$

Beweis: Mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt unmittelbar

$$\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\left((-1)^k i^{|\alpha|} |\xi|^{2k} \xi^\alpha e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi)\right).$$

Die Anwendung der Parsevalschen Gleichung liefert für Zeiten $t \geq 1$

$$\begin{aligned}\|\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \left\| |\xi|^{2k} \xi^\alpha e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| |\xi|^{2k+|\alpha|} e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \frac{|\xi|^{2k+|\alpha|} t^{k+\frac{|\alpha|}{2}}}{t^{k+\frac{|\alpha|}{2}}} e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) \right\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

Der Term

$$|\xi|^{2k+|\alpha|} t^{k+\frac{|\alpha|}{2}} e^{-|\xi|^2 t} = \left(|\xi|^2 t\right)^{k+\frac{|\alpha|}{2}} e^{-|\xi|^2 t}$$

ist für alle Werte durch eine von k und α abängige Konstante $C_{k,\alpha}$ beschränkt. Demzufolge erhalten wir weiter die Abschätzung ($C_{k,\alpha}$ sei eine universelle Konstante.)

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq C_{k,\alpha} t^{-2k-|\alpha|} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = C_{k,\alpha} t^{-2k-|\alpha|} \|f\|_{L^2}^2$$

bzw.

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C_{k,\alpha} t^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{L^2} \leq C_{k,\alpha} t^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_{H^{2k+|\alpha|}}.$$

Für kleine Zeiten $t < 1$ benötigen wir die Regularität von f und erhalten die Abschätzung

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha w(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^{2k+|\alpha|}}.$$

Die Kombination der letzten beiden Abschätzungen liefert die Behauptung. □

Aufgabe 22 Für die Lösungen des Cauchy-Problems der gedämpften Welle

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x)$$

gilt die (scharfe) Abschätzung

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C \left(\|g\|_{H^{-1}} + \|f\|_{L^2}\right).$$

Wir betrachten nun noch einmal die Cauchy-Probleme

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 \\ u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} w_t - \Delta w = 0 \\ w(0,x) = f(x) + g(x) \end{cases}$$

gemeinsam. Es bezeichne $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion mit $\chi(s) = 1$ für $|s| \leq \frac{\sigma}{2} << 1$ und $\chi(s) = 0$ für $|s| \geq \sigma$. Es gilt nun das folgende bemerkenswerte Resultat:

Satz 3.6 *Für die Differenz der Lösungen obiger Cauchy-Probleme gilt die Abschätzung*

$$\left\| F^{-1}_{\xi \to x} \left(\chi(\xi) \left(\hat{u}(t,\xi) - \hat{w}(t,\xi)\right)\right) \right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1} \|(f,g)\|_{L^2}.$$

Beweis: Für die Lösung $u = u(t,x)$ bedienen wir uns der im Abschnitt 3.2.2 erarbeiteten Lösungsdarstellung für $|\xi| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\Bigg[&\left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi) - \frac{\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}\,t} \\ &+ \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi) + \frac{\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right) e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}\,t}\Bigg].\end{aligned}$$

Für $w = w(t,x)$ haben wir die Lösungsdarstellung

$$\hat{w}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}(\hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi)).$$

Wir nutzen nun die asymptotischen Entwicklungen $\sqrt{1+s} = 1 + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{8} + O(s^3)$ und $\frac{1}{\sqrt{1+s}} = 1 - \frac{s}{2} + O(s^2)$ für $s \to 0$ um die Darstellungen

$$\sqrt{1-4|\xi|^2} = 1-2|\xi|^2-2|\xi|^4+O(|\xi|^6) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}} = 1+2|\xi|^2+O(|\xi|^4)$$

für $\xi \to 0$ zu erhalten. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}&\left\|F^{-1}_{\xi\to x}\left(\chi(\xi)\left(\hat{u}(t,\xi)-\hat{w}(t,\xi)\right)\right)\right\|_{L^2} \\ &= \left\|\chi(\xi)\left(\hat{u}(t,\xi)-\hat{w}(t,\xi)\right)\right\|_{L^2} \\ &= \Bigg\|\chi(\xi)\Bigg[\left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi) - \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)\right) + \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)\right)O(|\xi|^2)\right) e^{-\frac{1}{2}t+O(|\xi|^2)t}e^{-\frac{1}{2}t} \\ &\qquad + \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi) + \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)\right) + \left(\hat{f}(\xi)+2\hat{g}(\xi)\right)|\xi|^2 \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)\right)O(|\xi|^4)\right) e^{\frac{1}{2}t-|\xi|^2t-|\xi|^4t+O(|\xi|^6)t}e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-|\xi|^2t}(\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi))\Bigg]\Bigg\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Wir schätzen jetzt die einzelnen Summanden ab. Zunächst erhalten wir

$$\left\|\chi(\xi)\left(-\hat{g}(\xi) + \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)\right)O(|\xi|^2)\right)e^{(-1+O(|\xi|^2))t}\right\|_{L^2} \le Ce^{-ct}\|(f,g)\|_{L^2}$$

mit einer Konstanten $c < 1$, die vom Träger von χ abhängt. Nun bleibt noch der andere Summand auszuwerten:

$$\left\|\chi(\xi)\left[\left(\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)+\left(\hat{f}(\xi)+2\hat{g}(\xi)\right)|\xi|^2 + \left(\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)+\hat{g}(\xi)\right)O(|\xi|^4)\right)\right.\right.$$

$$\cdot\, e^{-|\xi|^2t-|\xi|^4t+O(|\xi|^6)t} - e^{-|\xi|^2t}(\hat f(\xi)+\hat g(\xi))\Big]\Big\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned}\le\;& \Big\|\chi(\xi)\left(\hat f(\xi)+\hat g(\xi)\right)\left(e^{-|\xi|^2t-|\xi|^4t+O(|\xi|^6)t}-e^{-|\xi|^2t}\right)\Big\|_{L^2}\\ &+\Big\|\chi(\xi)\left(\left(\hat f(\xi)+2\hat g(\xi)\right)|\xi|^2+\left(\frac12\hat f(\xi)+\hat g(\xi)\right)O(|\xi|^4)\right)e^{-|\xi|^2t+O(|\xi|^4)t}\Big\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen in obiger rechter Seite den ersten Summanden mit J_1 und den zweiten mit J_2 und setzen zunächst $t \ge 1$ voraus. Wir erhalten zum einen die Abschätzung

$$\begin{aligned} J_1 &= \Big\|\chi(\xi)\left(\hat f(\xi)+\hat g(\xi)\right)(-|\xi|^4t+O(|\xi|^6)t)e^{-|\xi|^2t}\underbrace{\int_0^1 e^{(-|\xi|^4t+O(|\xi|^6)t)s}ds}_{\le 1}\Big\|_{L^2}\\ &\le C\Big\|\chi(\xi)\left(\hat f(\xi)+\hat g(\xi)\right)\frac{|\xi|^4t^2}{t}\,e^{-|\xi|^2t}\Big\|_{L^2}\le C\,t^{-1}\|(f,g)\|_{L^2}\end{aligned}$$

und zum anderen mit einer positiven Konstanten c

$$J_2 \;\le\; C\Big\|\chi(\xi)\left(|\hat f(\xi)|+|\hat g(\xi)|\right)\frac{|\xi|^2t}{t}\,e^{-c|\xi|^2t}\Big\|_{L^2}\le C\,t^{-1}\|(f,g)\|_{L^2}.$$

Für $t<1$ erhalten wir natürlich für $k=1,2$

$$J_k \le C\,\|(f,g)\|_{L^2},$$

also insgesamt

$$J_k \le C(1+t)^{-1}\|(f,g)\|_{L^2}.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Frage: Wie ist das Resultat von Satz 3.6 zu interpretieren?

Antwort: Wir halten uns einerseits neben dem Resultat von Satz 3.6 die Abschätzungen

$$\|F^{-1}_{\xi\to x}\left(\chi(\xi)\hat w(t,\cdot)\right)\|_{L^2}\le\|(f,g)\|_{L^2}$$

und

$$\|F^{-1}_{\xi\to x}\left(\chi(\xi)\hat u(t,\cdot)\right)\|_{L^2}\le C\|(f,g)\|_{L^2}$$

vor Augen, und erinnern uns andererseits daran, dass das decay-Verhalten immer von den kleinen Frequenzen bestimmt wird. Dann können wir, vom Standpunkt von decay-Abschätzungen aus gesehen, mit gewisser Berechtigung behaupten, dass das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+u_t=0\\ u(0,x)=f(x),\quad u_t(0,x)=g(x)\end{cases}$$

asymptotisch eine parabolische Struktur aufweist. Resultate dieser Art bezeichnet man als Diffusionsphänomene.

Ohne Beweis wollen wir im eindimensionalen Fall noch das folgende Resultat angeben:
Wir betrachten abermals die Cauchy-Probleme

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0 \\ u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(0,x) = f(x) + g(x) \end{cases}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$.

Satz 3.7 (Marcati, Nishihara)
Es gilt die Abschätzung

$$\left\| (u-w)(t,\cdot) - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left(f(\cdot + t) + f(\cdot - t) \right) \right\|_{L^2} \leq C\, t^{-1} \|(f,g)\|_{L^2}$$

für $t \geq t_0 > 0$.

Bemerkung: Aus der d'Alembertschen Lösungsdarstellung von Abschnitt 2.1.1 ersehen wir, dass $\frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right)$ Lösung eines Cauchy-Problems der freien Welle ist.

Kurzer Exkurs in die Theorie von Thermoelastizitätsmodellen:
Diffusionsphänomene lassen sich auch für Thermoelastizitätsmodelle beobachten. Wir studieren das Cauchy-Problem für das lineare klassische Thermoelastizitätsmodell im eindimensionalen Fall:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + \gamma_1 \theta_x = 0, \\ \theta_t - b^2 \theta_{xx} + \gamma_2 u_{tx} = 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x),\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \end{cases}$$

wobei a, b, γ_1 und γ_2 Konstanten sind mit $a, b, \gamma_1\gamma_2 > 0$. Die gesuchten Funktionen $u = u(t,x)$ und $\theta = \theta(t,x)$ bezeichnen die Verschiebung und die Temperatur (abzüglich einer Referenztemperatur).
Mit $u_\pm = u_t \pm a u_x$ und $U = (u_+, u_-, \theta)^T$ ist obiges Cauchy-Problem äquivalent zu

$$\begin{cases} \partial_t U + A_1 \partial_x U - A_2 \partial_x^2 U = 0, \\ U(0,x) = U_0(x) = (u_1 + a u_0', u_1 - a u_0', \theta_0)^T \end{cases}$$

mit den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 & \gamma_1 \\ 0 & a & \gamma_1 \\ \frac{\gamma_2}{2} & \frac{\gamma_2}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \operatorname{diag}(0,0,b^2).$$

Zunächst lassen sich über Diagonalisierungsprozeduren im Phasenraum L^p-L^q decay Abschätzungen herleiten, also Abschätzungen der Form

$$\|(u_x, u_t, \theta)(t, \cdot)\|_{L^q} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|(u_0', u_1, \theta_0)\|_{H^{2,p}}$$

für $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Betrachten wir nun noch folgendes parabolisches Problem

$$\begin{cases} \partial_t W_1 - \dfrac{a^2 b^2}{a^2 + \gamma_1\gamma_2}\,\partial_x^2 W_1 = 0, \\ \partial_t W_2 - \dfrac{b^2\gamma_1\gamma_2}{2(a^2+\gamma_1\gamma_2)}\,\partial_x^2 W_2 + \sqrt{a^2+\gamma_1\gamma_2}\,\partial_x W_2 = 0, \\ \partial_t W_3 - \dfrac{b^2\gamma_1\gamma_2}{2(a^2+\gamma_1\gamma_2)}\,\partial_x^2 W_3 - \sqrt{a^2+\gamma_1\gamma_2}\,\partial_x W_3 = 0, \\ W(0,x) = E(D)U_0(x) \end{cases}$$

mit einem geeigneten elliptischen Operator $E(D)$.
Dann erhält man die Abschätzung

$$\left\|F^{-1}_{\xi\to x}\left(\chi(\xi)\left(\hat{U}(t,\xi) - R(I - i\xi K_1)\hat{W}(t,\xi)\right)\right)\right\|_{L^q} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}}\|U_0\|_{L^p}$$

für $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dabei sind R und K_1 bekannte, konstante Matrizen, und $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ lokalisiert die kleinen Frequenzen.
Beachten wir noch, dass

$$\left\|F^{-1}_{\xi\to x}\left(\chi(\xi)\hat{W}(t,\xi)\right)\right\|_{L^q} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|U_0\|_{L^p},$$

gilt, so schließen wir, dass die Differenz schneller fällt und das asymptotische Profil des Cauchy-Problems für das klassische Thermoelastizitätsmodell gegeben ist durch das Cauchy-Problem für W. Das Cauchy-Problem für das klassische Thermoelastizitätsmodell besitzt also vom Standpunkt von decay-Abschätzungen aus gesehen eine asymptotisch parabolische Struktur.

Vortragsthema 2 *Diffussionsphänomene in der Thermoelastizität*

4 Ausblick auf moderne Forschungsrichtungen

4.1 Wellengleichungen mit irregulären Koeffizienten

4.1.1 Lipschitz stetige Koeffizienten

Wir behandeln das strikt hyperbolische Cauchy-Problem

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x)$$

mit einem Koeffizienten $a \in C^1[0,T]$, $a(t) \geq C > 0$. Koppeln wir die Energiemethode und das Gronwallsche Lemma so erhalten wir sofort die Korrektheit in den Sobolevräumen H^s, das heißt, zu gegebenen $\varphi \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C([0,T], H^{s+1}) \cap C^1([0,T], H^s)$ $(s \in N_0)$.

Aufgabe 23 Beweisen Sie diese Aussage!

Bemerkung: Im obigen Cauchy-Problem können wir anstelle von $a \in C^1[0,T]$ die Lipschitz-Bedingung $|a(t) - a(s)| \leq A|t - s|$ für $t, s \in [0,T]$ wählen.

Das obige Resultat zeigt, daß wir keinen *Ableitungsverlust* haben. Mit Daten $\varphi \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C([0,T], H^{s+1}) \cap C^1([0,T], H^s)$ $(s \in N_0)$. Weiterhin gilt für die Energie $E_s(u)$ s-ter Ordnung die a-priori Abschätzung

$$E_s(u)(t) := \|(D_t u(t,\cdot), \nabla u(t,\cdot))\|_{H^s} \leq C_s \|(\psi, \nabla\varphi)\|_{H^s} =: E_s(u)(0).$$

Wenden wir uns noch einmal dem Cauchy-Problem

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \; u_t(0,x) = \psi(x)$$

mit einem Koeffizienten $a \in C^1[0,T]$, $a(t) \geq C > 0$, zu. Dann ergeben sich aus obigen Energieabschätzungen für die Energie s-ter Ordnung sofort folgende Aussagen:

- Falls die Daten φ und ψ aus dem $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ gewählt werden, dann ist das Cauchy-Problem H^∞-korrekt , das heißt, es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung aus $C^3([0,T], H^\infty)$. Die Lösung hängt stetig von den Daten ab.

- Nutzen wir die Existenz eines Abhängigkeitsgebietes, dann folgt aus der H^∞-Korrektheit sofort die C^∞-Korrektheit, das heißt, zu gegebenen Daten φ und ψ aus dem $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung aus $C^3([0,T], C^\infty)$. Die Lösung hängt stetig von den Daten ab.

Es steht natürlich die Frage nach allgemeinen Resultaten, die die Existenz eines Abhängigkeitsgebietes sichern. Wir geben nur ein Resultat an.

Satz 4.1 ([1])
Gegeben sei das strikt hyperbolische Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(t) u_{x_k x_l} = f(t,x), \; u(0,x) = \varphi(x), \; u_t(0,x) = \psi(x) \; .$$

Die Koeffizienten $a_{kl} = a_{lk}$ der Matrix a sind reell und gehören zu $L^1(0,T)$. Außerdem gelte $\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(t)\xi_k\xi_l \geq \lambda_0|\xi|^2$ with $\lambda_0 > 0$. Falls dann $u \in H^{2,1}([0,T], \mathcal{A}')$ eine Lösung zu gegebenen $\varphi, \psi \in \mathcal{A}'$ und $f \in L^1([0,T], \mathcal{A}')$ ist, dann folgt aus $\varphi \equiv \psi \equiv f \equiv 0$ für $|x - x_0| < \rho$ sofort $u \equiv 0$ in der Menge $\{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n :$

$|x-x_0| < \rho - \int_0^t \sqrt{|a(s)|}ds\}$. *Mit* $|a(t)|$ *bezeichnen wir die Euklidische Matrixnorm, mit* $\mathcal{A}'$ *bezeichnen wir den Raum der* **Analytischen Funktionale**.

Bemerkung: Wir wollen an dieser Stelle auf die Definition des Raumes der analytischen Funktionale verzichten, wollen aber hervorheben, daß dahinter ein sehr schwacher Lösungsbegriff steht. Damit zeigen sehr schwache Lösungen, insbesondere unsere Energielösungen, eine Abhängigkeitsgebietseigenschaft.

4.1.2 Endlicher Ableitungsverlust

In diesem Abschnitt wollen wir die Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit des Koeffizienten $a = a(t)$ abschwächen. Das Ziel besteht darin, Energieabschätzungen der Form $E_{s-s_0}(u)(t) \leq CE_s(u)(0)$ mit $s_0 \geq 0$ zu beweisen. Der Wert s_0 beschreibt den sogenannten *Ableitungsverlust.*

Eine globale Bedingung Die folgende Idee geht auf die Arbeit [1] zurück. Die Autoren setzten dort die sogenannte Log-Lipschitz Eigenschaft von a voraus, das heißt, der Koeffizient a erfüllt

$$|a(t) - a(s)| \leq C|t-s|\,|\log|t-s|\,| \quad \text{für alle} \quad t, s \in [0,T], t \neq s\ .$$

Aufgabe 24 Versuchen Sie eine Funktion zu finden, die auf $[0,1]$ Log-Lipschitz-stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Unter dieser Voraussetung konnte die Korrektheit in C^∞ bewiesen werden.

Heute sind wir weiter und haben eine genaue *Klassifizierung des Log-Lipschitz Verhaltens bezüglich des zu erwartenden Ableitungsverlustes.*

Satz 4.2 *Vorgelegt sei das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x).$$

Der Koeffizient $a = a(t)$ *erfülle die Bedingung* $|a(t)-a(s)| \leq C|t-s|\,|\log|t-s||^\gamma$ *für alle* $t, s \in [0,T], t \neq s$. *Dann gilt die Energieabschätzung* $E_{s-s_0}(u)(t) \leq C\ E_s(u)(0)$, *wobei*

- $s_0 = 0$ *falls* $\gamma = 0$,
- s_0 *ist beliebig klein und positiv falls* $\gamma \in (0,1)$,
- s_0 *ist positiv falls* $\gamma = 1$,
- *es existiert keine positive Konstante* s_0 *falls* $\gamma > 1$ *(unendlicher Ableitungsverlust).*

Lokale Bedingung Eine zweite Möglichkeit der Abschwächung der Lipschitz Eigenschaft von $a = a(t)$ geht auf die Arbeit [2] zurück. Unter der Voraussetzung

$$a \in C[0,T] \cap C^1(0,T], \ |ta'(t)| \le C \quad \text{für} \quad t \in (0,T], \tag{4.1}$$

bewiesen die Autoren C^∞-Korrektheit für das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0, \ u(0,x) = \varphi(x), \ u_t(0,x) = \psi(x).$$

Weiterhin beobachteten die Autoren einen möglichen *endlichen Ableitungsverlust*.

Bemerkung: Versuchen wir, die lokale mit der globalen Bedingung zu vergleichen. Falls $a = a(t) \in$ Log-Lip$[0,T]$, dann kann der Koeffizient ein irreguläres Verhalten (im Vergleich mit der Lipschitz-Eigenschaft) auf dem gesamten Intervall $[0,T]$ besitzen. Die lokale Bedingung beschreibt ein irreguläres Verhalten nur in $t = 0$, entfernt von $t = 0$ ist der Koeffizient C^1. Koeffizienten, die der Bedingung (4.1) genügen, sind i.allg. aber nicht Log-Lipschitz auf $[0,T]$.

4.1.3 Eine genauere Klassifizierung von Oszillationen

Wir setzen jetzt mehr Regularität für den Koeffizienten $a = a(t)$ voraus, z.B., $a \in L^\infty[0,T] \cap C^2(0,T]$. Diese höhere Regularität erlaubt eine präzisere Klassifizierung von Oszillationen einzuführen.

Definition 4.1 *Wir setzen neben der oben festgelegten Regularität die Bedingung*

$$|a^{(k)}(t)| \le C_k \left(\frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t} \right)^\gamma \right)^k \quad , \quad \text{für } k = 1,2 \tag{4.2}$$

voraus. Wir bezeichnen das oszillierende Verhalten von a als

- *sehr langsam falls* $\gamma = 0$,
- *langsam falls* $\gamma \in (0,1)$,
- *schnell falls* $\gamma = 1$,
- *sehr schnell falls die Bedingung (4.2) für* $\gamma = 1$ *nicht erfüllt ist.*

Beispiel: Gegeben sei $a = a(t) = 2 + \sin\left(\log \frac{1}{t}\right)^\alpha$. Dann sind die durch den sin-Term erzeugten Oszillationen sehr langsam (langsam, schnell, sehr schnell) falls $\alpha \le 1$ $(\alpha \in (1,2), \alpha = 2, \alpha > 2)$.

Wir werden im folgenden ein Resultat formulieren und beweisen, daß eine genaue *Beziehung zwischen dem Typ der Oszillationen und dem Ableitungsverlust* beschreibt. Der Beweis beruht auf den Arbeiten [3] und [12]. Das Ziel ist die *Konstruktion von WKB-Lösungen.* Die entwickelte Methode ist universell im Sinne, daß sie auf allgemeinere Modelle der *strikt hyperbolischen Theorie mit schwach regulären Koeffizienten, der schwach hyperbolischen Theorie, der Theorie von p-Evolutionsoperatoren, und der Theorie von $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen angewendet werden kann.*

Satz 4.3 *Vorgelegt sei das strikt hyperbolische Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0 \ , \ \ u(0,x) = \varphi(x) \ , \ \ u_t(0,x) = \psi(x) \ ,$$

wobei der Koeffizient $a = a(t) \in L^\infty[0,T] \cap C^2(0,T]$ der Bedingung (4.2) genügt. Die Daten φ , ψ gehören zu H^{s+1}, H^s. Dann gilt die folgende Energieungleichung:

$$E(u)(t)\mid_{H^{s-s_0}} \leq C(T)E(u)(0)\mid_{H^s} \quad \text{für alle } \ t \in (0,T] \ , \tag{4.3}$$

wobei

- $s_0 = 0$ *falls* $\gamma = 0$,
- s_0 *beliebig klein und positiv ist falls* $\gamma \in (0,1)$,
- s_0 *positiv ist falls* $\gamma = 1$,
- *keine positive Konstante s_0 existiert, die (4.3) erfüllt falls $\gamma > 1$ ist, das heißt, wir haben einen unendlichen Ableitungsverlust.*

Beweis: Der Beweis wird in verschiedene Schritte untergliedert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann T als klein vorausgesetzt werden, warum? Nach Anwendung partieller Fouriertransformation erhalten wir

$$v_{tt} + a(t)\xi^2 v = 0 \ , \ \ v(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \ , \ \ v_t(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi) \ . \tag{4.4}$$

1. Schritt: Zonen

Wir unterteilen den *erweiterten Phasenraum* $\{(t,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R} : |\xi| \geq M\}$ (nicht nur die übliche Phasenvariable ξ, sondern auch die Zeitvariable bildet eine Phasenvariable) in zwei Zonen mit Hilfe der Funktion $t = t_\xi$ welche $t_\xi \langle \xi \rangle = N(\log\langle\xi\rangle)^\gamma$ löst.

Aufgabe 25 Warum dürfen wir uns auf betragsmäßig große Frequenzen $\{\xi : |\xi| \geq M\}$, M ist groß , beschränken?

Die Konstante N wird später bestimmt. Mit der Funktion t_ξ definieren wir die *pseudodifferentielle Zone* $Z_{pd}(N)$ bzw. die *hyperbolische Zone* $Z_{hyp}(N)$ durch

$$Z_{pd}(N) = \{(t,\xi) : t \leq t_\xi\}, \quad Z_{hyp}(N) = \{(t,\xi) : t \geq t_\xi\} \ .$$

2. Schritt: Symbole

Zu gegebenen reellen Zahlen $m_1, m_2 \geq 0,\ r \leq 2$, definieren wir die Symbolklassen

$$S_r\{m_1, m_2\} = \{d = d(t,\xi) \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}) :$$
$$|D_t^k D_\xi^\alpha d(t,\xi)| \leq C_{k,\alpha} \langle \xi \rangle^{m_1 - |\alpha|} \left(\frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t} \right)^\gamma \right)^{m_2 + k},\ k \leq r,\ (t,\xi) \in Z_{hyp}(N)\}.$$

Diese Symbolklassen sind nur in der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$ definiert. In der pseudodifferentiellen Zone sind Symbolklassen im Moment uninteressant.

Eigenschaften der Symbolklassen:

- $S_{r+1}\{m_1, m_2\} \subset S_r\{m_1, m_2\}$;
- $S_r\{m_1 - p, m_2\} \subset S_r\{m_1, m_2\}$ für alle $p \geq 0$;
- $S_r\{m_1 - p, m_2 + p\} \subset S_r\{m_1, m_2\}$ für alle $p \geq 0$, das ergibt sich sofort unter Beachtung der Definition der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$;
- falls $a = a(t,\xi) \in S_r\{m_1, m_2\}$ und $b = b(t,\xi) \in S_r\{k_1, k_2\}$, dann gilt $a\,b \in S_r\{m_1 + k_1, m_2 + k_2\}$;
- falls $a \in S_r\{m_1, m_2\}$, dann ist $D_t a \in S_{r-1}\{m_1, m_2 + 1\}$, and $D_\xi^\alpha a \in S_r\{m_1 - \alpha, m_2\}$.

Aufgabe 26 Beweisen Sie diese Eigenschaften!

3. Schritt: Untersuchungen in der pseudodifferentiellen Zone $Z_{pd}(N)$

Setzen wir $V = (\xi v, D_t v)^T$, dann kann die Gleichung aus (4.4) zu folgendem System erster Ordnung transformiert werden:

$$D_t V = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ a(t)\xi & 0 \end{pmatrix} V =: A(t,\xi) V\ . \tag{4.5}$$

Wir sind interessiert an der Fundamentallösung $X = X(t,r,\xi)$ zu dem System (4.5) mit der Bedingung $X(r,r,\xi) = I$ (I bezeichnet die Einheitsmatrix). Nutzen wir den sogenannten *Matrizant*, dann können wir die Fundamentallösung $X = X(t,r,\xi)$ in expliziter Form schreiben. Es gilt

$$X(t,r,\xi) = I + \sum_{k=1}^\infty i^k \int_r^t A(t_1,\xi) \int_r^{t_1} A(t_2,\xi) \cdots \int_r^{t_{k-1}} A(t_k,\xi) dt_k \cdots dt_1\ .$$

Aufgabe 27 Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Darstellung! Kennen Sie solche Darstellungen aus dem Kurs “Funktionalanalysis”?

Die Norm $\|A(t,\xi)\|$ der Matrix A (wir verwenden eine übliche Matrixnorm) kann abgeschätzt werden durch $C\langle\xi\rangle$. Folglich erhalten wir die Abschätzung

$$\int_0^{t_\xi} \|A(s,\xi)\| ds \le C t_\xi \langle\xi\rangle = C_N(\log\langle\xi\rangle)^\gamma.$$

Die Lösung des Cauchy-Problems für (4.5) mit der Cauchy-Bedingung $V(0,\xi) = V_0(\xi)$ kann mit Hilfe der Fundamentallösung in der Form $V(t,\xi) = X(t,0,\xi)V_0(\xi)$ dargestellt werden. Aus $\|X(t,0,\xi)\| \le \exp(\int_0^t \|A(s,\xi)\| ds) \le \exp(C_N(\log\langle\xi\rangle)^\gamma)$ ergibt sich sofort das folgende Resultat:

Lemma 4.1 *Die Lösung von (4.5) mit der Cauchy-Bedingung $V(0,\xi) = V_0(\xi)$ erfüllt in der pseudodifferentiellen Zone $Z_{pd}(N)$ die Energieabschätzung*

$$|V(t,\xi)| \le \exp(C_N(\log\langle\xi\rangle)^\gamma)|V_0(\xi)|.$$

Bemerkung: In der pseudodifferentiellen Zone $Z_{pd}(N)$ sind wir sehr nah an der Geraden $t = 0$. Hier hat die Zeitableitung des Koeffizienten $a = a(t)$ ein irreguläres Verhalten. Es ist deshalb *keine gute Idee, in dieser Zone die hyperbolische Energie* $(\sqrt{a(t)}\xi\, v, D_t v)$ zu verwenden, da in diesem Falle das schlechte Verhalten von $a' = a'(t)$ ins Spiel kommt. Um das zu vermeiden, definieren wir die *Mikroenergie* $(\xi\, v, D_t v)$.

4. Schritt: Durchführung von zwei Diagonalisierungsschritten

Setzen wir $V := (\sqrt{a(t)}\xi\, v, D_t v)^T$ (übliche hyperbolische Mikroenergie), dann erhalten wir das System erster Ordnung

$$D_t V - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a(t)}\xi \\ \sqrt{a(t)}\xi & 0 \end{pmatrix} V - \frac{D_t a}{2a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V = 0\,. \tag{4.6}$$

Die erste Matrix gehört zur Symbolklasse $S_2\{1,0\}$, die zweite Matrix gehört zur Symbolklasse $S_1\{0,1\}$. Wir wollen jetzt die erste Matrix diagonalisieren. Berechnen wir die Eigenwerte und die Eigenvektoren, dann ergibt sich als Diagonalisator die Matrix $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Setzen wir $V_0 := MV$, dann wird das System (4.6) wie folgt transformiert:

$$D_t V_0 - M \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a(t)}\xi \\ \sqrt{a(t)}\xi & 0 \end{pmatrix} M^{-1} V_0 - M \frac{D_t a}{2a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} V_0 = 0\,,$$

$$D_t V_0 - \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} V_0 - \frac{D_t a}{4a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V_0 = 0\,,$$

mit $\tau_{1/2} := \mp\sqrt{a(t)}\xi + \frac{1}{4}\,\frac{D_t a}{a}$. Bezeichnen wir

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \in S_1\{1,0\}\ ;\ R_0 = \frac{1}{4}\,\frac{D_t a}{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_1\{0,1\},$$

dann lässt sich obiges System in der Form $D_t V_0 - \mathcal{D}V_0 - R_0 V_0 = 0$ schreiben. Dieser Schritt der Diagonalisierung ist

• *die Diagonalisierung unseres Ausgangssystems (4.6) modulo dem Restterm* $R_0 \in S_1\{0,1\}$.

Nun werden wir den Restterm R_0 diagonalisieren. Dazu schlagen wir eine spezielle Diagonalisierungsprozedur vor. Ziel des nächsten Schrittes ist es, zu erreichen, daß der neue Restterm R_1 in der Symbolklasse $S_0\{-1,2\}$ liegt. Diese ist bezüglich der Differenzierbarkeit nach t schlechter, doch liefert die Abschätzung des Restes R_1 eine bessere Schranke als die Abschätzung von R_0 im Sinne der Symbolhierarchie.

Wir setzen

$$\mathcal{N}^{(1)} := -\frac{1}{4}\,\frac{D_t a}{a} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_1-\tau_2} \\ \frac{1}{\tau_2-\tau_1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{D_t a}{8a^{3/2}\xi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix $N_1 := I + \mathcal{N}^{(1)}$ invertierbar in der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$ für hinreichend große N. Das folgt aus der Definition der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$, aus der Abschätzung

$$\|N_1 - I\| = \|\mathcal{N}^{(1)}\| \leq C_a \frac{1}{t|\xi|} \left(\log\frac{1}{t}\right)^{\gamma} \leq \frac{C_a}{N} \left(\frac{\log\frac{1}{t}}{\log\langle\xi\rangle}\right)^{\gamma} \leq \frac{C_a}{N} \leq \frac{1}{2}$$

falls N groß gewählt wird, und aus $\log\langle\xi\rangle - \log\frac{1}{t} \geq \log N + \log(\log\langle\xi\rangle)^{\gamma}$. Wir beobachten einerseits $\mathcal{D}N_1 - N_1\mathcal{D} = -R_0$ und andererseits $(D_t - \mathcal{D} - R_0)N_1 = N_1(D_t - \mathcal{D} - R_1)$, wobei $R_1 := -N_1^{-1}(D_t\mathcal{N}^{(1)} - R_0\mathcal{N}^{(1)})$ gesetzt wird. Berücksichtigen wir $\mathcal{N}^{(1)} \in S_1\{-1,1\}$, $N_1 \in S_1\{0,0\}$ und $R_1 \in S_0\{-1,2\}$, dann führt die Transformation $V_0 =: N_1 V_1$ zu folgendem System erster Ordnung:

$$D_t V_1 - \mathcal{D}V_1 - R_1 V_1 = 0\ ,\ \mathcal{D} \in S_1\{1,0\}\ ,\ R_1 \in S_0\{-1,2\}\ .$$

Der zweite Schritt der Diagonalisierung ist die

• *Diagonalisierung unseres Ausgangssystems (4.6) modulo dem Restterm* $R_1 \in S_0\{-1,2\}$.

5. step: Lösungsdarstellung für unser Cauchy-Problem

Wir wenden uns jetzt dem Cauchy-Problem

$$D_t V_1 - \mathcal{D}V_1 - R_1 V_1 = 0\ ,\ V_1(t_\xi,\xi) = V_{1,0}(\xi) := N_1^{-1}(t_\xi,\xi) M\, V(t_\xi,\xi) \tag{4.7}$$

zu. Da wir nur in der hyperbolischen Zone arbeiten ($t \geq t_\xi$), muß die Cauchy-Bedingung auf der Kurve $t = t_\xi$ formuliert werden. Von Lemma 4.1 erhalten wir die Kenntnis von $V(t_\xi, \xi)$. Die obigen Transformationen liefern dann sofort $V_1(t_\xi, \xi)$. Falls wir umgekehrt eine Lösung von (4.7) haben, dann löst $V = V(t, \xi) = M^{-1}N_1(t, \xi)V_1(t, \xi)$ sofort (4.6) with gegebenem Datum $V(t_\xi, \xi)$ auf $t = t_\xi$.
Die Matrix-wertige Funktion

$$E_2(t, r, \xi) := \begin{pmatrix} \exp\left(i \int_r^t (-\sqrt{a(s)}\xi + \frac{D_s a(s)}{4a(s)}) ds\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i \int_r^t (\sqrt{a(s)}\xi + \frac{D_s a(s)}{4a(s)}) ds\right) \end{pmatrix}$$

löst das Cauchy-Problem $(D_t - \mathcal{D})E(t, r, \xi) = 0, \; E(r, r, \xi) = I$. Wir definieren die Matrix-wertige Funktion $H = H(t, r, \xi), \; t, r \geq t_\xi$ durch

$$H(t, r, \xi) := E_2(r, t, \xi)R_1(t, \xi)E_2(t, r, \xi) \; .$$

Benutzen wir $\int\limits_r^t \frac{\partial_s a(s)}{4a(s)} \, ds = \log \; a(s)^{1/4} \, |_r^t$ (dieses Integral hängt nur von a, aber nicht von a' ab), dann erfüllt die Funktion H in der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$ die Abschätzung

$$\|H(t, r, \xi)\| \; \leq \; \frac{C}{\langle \xi \rangle} \; \left(\frac{1}{t} \left(\log \, \frac{1}{t} \right)^\gamma \right)^2 \; . \tag{4.8}$$

Schließlich definieren wir die Matrix-wertige Funktion $Q = Q(t, r, \xi)$ durch

$$Q(t, r, \xi) := \sum_{k=1}^\infty i^k \int_r^t H(t_1, r, \xi) dt_1 \int_r^{t_1} H(t_2, r, \xi) dt_2 \cdots \int_r^{t_{k-1}} H(t_k, r, \xi) dt_k \; .$$

Es erweist sich, daß mit Hilfe der Funktion Q die Matrix-wertige Funktion

$$V_1 = V_1(t, \xi) := E_2(t, t_\xi, \xi)(I + Q(t, t_\xi, \xi))V_{1,0}(\xi)$$

eine Lösung von (4.7) darstellt.

6. Schritt: Grundlegende Abschätzung in der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$

Berücksichtigen wir (4.8) und die Abschätzung $\int\limits_{t_\xi}^t \|H(s, t_\xi, \xi)\| ds \leq C_N (\log\langle\xi\rangle)^\gamma$ dann erhalten wir aus der Darstellung für Q sofort

$$\|Q(t, t_\xi, \xi)\| \leq \exp\Big(\int_{t_\xi}^t \|H(s, t_\xi, \xi)\| ds \Big) \leq \exp(C_N (\log\langle\xi\rangle)^\gamma) \; . \tag{4.9}$$

Alle Aussagen der vorhergehenden Schritte liefern zusammen mit (4.9) das folgende Resultat.

Lemma 4.2 *Die Lösung zu (4.6) mit der Cauchy-Bedingung auf $t = t_\xi$ erfüllt in der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$ die Energieabschätzung*

$$|V(t,\xi)| \le C\ \exp(C_N(\log\langle\xi\rangle)^\gamma)|V(t_\xi,\xi)|\ .$$

7. Schritt: Verifikation

Die Aussagen der Lemmata 4.1 und 4.2 liefern sofort

Lemma 4.3 *Die Lösung $v = v(t,\xi)$ des Cauchy-Problems*

$$v_{tt} + a(t)\xi^2 v = 0\ , \quad v(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\ , \quad v_t(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi)$$

erfüllt die a-priori Abschätzung

$$\left|\begin{pmatrix} \xi\, v(t,\xi) \\ v_t(t,\xi) \end{pmatrix}\right| \le C\ \exp(C_N(\log\langle\xi\rangle)^\gamma)\left|\begin{pmatrix} \xi\, \hat{\varphi}(\xi) \\ \hat{\psi}(\xi) \end{pmatrix}\right|$$

für alle $(t,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 28 Zeigen Sie, daß die Aussage von Lemma 4.3 sofort die Aussage von Satz 4.3 für $\gamma \in [0,1]$ nach sich zieht!

Die Aussage für $\gamma > 1$ folgt aus Satz 4.4 (siehe nächster Abschnitt) wenn wir in diesem $\omega(t) = \log^q \frac{C(q)}{t}$ mit $q \ge 2$ wählen. □

Bemerkungen:

- Mit den Aussagen der Sätze 4.1 und 4.3 erhalten wir sofort die C^∞-Korrektheit des Cauchy-Problems

  $$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0\ , \quad u(0,x) = \varphi(x)\ , \quad u_t(0,x) = \psi(x),$$

  unter den Voraussetzungen $a \in L^\infty[0,T] \cap C^2(0,T]$ and (4.2) for $\gamma \in [0,1]$.

- Ohne zusätzliche Schwierigkeiten kann Satz 4.3 auf das Cauchy-Problem

  $$u_{tt} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(t)u_{x_k x_l} = 0\ , \quad u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),$$

  mit den entsprechenden Voraussetzungen an $a_{kl} = a_{kl}(t)$ verallgemeinert werden.

- Falls wir die Diagonalisierungsprozedur nach dem ersten Schritt beenden würden, dann haben wir in Satz 4.3 die Bedingung (4.1) vorauszusetzen.

Offenes Problem: In diesem Abschnitt habe wir eine sehr effektive Klassifizierung von Oszillationen unter der Voraussetzung $a \in L^\infty[0,T] \cap C^2(0,T]$ geliefert. Im Moment fehlt ein gutes Verständnis dafür was wir im Fall $a \in L^\infty[0,T] \cap C^1(0,T]$ mit $|a'(t)| \leq C\,\frac{1}{t}\,\left(\log\frac{1}{t}\right)^\gamma$, $\gamma > 0$, erwarten dürfen. Falls $\gamma = 0$, dann erhalten wir aus der Arbeit [2] höchstens einen endlichen Ableitungsverlust. Was geschieht aber im Fall $\gamma > 0$?

Bemerkung: Wenden wir uns dem strikt hyperbolischen Cauchy-Problem

$$u_{tt} + b(t)u_{xt} - a(t)u_{xx} = 0\ , \quad u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x)$$

zu. Es tritt somit eine gemischte Ableitung zweiter Ordnung auf.

Frage: Ändert dieser gemischte Term die in Definition 4.1 vorgeschlagene Klassifizierung von Oszillationen?

Antwort: Ja!!!! Mit der Arbeit [15] wissen wir, daß Koeffizienten $a, b \in L^\infty[0,T] \cap C^2(0,T]$ existieren, die der Bedingung (4.2) mit $\gamma > 0$ genügen und für welche das entsprechende Cauchy-Problem nicht C^∞-korrekt ist. Es existiert demnach auch keine Konstante s_0, für welche die Energieungleichung (4.3) erfüllt ist.

Bemerkung: Das Mischen verschiedener nicht regulärer Effekte
Der Übersichtsartikel [8] liefert Resultate über die Wirkung verschiedener nicht regulärer Effekte wie globale Hölderstetigkeit von $a = a(t)$ auf $[0,T]$ und L^p-Integrierbarkeit einer gewichteten Ableitung auf $[0,T]$. Unter allen Resultaten wählen wir nur eins aus. Dieses liefert die C^∞-Korrektheit des Cauchy-Problems

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0\ , \quad u(0,x) = \varphi(x)\ , \quad u_t(0,x) = \psi(x),$$

falls $a = a(t)$ der Bedingung $t^q \partial_t a \in L^p(0,T)$ für $q + 1/p = 1$ genügt.

Vortragsthema 3 Mischen nicht regulärer Effekte in der Theorie strikt hyperbolischer Differentialgleichungen

4.1.4 Hirosawas Gegenbeispiel

Es gibt heute recht verschiedene Strategien, um Gegenbeispiele zu konstruieren. Um die Aussage von Satz 4.3 für $\gamma > 1$ verifizieren zu können, zitieren wir nur ein Resultat aus [3]. Diese Resultat zeigt uns, daß *sehr schnelle Oszillationen einen verheerenden Einfluß auf die C^∞ Korrektheit haben.*

Satz 4.4 (siehe [3])
Es sei $\omega : (0,1/2] \to (0,\infty)$ eine stetige und monoton fallende Funktion. Diese erfülle $\lim \omega(s) = \infty$ für $s \to +0$ und $\omega(s/2) \leq c\,\omega(s)$ für alle $s \in (0,1/2]$. Dann existiert eine Funktion $a \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $1/2 \leq a(t) \leq 3/2$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$;

- *es existiert eine positive Konstante T_0 und zu jedem p eine positive Konstante C_p so, daß*

$$|a^{(p)}(t)| \le C_p \omega(t) \Big(\frac{1}{t}\ \log\ \frac{1}{t}\Big)^p \quad \text{für alle } \ t \in (0, T_0)$$

gilt;

- *es existieren zwei Funktionen φ und ψ aus $C^\infty(\mathbb{R})$ so, daß das Cauchy-Problem $u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $u_t(0,x) = \psi(x)$, keine Lösung aus $C^0([0,r),\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ für alle $r > 0$ besitzt. Dabei bezeichnet $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ den Raum der auf $\mathbb{R}$ definierten Distributionen.*

Der Koeffizient $a = a(t)$ besitzt die Regularität $a \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Um das offene Problem aus Abschnitt 4.1.3 attackieren zu können, sollte man sich an das schöne Gegenbeispiel aus [12] erinnern. In diesem hat der Koeffizient $a = a(t)$ die niedere Regularität $a \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Das Verständnis dieses Gegenbeispiels erhalten wir mit Hilfe des Cauchy-Problems

$$u_{tt} - b\Big((\log \frac{1}{t})^q\Big)^2 \triangle u = 0\ ,\ u(1,x) = \varphi(x),\ u_s(1,x) = \psi(x). \tag{4.10}$$

Die Resultate aus [12] liefern die folgende Aussage:

Satz 4.5 *Es sei $b = b(s)$ eine positive, 1-periodische, nicht konstante Funktion aus C^2. Falls $q > 2$, dann existieren Daten $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, daß (4.10) keine Lösung in $C^2([0,1], \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ besitzt.*

Beweis: Der Beweis beruht auf der Anwendung der Floquet-Theorie. Diese Theorie wird in heutiger Zeit im Laufe eines Mathematikstudiums nicht mehr gelehrt. Einen Einstieg in diese Theorie findet man z.B. in [9] oder in [23]. Im nächsten Abschnitt werden wir anhand eines sehr einfache Beispiels das Hilfsmittel Floquet-Theorie kennenlernen. □

Bemerkung: Die Idee, Resultate der Floquet-Theorie einzusetzen, geht auf die Arbeit [41] zurück. In dieser wurde die C^∞-Korrektheit für schwach hyperbolische Cauchy-Probleme studiert. Diese Idee wurde in [39] ausgenutzt zum Studium von $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für Lösungen von Wellengleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten. Der Verdienst der Arbeit [12] besteht in der Anwendung der Floquet-Theorie zum Studium von strikt hyperbolischen Cauchy-Problemen mit nicht-Lipschitz stetigen Koeffizienten. Die vorausgesetzte Regularität $b \in C^2$ hängt mit benötigten Hilfsmitteln der Floquet-Theorie zusammen. Die Arbeit [30] stellt einen Versuch dar, die strikt hyperbolische Theorie mit nicht Lipschitz-stetigen Koeffizienten, die schwach hyperbolische Theorie und die Theorie von $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für Lösungen von Wellengleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten von einem einheitlichen Standpunkt aus zu untersuchen.

Vortragsthema 4 *Anwendung der Floquet-Theorie - Hirosawas Gegenbeispiel*

4.2 Langzeitverhalten von Energien

4.2.1 Blow-up der Energie

Satz 4.6 *Vorgelegt sei das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - b(t)^2 \triangle u = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x)\ , \tag{4.11}$$

wobei der Koeffizient $b = b(t)$ eine 1-periodische, nicht konstante, glatte, und positive Funktion ist. Dann existieren keine Konstanten q, p, C, L und keine nichtnegative Funktion f, die auf $\mathbb{N}$ definiert ist so, daß für beliebige Daten $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$\|u_t(m,\cdot)\|_{L^q} + \|\nabla_x u(m,\cdot)\|_{L^q} \le C\, f(m)(\|\varphi\|_{H^{p,L}} + \|\psi\|_{H^{p,L}}) \tag{4.12}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, wobei die zahlentheoretische Funktion $f = f(m)$ den Bedingungen $f(m) \to \infty$, $\log f(m) = o(m)$ für $m \to \infty$ genügt.

Insbesondere haben wir damit gezeigt, daß keine Konstanten s, s_0 existieren mit

$$\|u_t(m,\cdot)\|_{H^{s-s_0}} + \|\nabla_x u(m,\cdot)\|_{H^{s-s_0}} \le C\, f(m)(\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^s}) \tag{4.13}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, wobei die zahlentheoretische Funktion $f = f(m)$ den Bedingungen $f(m) \to \infty$, $\log f(m) = o(m)$ für $m \to \infty$ genügt.

Bemerkung: Die Bedingungen für $f = f(m)$ in (4.13), (4.12) sind *fast optimal*. Wenden wir das Gronwallsche Lemma an, dann bekommen wir ohne Schwierigkeiten die Energie-Abschätzung

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2} \le C\ \exp(C_0 t)(\|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{L^2}), \quad t \in [0,\infty),$$

für die Lösungen von (4.11). Wählen wir $t = m,\ m \in \mathbb{N},\ p = q = 2, L = 1$, dann erhalten wir eine Ungleichung (4.12) mit $\log f(m) = O(m)$ für $m \to \infty$.

Bemerkung: Wir werden im Beweis eine spezielle Folge von Daten $\{(\varphi_M, \psi_M)\}_{M\in\mathbb{N}}$ wählen. Die zugehörigen Lösungen $\{u_M\}_{M\in\mathbb{N}}$ werden eine Abschätzung der Form (4.12) für große Werte von M nicht erfüllen. Eine interessante Frage ist die nach einer Klassifizierung von Daten: Daten, die eine Abschätzung der Form (4.12) erfüllen und solche, die eine Abschätzung der Form (4.12) nicht erfüllen.

Beweis: Der Beweis wird in verschiedene Schritte untergliedert.

1. Schritt: Ein Lemma für gewöhnliche Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

Vorgelegt sei die gewöhnliche Differentialgleichung mit periodischem Koeffizienten

$$w_{tt} + \lambda\, b(t)^2 w = 0\ . \tag{4.14}$$

Es sei weiterhin die von λ abhängige Matrix-wertige Funktion $X = X(t, t_0)$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$d_t X = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda\, b(t)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X\ , \quad X(t_0, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ . \tag{4.15}$$

Damit ist $X = X(t, t_0)$ eine Fundamentallösung zu dem System

$$d_t W = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda\, b(t)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W, \tag{4.16}$$

welches wir aus (4.14) erhalten wenn wir den Vektor $W = (w_t, w)^T$ einführen. Die Matrix $X(t+1, t)$ ist unabhängig von $t \in \mathbb{N}$, diese Matrix transportiert die Lösung vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$, d.h.,

$$W(t+1) = X(t+1, t)W(t).$$

Wir definieren

$$X(1, 0) := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\ .$$

Bilden wir $\det X(t, t_0)$, dann ergibt sich sofort aus (4.15) und mit der Tatsache, daß die Spur der Matrix gleich 0 ist, $\det X(t, t_0) = \det X(t_0, t_0) = 1$. Damit hat die Matrix $X(1, 0)$ die Determinante 1 und es existieren Eigenwerte μ_0 und μ_0^{-1}.
Das folgende Lemma äußerst sich zu den Eigenwerten μ_0 und μ_0^{-1} der Matrix $X(1, 0)$. Das Lemma, welches ein zentrales Resultat der *Floquet Theorie* darstellt, ergibt sich aus den Untersuchungen in [7] und stellt ein wesentliches Beweishilfsmittel dar.

Lemma 4.4. ([9],[23],[41])
Es sei der Koeffizient $b = b(t)$ eine 1-periodische, nicht konstante, glatte, und positive Funktion. Dann existiert ein positives λ_0 so, daß die entsprechende Matrix $X(1, 0)$ aus (4.15) Eigenwerte μ_0 und μ_0^{-1} mit $|\mu_0| > 1$ besitzt.

Bemerkung: Dieses Lemma sichert die Existenz *instabiler Lösungen*, das sind Lösungen, die für $t \to \infty$ nicht beschränkt bleiben. Erinnern wir uns an die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung $w_{tt} + \lambda w = 0$, dann wurde gezeigt, daß für $\lambda \leq 0$ *instabile Lösungen* existieren, wogegen für $\lambda > 0$ alle Lösungen *stabil* sind. Hat man aber $w_{tt} + \lambda b(t)^2 w = 0$ vorgelegt, dann existieren unter gewissen

Voraussetzungen positive Werte λ, die *instabile Lösungen* zulassen. Darin besteht die Kernaussage von Lemma 4.4.

Einige wenige Erklärungen zur Floquet-Theorie: (siehe z.B. [23])

• *Liouville-Transformation* Die Differentialgleichung $w_{tt} + \lambda b(t)^2 w = 0,\ b(t) > 0$, kann transformiert werden zu $y_{xx} + (\lambda\gamma^2 + Q(x))y = 0$. Dazu benötigen wir b sei zweimal differenzierbar. Alle weiteren Voraussetzungen aus Satz 4.6 seien erfüllt.

• Damit kann man zeigen, daß die Floquet-Theorie für $w_{tt} + \lambda b(t)^2 w = 0$ mit π-periodischem b äquivalent ist zur Floquet-Theorie für $y_{xx} + (\lambda\gamma^2 + Q(x))y = 0$ mit π-periodischem Q und $\int_0^\pi Q(x)dx = 0$.

• Die Funktion Q ist konstant dann und nur dann falls $b(t) = (\alpha t^2 + 2\beta t + \delta)^{-1}$.

• Wir betrachten jetzt *Hills Gleichung in Normalform* $y_{xx} + (\lambda\gamma^2 + Q(x))y = 0$ mit periodischem und zweimal differenzierbaren Q.

• *Satz über Oszillationen*
Es existieren zwei Folgen $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ und $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ mit $\lambda_0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots$ und folgenden Eigenschaften für die Lösungen:
Die Lösungen sind stabil in den Intervallen $(\lambda_0, \mu_1), (\mu_2, \lambda_1), (\lambda_2, \mu_3), (\mu_4, \lambda_3), \cdots$. An den Endpunkten der Intervalle sind die Lösungen im Allgemeinen instabil, das ist immer der Fall in λ_0. In den Intervallen (μ_1, μ_2), (λ_1, λ_2), (μ_3, μ_4) existieren instabile Lösungen.

• Stabilitätsintervalle bzw. Instabilitätsintervalle können niemals zu einem Punkt degenerieren.

• Das Instabilitätsintervall $(-\infty, \lambda_0]$ existiert immer. Nur diese Instabilitätsintervall existiert genau dann, wenn $Q(x)$ konstant ist.

2. Schritt: *Eine untere Schranke für die Energie*

Wir benutzen die Periodizität von b und den Eigenwert μ_0 von $X(1,0)$ zur Konstruktion einer Lösung von (4.14) mit vorgeschriebenen Werten für w auf einer diskreten Menge. Auf diese Weise erhalten wir untere Schranken für die Energie auf dieser Menge.

Lemma 4.5 *Es sei $w = w(t)$ eine Lösung von (4.14) mit $\lambda = \lambda_0$ und mit Cauchy-Daten $w(0) = 1,\ w_t(0) = b_{12}/(\mu_0 - b_{11})$. Dann erfüllt die Lösung für jedes positive ganzzahlige $M \in \mathbb{N}$ die Bedingung $w(M) = \mu_0^M$.*

Beweis: Als Lösung $w = w(t)$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} d_t w(M) \\ w(M) \end{pmatrix} = (X(1,0))^M \begin{pmatrix} d_t w(0) \\ w(0) \end{pmatrix} .$$

Die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \frac{b_{12}}{\mu_0 - b_{11}} & 1 \\ 1 & \frac{b_{21}}{\mu_0^{-1} - b_{22}} \end{pmatrix}$$

ist ein Diagonalisator für $X(1,0)$, d.h.,

$$X(1,0)B = B\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Diese wird gebildet aus Eigenvektoren von $X(1,0)$ zu den Eigenwerten μ_0 und μ_0^{-1}. Somit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} d_t w(M) \\ w(M) \end{pmatrix} = \mu_0^M \begin{pmatrix} \frac{b_{12}}{\mu_0 - b_{11}} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w(M) = \mu_0^M.$$

Damit ist der Beweis erbracht. □

3. Schritt: Konstruktion instabiler Lösungen

Wir konstruieren eine Familie von Lösungen $\{u_M\}$ für (4.11) zu einer gegebenen Familie von Daten $\{(\varphi_M, \psi_M)\}$. Diese Lösungen werden für große M nicht der Abschätzung (4.12) genügen. Deshalb nennen wir diese Lösungen *instabile Lösungen.* Mit einer abschneidenden Funktion $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$, wählen wir die Cauchy-Daten

$$\varphi_M(x) = e^{ix\cdot y}\chi(\tfrac{x}{M^2})\ , \quad \psi_M(x) = e^{ix\cdot y}\chi(\tfrac{x}{M^2})\frac{b_{12}}{\mu_0 - b_{11}}\ . \tag{4.17}$$

Dabei wählen wir y mit $|y|^2 = \lambda_0$. Nutzen wir qualitative Aussagen der strikt hyperbolischen Theorie dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u_M = u_M(t,x)$ für das Cauchy-Problem (4.11), (4.17). Die Lösungen u_M haben kompakten Träger für jedes gegebene $t \in [0,\infty)$. Es sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel mit dem Radius 1 um den Ursprung. Wir setzen die Gültigkeit der Bedingung (4.12) voraus. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_M(M,\cdot)\|_{L^q(B_1(0))} + \|\nabla_x u_M(M,\cdot)\|_{L^q(B_1(0))} &\leq \|\partial_t u(M,\cdot)\|_{L^q} + \|\nabla_x u(M,\cdot)\|_{L^q} \\ &\leq C\ f(M)\|e^{ix\cdot y}\chi(\tfrac{x}{M^2})\|_{H^{p,L}} \leq C_L\ f(M)\ M^{2n/p}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

4. Schritt: Die Rolle des Abhängigkeitsgebietes

Nach Satz 4.1 können wir die Existenz eines Abhängigkeitsgebietes voraussetzen. Damit ist die Lösung u_M in $B_1(0)$ zur Zeit $t = M$ darstellbar als

$$u_M(M,x) = e^{ix\cdot y}w(M)\ ,\ \partial_t\, u_M(M,x) = e^{ix\cdot y}w_t(M)\ , \tag{4.19}$$

wobei w aus Lemma 4.5 genommen wird. Um das zu verstehen berechnen wir für die Menge $\Big\{(x,t); |x| \leq 1, t = M\Big\}$ die untere Grundfläche auf $t = 0$ des rückwärts gerichteten Kegels mit der Steigung $\max\limits_{t\in[0,1]} b(t)$ und der Höhe M. Die Grundfläche ist für hinreichend große M in der Kugel

$$B_{\text{depend},M} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2M \max_{t\in[0,1]} b(t)\Big\}$$

in der Hyperebene $t = 0$ enthalten. Falls $x \in B_{\text{depend},M}$, dann gilt $|\frac{x}{M^2}| \le 1$ für große M. Folglich haben wir $\chi(\frac{x}{M^2}) = 1$ auf $B_{\text{depend},M}$ für große M.

Die Funktion $e^{ix\cdot y}w(t)$ löst (4.11) und nimmt auf $t = 0$ die Daten (4.17) an sofern $|x| \le M^2$ erfüllt ist. Die Eigenschaft des Abhängigkeitsgebietes liefert sofort (4.19).

5. Schritt: *Verifikation*

Die bisherigen Überlegungen implizieren

$$\|\partial_t u_M(M,\cdot)\|_{L^q(B_1(0))} + \|\nabla_x u_M(M,\cdot)\|_{L^q(B_1(0))} = (|w_t(M)| + \lambda_0^{1/2}|w(M)|)(\text{meas}B_1(0))^{1/q}.$$

Aus der vorausgesetzten Ungleichung (4.18) ergibt sich

$$|w(M)| + |w_t(M)| \le C_L\, f(M)M^{2n/p}$$

für alle großen M. Das steht aber im Widerspruch zur Aussage von Lemma 4.5. Damit ist die Aussage des Satzes 4.6 vollständig bewiesen. □

4.2.2 Verallgemeinerte Energieerhaltung

Ausgangspunkt der Untersuchungen sind die Aussagen der Sätze 2.4, 3.1, 3.5 und 4.6. Definieren wir die klassische Energie von Lösungen der Wellengleichung durch $E_W(u)(t)$ und von Lösungen der Klein-Gordon Gleichung durch $E_{KG}(u)(t)$ dann haben wir

$$\begin{aligned}
&E_W(u)(t) = E_W(u)(0) \quad \text{für Lösungen von} \quad u_{tt} - \triangle u = 0,\\
&E_{KG}(u)(t) = E_{KG}(u)(0) \quad \text{für Lösungen von} \quad u_{tt} - \triangle u + m^2 u = 0,\\
&E_W(u)(t) \le C(1+t)^{-1}E_{KG}(u)(0),\ m^2 = 1, \quad \text{für Lösungen von} \quad u_{tt} - \triangle u + u_t = 0.
\end{aligned}$$

Demgegenüber haben wir in Form von Satz 4.6 ein Beispiel für ein blow-up der Energie

$$\begin{aligned}
&E_W(u)(t = m) \ge C\ f(m)E_{KG}(u)(t = 0)\ ,\ f(m) \to \infty\ ,\ \log\ f(m) = o(m)\\
&\text{für}\ \ m \to \infty \quad \text{und für Lösungen von} \quad u_{tt} - b(t)^2 \triangle u = 0
\end{aligned}$$

kennengelernt.

Für allgemeinere Modelle sind Energieerhaltungen kaum zu erwarten. Man kann jedoch verallgemeinerte Energieerhaltungen definieren. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. *Scattering-Resultate*: Man vergleicht $E_W(u)(t)$ mit $E_W(v)(t)$, wobei v die klassische Wellengleichung $v_{tt} - \triangle v = 0$ und u eine allgemeinere Wellengleichung löst.

2. *Verallgemeinerte Energieerhaltung* wird über die Beziehung $E_W(u)(t) \sim E_W(u)(0)$ definiert, d.h. $C^{-1}E_W(u)(0) \leq E_W(u)(t) \leq C\, E_W(u)(0)$ mit einer geeigneten, von den Daten unabhängigen, Konstanten C. Damit ist jedes *Energie-decay und jedes blow-up der Energie* für $t \to \infty$ *ausgeschlossen.*

3. Beide Möglichkeiten lassen sich auch für $E_{KG}(u)(t)$ untersuchen.

4.2.3 Scattering-Resultate

Als Modell betrachten wir das Cauchy-Problem für die gedämpfte Wellengleichung

$$u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0\ ,\ \ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x)\ ,$$

und vergleichen die Lösung $u = u(t,x)$ mit der Lösung $v = v(t,x)$ des Cauchy-Problems

$$v_{tt} - \triangle v = 0\ ,\ \ v(0,x) = \tilde{\varphi}(x),\ v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x)\,.$$

Der Vergleich wird beschrieben mit Hilfe der Operatoren

$$\begin{aligned} S(t,s) &:= (u(s,\cdot), u_t(s,\cdot))^T \to (u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))^T, \\ S_0(t,s) &:= (v(s,\cdot), v_t(s,\cdot))^T \to (v(t,\cdot), v_t(t,\cdot))^T, \end{aligned}$$

die die Evolution der Lösungen u und v für $t, s \in \mathbb{R}$ beschreiben. Der Vektor $(u(s,\cdot),\ u_t(s,\cdot))$ wird im Energieraum $|D|^{-1}L^2 \times L^2$ betrachtet, d.h.

$$\begin{aligned} &\|(u(s,\cdot), u_t(s,\cdot))\|_E^2 = \|\,|D|u(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(s,\cdot)\|_{L^2}^2 = \|\nabla_x u(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(s,\cdot)\|_{L^2}^2, \\ &= 2E_W(u)(s) \text{ mit } \qquad |D|\, u = F^{-1}_{\xi\to x}(|\xi| F_{x\to\xi}(u)). \end{aligned}$$

Um ein Scattering-Resultat zu formulieren, benötigen wir den Operator $W_+ := \lim\limits_{t\to\infty} S_0(0,t)S(t,0)$.

Aufgabe 29 Was beschreibt dieser Operator?

Satz 4.7 *Vorgelegt seien die Cauchy-Probleme*

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0\ ,\ u(0,x) = \varphi(x)\ ,\ u_t(0,x) = \psi(x), \\ &v_{tt} - \triangle v = 0\,,\ v(0,x) = \tilde{\varphi}(x)\ ,\ v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x), \end{aligned}$$

mit $\int\limits_0^\infty |b(t)|dt < \infty$. *Dann gilt:*

- $\lim\limits_{t\to\infty} \|W_+ - S_0(0,t)S(t,0)\|_{L(E\to E)} = 0$,

- *der Operator* $W_+ \in L(E \to E) : (\varphi, \psi) \in E \to (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in E$ *ist ein Isomorphismus. Die Lösungen* u *und* v *zu den Daten* (φ, ψ) *und* $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ *erfüllen die a-priori Abschätzung*

$$\|(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)) - (v(t,\cdot), v_t(t,\cdot))\|_E \le C \, \|(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))\|_E \int_t^\infty b(\tau) d\tau,$$

wobei die Konstante C *nur von* $\|b\|_{L^1}$ *abhängt.*

Bemerkung: Für sehr große Zeiten t nähert sich $E_W(u)(t)$ immer mehr

$$E_W(v)(t) = E_W(v)(0) = \frac{1}{2} \, \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})\|_E = \frac{1}{2} \, \|W_+(\varphi, \psi)\|_E.$$

Beispiele für solche Dämpfungen $b = b(t)$:

$$b(t) = (1+t)^{-a}, \; b(t) = \frac{1}{(e^{[n]}+t)\log(e^{[n]}+t) \cdots \log^{[n]}(e^{[n]}+t)(\log^{[n]}(e^{[n]}+t))^a}$$

mit $a > 1$.

Bemerkung: Falls $a = 1$ in obigen Dämpfungen, dann ist $\int\limits_0^\infty b(t)dt = +\infty$ und obige Aussagen von Satz 4.7 nicht gültig (siehe Abschnitt 4.3).

4.2.4 A-priori Abschätzung für die Energie

Wir wenden uns jetzt dem Cauchy-Problem für die Wellengleichung mit zeitabhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$u_{tt} - a(t) \triangle u = 0 \,, \quad u(0,x) = \varphi(x) \,, \quad u_t(0,x) = \psi(x) \tag{4.20}$$

zu.

Satz 4.8 *Der Koeffizient* $a = a(t)$ *erfülle folgende Bedingungen:*

- $0 < C_1 \le a(t) \le C_2 \;, \quad a \in C^2[0,\infty) \;,$
- $|D_t^k a(t)| \le C_k \, \left(\frac{1}{t}\right)^k$ *für* $k = 1, 2,$ *und für große* t.

Dann gilt $E_W(u)(t) \le C \; E_W(u)(0)$*, wobei die Konstante* C *unabhängig von* φ *und* ψ *ist. Die Daten sind so gewählt, daß* $E_W(u)(0)$ *existiert.*

Beweisskizze: Der Beweis ist dem zu Satz 4.3 ähnlich. Wir skizzieren deshalb nur die Hauptschritte.

1. Schritt: Zonen

Wir unterteilen den erweiterten Phasenraum $\{(t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ in zwei Zonen, in die pseudodifferentielle Zone und die hyperbolische Zone

$$Z_{pd}(N) = \{(t,\xi) : |\xi|(t+e^3) \le N\}, \;\; Z_{hyp}(N) = \{(t,\xi) : |\xi|(t+e^3) \ge N\}.$$

Wir definieren die Funktion t_ξ durch $|\xi|(t_\xi + e^3) = N$. Die hyperbolische Zone $Z_{hyp}(N)$ besteht aus zwei Teilen $Z_{hyp}^{(1)}(N) := \{(t,\xi) \in [t_\xi,\infty) \times \{|\xi| \le p_0\}\}$ und $Z_{hyp}^{(2)}(N) := \{(t,\xi) \in [t_\xi,\infty) \times \{|\xi| \ge p_0\}\}$.

Frage: Dürfen wir uns jetzt auf große Frequenzen $\{\xi : |\xi| \ge M\}$ beschränken?

Antwort: Nein, im Gegensatz zu Regularitätsuntersuchungen müssen wir alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ untersuchen.

2. Schritt: Symbole

Zu gegebenen reellen Zahlen $m_1, \; m_2$ mit $m_2 \ge 0, \; r \le 2$, definieren wir die Symbolklassen

$$S_r\{m_1,m_2\} = \Big\{ d = d(t,\xi) \in L^\infty_{loc}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) :$$
$$|D_t^k D_\xi^\alpha d(t,\xi)| \le C_{k,\alpha} |\xi|^{m_1-|\alpha|} \Big(\frac{1}{t+e^3}\Big)^{m_2+k}, \; k \le r, \; (t,\xi) \in Z_{hyp}^{(1)}(N) \Big\}.$$

Entsprechende Symbolklassen definieren wir in $Z_{hyp}^{(2)}(N)$.

3. Schritt: Untersuchungen in der pseudodifferentiellen Zone

Mit $V = (|\xi| v, D_t v)^T$ erhalten wir

$$V(t,\xi) = E(t,0,\xi)V_0(\xi), \; E(t,0,\xi) = I + \sum_{k=1}^\infty \int_0^t A(t_1,\xi) \int_0^{t_1} A(t_2,\xi) \cdots \int_0^{t_{k-1}} A(t_k,\xi) dt_k \cdots$$
$$\text{mit} \quad A(t,\xi) := i \begin{pmatrix} 0 & |\xi| \\ a(t)|\xi| & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.6 *Für $t \in [0,t_\xi]$ erhalten wir*

$$|\xi| v(t,\xi) = E_{11}(t,0,\xi)|\xi| F(\varphi) + E_{12}(t,0,\xi) F(\psi),$$
$$D_t v(t,\xi) = E_{21}(t,0,\xi)|\xi| F(\varphi) + E_{22}(t,0,\xi) F(\psi), \quad |E_{kl}(t,0,\xi)| \le C_N.$$

4. Schritt: Durchführung von zwei Diagonalisierungsschritten

Wie im Schritt 4 im Beweis zu Satz 4.3 erhalten wir nach zwei Diagonalisierungsschritten in $Z_{hyp}^{(1)}(N)$

$$D_t V_1 - \mathcal{D} V_1 - R_1 V_1 = 0 \;, \;\; V_1(t_\xi,\xi) = V_{1,0}(\xi)$$

mit

$$\mathcal{D}(t,\xi) := \begin{pmatrix} -\sqrt{a(t)}|\xi| + \frac{D_t a(t)}{4a(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{a(t)}|\xi| + \frac{D_t a(t)}{4a(t)} \end{pmatrix}, \quad R_1 \in S_N\{-1,2\}.$$

5. Schritt: Lösungsdarstellung für das Cauchy-Problem in $Z^{(1)}_{hyp}(N)$
Auch hier können wir den Schritt 5 im Beweis zu Satz 4.3 nachvollziehen und erhalten mit den gewählten Transformationen die Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} V(t,\xi) &= M\, N_1(t,\xi) E_2(t,0,\xi) E_2(0,t_\xi,\xi) Q(t,t_\xi,\xi) \\ &\quad N_1(t_\xi,\xi)^{-1} M^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a(t_\xi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E(t_\xi,0,\xi) V_0(\xi). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Beweis von Satz 4.3 ist $Q = Q(t,s,\xi)$ eine Lösung von

$$D_t Q = H(t,s,\xi)Q,\ Q(s,s,\xi) = I \text{ mit } |H(t,s,\xi)| \le C \frac{1}{|\xi|(t+e^3)^2}. \tag{4.21}$$

Auf gleiche Weise können wir eine explizite Lösungsdarstellung in $Z^{(2)}_{hyp}(N)$ herleiten.

6. Schritt: Globale WKB-Lösungsdarstellungen
Die vorhergehenden Schritte implizieren sofort die folgenden WKB-Lösungen für das Cauchy-Problem

$$v_{tt} + a(t)|\xi|^2 v = 0\ ,\ \ v(0,\xi) = F(\varphi)(\xi)\ ,\ \ v_t(0,\xi) = F(\psi)(\xi).$$

Lemma 4.7 *Es gelten folgende WKB-Lösungsdarstellungen:*

$$\begin{aligned} |\xi| v(t,\xi) &= \sum_{k=1}^{2} b^{(1)}_{k1}(t,\xi) e^{(-1)^k i|\xi| \int_0^t \sqrt{a(s)}ds} |\xi| F(\varphi)(\xi) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2} b^{(1)}_{k2}(t,\xi) e^{(-1)^k i|\xi| \int_0^t \sqrt{a(s)}ds} F(\psi)(\xi); \\ D_t v(t,\xi) &= \sum_{k=1}^{2} b^{(2)}_{k1}(t,\xi) e^{(-1)^k i|\xi| \int_0^t \sqrt{a(s)}ds} |\xi| F(\varphi)(\xi) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2} b^{(2)}_{k2}(t,\xi) e^{(-1)^k i|\xi| \int_0^t \sqrt{a(s)}ds} F(\psi)(\xi). \end{aligned}$$

Die Amplituden $b^{(p)}_{kl}$ *erfüllen die Abschätzung* $|b^{(p)}_{kl}(t,\xi)| \le C$ *mit einer geeigneten Konstanten* C *für* $(t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

7. Schritt: Verifikation

Die Aussage von Lemma 4.7 liefert sofort

$$\begin{aligned} E_W(u)(t) &\leq C(\| \, |\cdot| v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|D_t v(t,\cdot)\|_{L^2}^2) \\ &\leq C(\| \, |\cdot| F(\varphi)(\cdot)\|_{L^2}^2 + \|F(\psi)(\cdot)\|_{L^2}^2) \\ &\leq C \, E_W(u)(0) \end{aligned}$$

mit einer von φ und ψ unabhängigen universellen Konstanten C. Damit ist die Aussage von Satz 4.8 bewiesen. □

Im Satz 4.8 haben wir $E_W(u)(t) \leq C \, E_W(u)(0)$ für $t \in [0,\infty)$ bewiesen. Bleibt noch, über die zweite Ungleichung $C^{-1}E_W(u)(0) \leq E_W(u)(t)$ nachzudenken. Wie weit sind wir von dieser Ungleichung entfernt? Es ist klar, daß wir uns auf die explizite Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} V(t,\xi) &= M \, N_1(t,\xi)E_2(t,0,\xi)E_2(0,t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi) \\ &\quad \times N_1(t_\xi,\xi)^{-1}M^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a(t_\xi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E(t_\xi,0,\xi)V_0(\xi) \end{aligned}$$

berufen werden. Aus den einzelnen Schritten zur Herleitung dieser expliziten Lösungsdarstllung wissen wir, daß viele der Matrizen invertierbar sind. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} E(t_\xi,0,\xi)V_0(\xi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{a(t_\xi)}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M N_1(t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi)^{-1}E_2(t_\xi,0,\xi) \\ &\quad \times E_2(0,t,\xi)N_1(t,\xi)^{-1}M^{-1}V(t,\xi). \end{aligned}$$

Aufgabe 30 Zeigen Sie die Invertierbarkeit von $Q(t,t_\xi,\xi)$.

Daraus folgt unmittelbar die Abschätzung $|V(t,\xi)| \geq C^{-1}|V(t_\xi,\xi)|$. Bleibt noch, $|V(t_\xi,\xi)| \geq C^{-1}|V_0(\xi)|$ nachzuweisen. Dann ergibt sich sofort $C^{-1}E_W(u)(0) \leq E_W(u)(t)$. Wenden wir uns noch einmal dem 3. Schritt des Beweises von Satz 4.8 zu. Dann ergibt sich sofort aus der eindeutigen Lösbarkeit des rückwärts gestellten Cauchy-Problems

$$D_t V = \begin{pmatrix} 0 & |\xi| \\ a(t)|\xi| & 0 \end{pmatrix} V, \; V(t = t_\xi,\xi) \text{ ist vorgegeben},$$

die a-priori Abschätzung $V_0(\xi) := V(t=0,\xi) \leq CV(t_\xi,\xi)$. Zusammenfassend haben wir somit folgende Aussage gezeigt:

Satz 4.9 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.8 gilt sogar $C^{-1}E_W(u)(0) \leq C \, E_W(u)(t)$ mit einer von φ und ψ unabhängigen Konstanten C. Damit liegt eine verallgemeinerte Energieerhaltung $C^{-1}E_W(u)(0) \leq C \, E_W(u)(t) \leq CE_W(u)(0)$ mit einer von φ und ψ unabhängigen Konstanten C vor.*

4.2.5 Höhere Regularität des Koeffizienten und verallgemeinerte Energieerhaltung

Wir wenden uns noch einmal dem Cauchy-Problem (4.20) zu. Im Abschnitt 4.2.4 haben wir Koeffizienten $a \in C^2[0,\infty)$ mit zusätzlichen Bedingungen zugelassen. Es ergibt sich folgende Frage:

Können wir aus einer zusätzlichen Regularität $a \in C^m[0,\infty)$, $m > 2$, *Vorteile erzielen?*

Zusätzliche Regularität erlaubt mehr Diagonalisierungsschritte, exakt m, in der hyperbolischen Zone. Führen wir diese aus, dann erhalten wir nach m Diagonalisierungsschritten ein System der Form

$$D_t V_{m-1} - \mathcal{D} V_{m-1} + F_{m-1} V_{m-1} + R_{m-1} V_{m-1} = 0\ ,\quad V_{m-1}(t_\xi,\xi) = V_{m-1,0}(\xi)$$

mit einer diagonalen Matrix $F_{m-1} \in S_1\{-1,2\}$ und einem Rest $R_{m-1} \in S_0\{-(m-1),m\}$. Verfolgen wir die Abschätzungstechniken, dann ergeben sich keine Vorteile, wir reproduzieren nur die Aussagen der Sätze 4.8 und 4.9.

In der Arbeit [13] wurde eine alte Idee aus der schwach hyperbolischen Theorie (vgl. z.B. mit dem Übersichtsartikel [8]) aufgefrischt. Durch Einführung einer zusätzlichen globalen Bedingung für den Koeffizienten $a = a(t)$ auf dem Intervall $[0,\infty)$ konnte gezeigt werden, daß eine höhere Regularitätsstufe $a \in C^m[0,\infty)$ Vorteile bringt. Der Verdienst der Arbeit [13] besteht im Finden dieser globalen Bedingung.

Diese globale Bedingung ist eine *Stabilisierungsbedingung* an den Koeffizienten, die wie folgt beschrieben wird:

$$\text{Es existiert ein } p \in [0,1) \text{ so, daß } \int_0^t |a(s) - a_\infty| ds \le Ct^p. \tag{4.22}$$

Dabei ist a_∞ eine geeignete positive Konstante. Es ist klar, daß die Bedingung (4.22) mit $p = 1$ für unseren Koeffizienten aus Satz 4.8 erfüllt ist, aber i.allg. nicht für $p < 1$.

Aufgabe 31 Finden Sie Koeffizienten, die der Bedingung (4.22) genügen. Dabei sollten die Koeffizienten natürlich ein oszillierendes Verhalten beibehalten.

In [13] ist folgendes Resultat bewiesen.

Satz 4.10 *Vorgelegt ist das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - a(t) \triangle u = 0\,,\quad u(0,x) = \varphi(x)\ ,\quad u_t(0,x) = \psi(x)$$

unter folgenden Voraussetzungen:
- $a \in C^m[0,\infty)$, $m \ge 2$, $a(t) \ge C > 0$,
- $|d_t^k a(t)| \le C_k (1+t)^{-kq}$ *für ein* $q \in [0,1]$ *und für* $k = 1, \cdots, m$,

• $\int_0^t |a(s) - a_\infty| ds \le Ct^p$ *für ein* $p \in [0,1]$,
• *die Anfangsenergie* $E_W(u)(0)$ *existiert.*

Falls $q \ge p - (p-1)/m$ *gilt* $E_W(u)(t) \le C E_W(u)(0)$.
Falls $q < p - (p-1)/m$ *gilt* $E_W(u)(t) \le C \exp(\nu t^{p-q-(p-1)/m}) E_W(u)(0)$ *mit einer positiven Konstanten* ν.
Falls $q < p - (p-1)/m$ *kann eine Abschätzung der Form* $E_W(u)(t) \le C \exp(\nu t^r) E_W(u)(0)$ *mit einer positiven Konstanten* ν *und mit* $r < p - q - (p-1)/m$ *nicht erwartet werden.*

Frage: Welche Aussagen beinhaltet dieser Satz?
Antwort: Falls $p = 1$, dann spielt m keine Rolle. Eine *stärkere Stabilisierung* benötigt ein *schwächeres decay der Ableitungen* und umgekehrt. Die Bedingung $q \ge p - (p-1)/m$ ist optimal für die verallgemeinerte Energieerhaltung in dem Sinne, daß für $q < p - (p-1)/m$ keine solche verallgemeinerte Energieerhaltung zu erwarten ist.

Aufgabe 32 Prüfen Sie, ob die Aussage von Satz 4.9 im Fall $q \ge p - (p-1)/m$ gilt.

Falls der Koeffizient $a \in C^\infty[0,\infty)$ ist, erhalten wir direkt aus Satz 4.10 die folgende Aussage:

Folgerung 4.1 *Vorgelegt ist das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - a(t) \triangle u = 0\,, \;\; u(0,x) = \varphi(x)\;, \;\; u_t(0,x) = \psi(x)$$

unter folgenden Voraussetzungen:
• $a \in C^\infty[0,\infty)$, $a(t) \ge C > 0$,
• $|d_t^k a(t)| \le C_k (1+t)^{-kq}$ *für ein* $q \in [0,1]$ *und für* $k \ge 1$,
• $\int_0^t |a(s) - a_\infty| ds \le Ct^p$ *für ein* $p \in [0,1]$,
• *die Anfangsenergie* $E_W(u)(0)$ *existiert.*

Falls $q > p$ *gilt* $E_W(u)(t) \le C E_W(u)(0)$.
Falls $q < p$ *gilt* $E_W(u)(t) \le C \exp(\nu t^{p-q}) E_W(u)(0)$ *mit einer positiven Konstanten* ν.
Falls $q < p$ *kann eine Abschätzung der Form* $E_W(u)(t) \le C \exp(\nu t^r) E_W(u)(0)$ *mit einer positiven Konstanten* ν *und mit* $r < p - q$ *nicht erwartet werden.*

Es soll nur die grundlegende Idee des Beweises zu Satz 4.10 vorgestellt werden.
Durch die Stabilisierungsbedingung (4.22) mit $p < 1$ *kann die pseudodifferentielle Zone* $Z_{pd}(N)$ *grösser gewählt werden. Sie wird im wesentlichen durch* $\{(t,\xi) : (t+e^3)^p |\xi| \le N\}$ *festgelegt. Damit ist die hyperbolische Zone kleiner, und es können Symbolklassen bzw. Symbolhierarchien eingeführt werden, in welchen die Matrizen* F_k *bzw.* R_k *nach jedem neuen Diagonalisierungsschritt in echt besseren (vom asymptotischen Verhalten aus gesehen) Symbolklassen liegen.*

4.3 Wellengleichungen mit zeitabhängiger Dämpfung

Zu Beginn dieses Abschnittes wollen wir noch einmal an das Resultat aus Satz 3.5 erinnern. Dazu definieren wir die totalen Energien

$$E_W(u)(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\nabla_x u(t,x)|^2 + |u_t(t,x)|^2\Big)dx,$$

dabei steht der Index W für Welle, und die Energie

$$E_{KG}(u)(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\nabla_x u(t,x)|^2 + |u_t(t,x)|^2 + m^2|u(t,x)|^2\Big)dx,\ m^2 > 0,$$

dabei steht der Index KG für Klein-Gordon. Dann läßt sich die Energieungleichung aus Satz 3.5 für Lösungen der klassisch gedämpften Wellengleichung in der Form

$$E_W(u)(t) \leq C(1+t)^{-1}E_{KG}(u)(0)$$

schreiben.

Wenden wir uns jetzt einem allgemeineren Fall zu. Die Resultate dieses Abschnittes sind den Arbeiten [34], [44], [45] und [46] entnommen.

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x), \tag{4.23}$$

wobei $b(t) \geq 0$ vorausgesetzt wird. Wie in Abschnitt 3.2.1 können wir zeigen, daß die Energie fällt, ohne zu wissen, ob sie gegen 0 strebt für t gegen ∞.

Frage: Welche Erwartungen an mögliche Resultate sollten wir haben?

Antwort:

• Falls der Dämpfungskoeffizient b einen kleinen Einfluß hat, d.h. $\int_0^\infty b(s)ds < \infty$, dann haben wir schon in Abschnitt 4.2.3 *Scattering-Resultate* erwähnt (siehe auch Abschnitt 4.3.5).

• Falls der Dämpfungskoeffizient einen etwas grösseren Einfluß besitzt, dann sollte die Energie gegen 0 streben, aber wahrscheinlich langsamer als für den im Abschnitt 3.2.3 diskutierten klassisch gedämpften Wellenfall. Solche Dämpfungen werden wir *nicht effektive Dämpfungen* nennen (siehe auch Abschnitt 4.3.2).

• Dann gibt es Dämpfungskoeffizienten, die sehr nah am klassisch gedämpften Wellenfall liegen. Solche Dämpfungen werden wir *effektive Dämpfungen* nennen (siehe auch Abschnitt 4.3.3).

• Schließlich müssen wir uns noch überlegen was passiert wenn der Dämpfungskoeffizient sehr stark in der Zeit wächst (siehe auch Abschnitt 4.3.4).

4.3.1 Ein Modellfall

Wir wenden uns einem Spezialfall von (4.23) zu, dem Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + \frac{\mu}{1+t} u_t = 0,\ \mu > 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x). \tag{4.24}$$

Wie in vielen ähnlichen Fällen ermöglicht die Existenz einer *Scaling-Eigenschaft* den Einsatz der Theorie *spezieller Funktionen.* Mit Hilfe von Besselfunktionen wurde in [44] folgende Abschätzung für den *Energie-Operator* $\mathbb{E}(t) : (\langle D\rangle\varphi, \psi) \in L^2 \to (u_t(t,\cdot), |D|u(t,\cdot)) \in L^2$ gezeigt:

Satz 4.11 *Der Energie-Operator* $\mathbb{E}$ *erfüllt die* $L^2 - L^2$ *Abschätzung*

$$\|\mathbb{E}(t)\|_{L^2\to L^2} \le C(1+t)^{\max\{-\frac{\mu}{2},-1\}}, \tag{4.25}$$

d.h. mit den oben eingeführten Bezeichnungen

$$E_W(u)(t) \le C(1+t)^{\max\{-\mu,-2\}} E_{KG}(u)(0).$$

Beweis: Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \triangle u + \frac{\mu}{1+t} u_t = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ D_t u(0,x) = \psi(x).$$

1. Schritt: Transformation auf die Besselsche Differentialgleichung

Nach Anwendung der partiellen Fouriertransformation erhalten wir

$$\hat{u}_{tt} + |\xi|^2 \hat{u} + \frac{\mu}{1+t} \hat{u}_t = 0,\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi),\ D_t \hat{u}(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi).$$

Wir substituieren $\tau := (1+t)|\xi|$ und erhalten

$$\hat{u}_{\tau\tau} + \frac{\mu}{\tau}\hat{u}_\tau + \hat{u} = 0.$$

Nach Einsetzen des Ansatzes $\hat{u}(\tau) = \tau^\rho w(\tau)$ in die letzte Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} &\tau^\rho w'' + 2\rho\tau^{\rho-1} w' + \rho(\rho-1)\tau^{\rho-2} w + \frac{\mu}{\tau}(\rho\tau^{\rho-1} w + \tau^\rho w') + \tau^\rho w \\ &= \tau^{\rho-2}(\tau^2 w'' + (2\rho+\mu)\tau w' + (\tau^2 + \rho(\rho-1+\mu))w). \end{aligned}$$

Wählen wir schließlich $2\rho + \mu = 1$, d.h. $\rho = -\frac{\mu-1}{2}$ und somit $\rho - 1 + \mu = -\rho$, so bekommen wir die Besselsche Differentialgleichung

$$\tau^2 w'' + \tau w' + (\tau^2 - \rho^2) w = 0.$$

Da wir $\mu > 0$ voraussetzen, liegt ρ in $(-\infty, +\frac{1}{2})$. Die Besselsche Differentialgleichung besitzt als System linear unabhängiger Lösungen die Hankel-Funktionen $H_\rho^+(\tau)$ und $H_\rho^-(\tau)$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösungsdarstellung

$$\hat{u}(\tau) = C_1 \tau^\rho H_\rho^+(\tau) + C_2 \tau^\rho H_\rho^-(\tau).$$

2. Schritt: Rücktransformation und allgemeine Lösungsdarstellung

Nach Rücktransformation erhalten wir als allgemeine Lösung

$$\hat{u}(t,\xi) = C_1(\xi)(1+t)^\rho |\xi|^\rho H_\rho^+((1+t)|\xi|) + C_2(\xi)(1+t)^\rho |\xi|^\rho H_\rho^-((1+t)|\xi|).$$

Wir sind interessiert an einer Lösungsdarstellung der Form $\hat{u}(t,\xi) = \Phi_1(t,0,\xi)\hat{\varphi}(\xi) + \Phi_2(t,0,\xi)\hat{\psi}(\xi)$, wobei die Multiplikatoren die Bedingungen $\Phi_1(0,0,\xi) = 1$, $D_t\Phi_1(0,0,\xi) = 0$, $\Phi_2(0,0,\xi) = 0$, $D_t\Phi_2(0,0,\xi) = 1$ erfüllen. Aus einer solchen Lösungsdarstellung ist sofort klar, daß $\hat{u}$ den beiden Anfangsbedingungen $\hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi)$ und $D_t\hat{u}(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi)$ genügt (vgl. mit der Konstruktion der Fundamentalmatrix).

Wir erhalten folgendes Bestimmungssystem für die gesuchten Koeffizienten $C_1(\xi)$ und $C_2(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(0,\xi) &= C_1(\xi)|\xi|^\rho H_\rho^+(|\xi|) + C_2(\xi)|\xi|^\rho H_\rho^-(|\xi|) = \hat{\varphi}(\xi),\\
D_t\hat{u}(0,\xi) &= C_1(\xi) D_t\Big((1+t)^\rho|\xi|^\rho H_\rho^+((1+t)|\xi|)\Big)\,|_{t=0}\\
&\quad + C_2(\xi) D_t\Big((1+t)^\rho|\xi|^\rho H_\rho^-((1+t)|\xi|)\Big)\,|_{t=0} = \hat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

Die Ableitungen von $H_\rho^\pm$ wertet man mit Hilfe der *Rekurrenzformeln* $\rho H_\rho^\pm(z) + z\frac{d}{dz}H_\rho^\pm(z) = zH_{\rho-1}^\pm(z)$ aus. Mit Hilfe geradliniger Berechnungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t,0,\xi) &= \frac{i\pi}{4}\,|\xi|(1+t)^\rho \begin{vmatrix} H_{\rho-1}^-(|\xi|) & H_\rho^-((1+t)|\xi|) \\ H_{\rho-1}^+(|\xi|) & H_\rho^+((1+t)|\xi|) \end{vmatrix},\\
\Phi_2(t,0,\xi) &= \frac{\pi}{4}\,(1+t)^\rho \begin{vmatrix} H_\rho^-(|\xi|) & H_\rho^-((1+t)|\xi|) \\ H_\rho^+(|\xi|) & H_\rho^+((1+t)|\xi|) \end{vmatrix},\\
D_t\Phi_1(t,0,\xi) &= \frac{\pi}{4}\,|\xi|^2(1+t)^\rho \begin{vmatrix} H_{\rho-1}^-(|\xi|) & H_{\rho-1}^-((1+t)|\xi|) \\ H_{\rho-1}^+(|\xi|) & H_{\rho-1}^+((1+t)|\xi|) \end{vmatrix},\\
D_t\Phi_2(t,0,\xi) &= \frac{i\pi}{4}\,(1+t)^\rho \begin{vmatrix} H_\rho^-(|\xi|) & H_{\rho-1}^-((1+t)|\xi|) \\ H_\rho^+(|\xi|) & H_{\rho-1}^+((1+t)|\xi|) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Schritt: Verhalten eines Model-Multiplikators

Schauen wir uns die Struktur von Φ_l, $D_t\Phi_l$ für $l = 1,2$, an, dann erscheint ein Studium des Model-Multiplikators

$$\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi) = |\xi|^k \begin{vmatrix} H_\rho^-(|\xi|) & H_{\rho+\delta}^-((1+t)|\xi|) \\ H_\rho^+(|\xi|) & H_{\rho+\delta}^+((1+t)|\xi|) \end{vmatrix}$$

angebracht, da

$$\Phi_1(t,0,\xi) = \frac{i\pi}{4}(1+t)^\rho \Psi_{1,\rho-1,1}(t,\xi),\ \Phi_2(t,0,\xi) = \frac{\pi}{4}(1+t)^\rho \Psi_{0,\rho,0}(t,\xi),$$
$$D_t\Phi_1(t,0,\xi) = \frac{\pi}{4}(1+t)^\rho \Psi_{2,\rho-1,0}(t,\xi),\ D_t\Phi_2(t,0,\xi) = \frac{i\pi}{4}\ (1+t)^\rho \Psi_{1,\rho,-1}(t,\xi).$$

Unser Ziel ist es, $\|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)}$ abzuschätzen.
Frage: Warum ist eine Abschätzung von $\|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)}$ für unsere Zielstellung ausreichend?
Dazu benötigen wir eine *Zoneneinteilung des erweiterten Phasenraums* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n_\xi$:

$$Z_1 := \{|\xi| \geq K\}\ ,\ \ Z_2 := \{|\xi| \leq K \leq (1+t)|\xi|\}\ ,\ \ Z_3 := \{(1+t)|\xi| \leq K\},$$

wobei K eine positive, wenn notwendig große, Konstante ist.

Abschätzung in Z_1:

Wir benötigen folgende Eigenschaft der Hankel-Funktionen $H^\pm_\rho(\tau)$ für große Argumente τ:
Für $\tau \geq K$ gilt $H^\pm_\rho(\tau) = e^{\pm i\tau}a^\pm_\rho(\tau)$ mit $|a^\pm_\rho(\tau)| \leq C_K\tau^{-\frac{1}{2}}$.
Mit dieser Eigenschaft schlußfolgern wir

$$|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi)| \leq C_K|\xi|^{k-1}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für alle} \quad (t,\xi) \in [0,\infty) \times \{|\xi| \geq K\}.$$

Abschätzung in Z_2:

Wir benötigen zusätzlich folgende Eigenschaft der Hankel-Funktionen $H^\pm_\rho(\tau)$ für kleine Argumente τ:
Für $0 < \tau \leq c < 1$ haben wir $|H^\pm_\rho(\tau)| \leq -C\log\tau$ für $\rho = 0$, $|H^\pm_\rho(\tau)| \leq C\tau^{-|\rho|}$ für $\rho \neq 0$.
Damit schlußfolgern wir

$$|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi)| \leq C_K\ |\xi|^{k-|\rho|-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{für} \quad \rho \neq 0,$$
$$|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi)| \leq C_K\ |\xi|^{k-\frac{1}{2}}\log\frac{2K}{|\xi|}(1+t)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{für} \quad \rho = 0.$$

Abschätzung in Z_3:

Hier benutzen wir die Darstellung $H^\pm_\rho(\tau) = J_\rho(\tau) \pm iY_\rho(\tau)$, wobei $J_\rho(\tau)$ die Bessel-Funktionen 1. Art der Ordnung ρ und $Y_\rho(\tau)$ die Weber-Funktionen der Ordnung ρ bezeichnen. Diese sind definiert für nicht ganzzahlige ρ durch

$$Y_\rho(z) \ = \ \frac{J_\rho(z)\cos(\rho\pi) - J_{-\rho}(z)}{\sin(\rho\pi)}.$$

Für den Fall, daß ρ und $\rho+\delta$ nicht ganzzahlig sind gilt

$$\begin{aligned}&H_\rho^-(|\xi|)H_{\rho+\delta}^+((1+t)|\xi|)-H_\rho^+(|\xi|)H_{\rho+\delta}^-((1+t)|\xi|)\\&\quad=2i\Big(J_\rho(|\xi|)Y_{\rho+\delta}((1+t)|\xi|)-Y_\rho(|\xi|)J_{\rho+\delta}((1+t)|\xi|)\Big).\end{aligned}$$

Wir sind nur an den Fällen $\delta=0,\ \delta=\pm1$ interessiert. In diesen kann man zeigen, daß

$$\begin{aligned}&J_\rho(|\xi|)Y_{\rho+\delta}((1+t)|\xi|)-Y_\rho(|\xi|)J_{\rho+\delta}((1+t)|\xi|)\\&\quad\sim J_\rho(|\xi|)J_{-(\rho+\delta)}((1+t)|\xi|)-J_{-\rho}(|\xi|)J_{\rho+\delta}((1+t)|\xi|)\end{aligned}$$

gilt. Beachten wir schließlich $J_\rho(\tau)\le c\,\tau^\rho$, dann ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi)| &\le C_K\,|\xi|^k\Big(|\xi|^\rho((1+t)|\xi|)^{-(\rho+\delta)}+|\xi|^{-\rho}((1+t)|\xi|)^{\rho+\delta}\Big)\\&\le C_K\,|\xi|^k\Big(|\xi|^{-\delta}(1+t)^{-(\rho+\delta)}+|\xi|^\delta(1+t)^{(\rho+\delta)}\Big)\\&\le C_K\,((1+t)|\xi|)^{k-\delta}(1+t)^{-\rho-k}+C_K((1+t)|\xi|)^{k+\delta}(1+t)^{\rho-k}.\end{aligned}$$

Lemma 4.8 *Unter den Voraussetzungen $k\ge|\delta|,\ \delta=0$ oder $\delta=\pm1,\ \rho$ ist nicht ganzzahlig, gilt in der Zone Z_3 die Abschätzung*

$$|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi)|\le C_K\,(1+t)^{|\rho|-k}.$$

Durch entsprechende Untersuchungen kann man folgende Aussage zeigen:

Lemma 4.9 *Ersetzen wir in den Voraussetzungen von Lemma 4.8 die Bedingung, ρ ist nicht ganzzahlig, durch, ρ ist ganzzahlig, dann gilt in der Zone Z_3 die Abschätzung*

$$|\Psi_{k,\rho,\delta}(t,\xi)|\le\begin{cases}C_K\,(1+t)^{|\rho|-k},\ \rho\ne0,\\ C_K\,(1+t)^{-k}\log(e+t),\ \rho=0.\end{cases}$$

4. Schritt: *Verhalten unserer Multiplikatoren*

Wir bekommen mit den Aussagen der Lemmata 4.8 und 4.9 und den Abschätzungen in Z_1 und Z_2

$$|\Phi_1(t,0,\xi)|\lesssim(1+t)^\rho|\Psi_{1,\rho-1,1}(t,\xi)|\lesssim\begin{cases}(1+t)^{\rho-\frac12} & \text{in } Z_1,\\ |\xi|^{\frac12-|\rho-1|}(1+t)^{-\frac12+\rho} & \text{in } Z_2,\\ (1+t)^{\rho-1+|\rho-1|} & \text{in } Z_3.\end{cases}$$

Wegen $\rho<\frac12$ bzw. $\frac12-|\rho-1|<0$ können wir in Z_2 die Zoneneigenschaft $|\xi|^{-1}\le K(1+t)$ benutzen und bekommen damit $|\xi|^{\frac12-|\rho-1|}(1+t)^{-\frac12+\rho}\lesssim(1+t)^{|\rho-1|-1+\rho}$. Insgesamt ergibt sich somit $|\Phi_1(t,0,\xi)|\lesssim1$.

Analog erhalten wir

$$|\Phi_2(t,0,\xi)| \lesssim (1+t)^\rho |\Psi_{0,\rho,0}(t,\xi)| \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2}} & \text{in } Z_1, \\ (1+t)^{2\rho} & \text{in } Z_2 \cup Z_3,\ \rho \in (0,\frac{1}{2}), \\ \log(e+t) & \text{in } Z_2 \cup Z_3,\ \rho = 0, \\ 1 & \text{in } Z_2 \cup Z_3,\ \rho < 0. \end{cases}$$

Damit wird eine Abschätzung von $|\Phi_2(t,0,\xi)|$ durch die Abschätzungen in $Z_2 \cup Z_3$ bestimmt. Für $|D_t\Phi_1(t,0,\xi)|$ schlußfolgern wir

$$|D_t\Phi_1(t,0,\xi)| \lesssim \begin{cases} |\xi|(1+t)^{-\frac{1}{2}+\rho} & \text{in } Z_1, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}+\rho} & \text{in } Z_2 \cup Z_3. \end{cases}$$

Schließlich ergibt sich für $|D_t\Phi_2(t,0,\xi)|$ die Abschätzung

$$|D_t\Phi_2(t,0,\xi)| \lesssim (1+t)^{\max\{\rho-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}}.$$

5. Schritt: Abschätzung der Energieterme

Auszuwerten haben wir

$$\begin{aligned} |\xi|\hat{u}(t,\xi) &= \Phi_1(t,0,\xi)|\xi|\hat{\varphi}(\xi) + \Phi_2(t,0,\xi)|\xi|\hat{\psi}(\xi), \\ D_t\hat{u}(t,\xi) &= D_t\Phi_1(t,0,\xi)\hat{\varphi}(\xi) + D_t\Phi_2(t,0,\xi)\hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Für die zweite Beziehung erhalten wir sofort mit den Abschätzungen aus dem 4. Schritt

$$|D_t\hat{u}(t,\xi)| \le C\langle\xi\rangle(1+t)^{-\frac{1}{2}+\rho}|\hat{\varphi}(\xi)| + C(1+t)^{\max\{\rho-\frac{1}{2},-1\}}|\hat{\psi}(\xi)|.$$

Daraus folgt

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} \le C(1+t)^{\rho-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1} + C(1+t)^{\max\{\rho-\frac{1}{2},-1\}}\|\psi\|_{L^2}.$$

Die erste Beziehung erklärt, daß wir anstelle von $|\Phi_k(t,0,\xi)|$, $k=1,2$, den Term $|\xi||\Phi_k(t,0,\xi)|$, $k=1,2$, abschätzen müssen. Die Vorgehensweise aus dem 4.Schritt liefert

$$|\xi||\Phi_2(t,0,\xi)| \lesssim (1+t)^\rho|\Psi_{1,\rho,0}(t,\xi)| \lesssim (1+t)^{\max\{\rho-\frac{1}{2},-1\}}.$$

Für $|\xi||\Phi_1(t,0,\xi)|$ verwenden wir in Z_1 die Abschätzung aus dem 4.Schritt, in $Z_2 \cup Z_3$ nutzen wir aber die Existenz von $|\xi|$, die dann ein zusätzliches decay liefert. Wir können dann schlußfolgern

$$|\xi||\Phi_1(t,0,\xi)| \lesssim (1+t)^\rho|\Psi_{2,\rho-1,1}(t,\xi)| \lesssim (1+t)^{\rho-\frac{1}{2}}\langle\xi\rangle.$$

Das liefert sofort

$$\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{\rho-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{H^1} + C(1+t)^{\max\{\rho-\frac{1}{2},-1\}}\|\psi\|_{L^2}.$$

6. Schritt: Verifikation

Wir erhalten sofort mit $\rho - \frac{1}{2} = -\frac{\mu}{2}$

$$E_W(u)(t) \leq C(1+t)^{\max(-\mu,2)} E_{KG}(u)(0).$$

Damit ist der Beweis erbracht. □

Bemerkung: Mit den gewonnenen Abschätzungen erhalten wir folgende Beziehung für die Lösung $u = u(t,x)$:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C\|\varphi\|_{L^2} + C\|\psi\|_{H^{-1}} \begin{cases} (1+t)^{2\rho}, & \rho \in (0, \frac{1}{2}), \\ \log(e+t), & \rho = 0, \\ 1, & \rho < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 33 Versuchen Sie, diese Beziehung herzuleiten.

Beispiel: Wenden wir uns der Abschätzung für $\mu = 2$ zu. Wählen wir die Transformation $v(t,x) = (1+t)u(t,x)$, dann wird (4.24) in die Gleichung $\Box v = 0$ überführt. Für diese haben wir trivialerweise $E_W(v)(t) \leq CE_{KG}(v)(0)$. Nach Rücktransformation erhalten wir sofort das Resultat aus Satz 4.11 wenn wir noch in Betracht ziehen, daß sich $\|v(t,\cdot)\|_{L^2}$ wie $O(1+t)$ verhält.

Bemerkung: Die Norm des Energie-Operators aus Satz 4.11 ist nur abhängig von μ für $\mu \leq 2$. Ist μ sehr klein, dann ist das decay schwach, so sind die Dämpfungen als eher *nicht effektiv* einzuordnen (vgl. mit Abschnitt 4.3.2). Ist $\mu > 2$, dann erhalten wir ein von μ unabhängiges decay. Jetzt sind die Dämpfungen als eher *effektiv* einzuordnen (vgl. mit Abschnitt 4.3.3). Der Fall $\mu = 2$ stellt einen kritischen Fall dar.

Aufgabe 34 Welche anderen Modelle besitzen eine Scaling-Eigenschaft, und lassen sich deshalb mit der Theorie spezieller Funktionen auswerten?

Merke: Fixieren wir Daten $\varphi \in H^1$ and $\psi \in L^2$, dann kann man mit den Methoden aus [14] sogar beweisen, daß $\lim_{t\to\infty}(1+t)^2 E_W(u)(t) = 0$ für $\mu > 2$ gilt.

Aufgabe 35 Machen Sie sich den Unterschied zwischen der letzen Bemerkung und der Aussage von Satz 4.11 klar.

4.3.2 Nicht effektive Dämpfungen

Nicht effektive Dämpfungen werden nach [34] und [45] durch folgende Voraussetzungen beschrieben:
(A1) $\int_0^t b(\tau)d\tau = \infty$;
(A2) $b'(t) < 0$;
(A3) $b^2(t) \leq -Cb'(t)$;
(A4) $\limsup_{t\to\infty} tb(t) < 1$.

Die Bedingung (A4) entspricht dem Ausnahmefall $\mu = 1$ bzw. $\rho = 0$ in Lemma 4.9 (Auftreten des log-Terms).

Satz 4.12 *Unter den Voraussetzungen (A1) bis (A4) erfüllt der Energie-Operator $\mathbb{E}(t)$ die Abschätzung*

$$\|\mathbb{E}(t)\|_{L^2\to L^2} \leq C\lambda(t)^{-1},\ \lambda(t) = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t b(s)ds\Big), \tag{4.26}$$

d.h. mit den oben eingeführten Bezeichnungen

$$E_W(u)(t) \leq C\lambda(t)^{-2}E_{KG}(u)(0).$$

Beweis: Wie schon gewohnt transformieren wir $u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0$ nach partieller Fouriertransformation in das System erster Ordnung

$$D_tV = \begin{pmatrix} 0 & |\xi| \\ |\xi| & i\,b(t) \end{pmatrix} V.$$

Diese Transformation wird nur ausgeführt, um die Definition der Zonen zu verstehen.

1. Schritt: Definition der Zonen

Die Definition der Zonen beruht auf der Beziehung $Nb(t_\xi) = |\xi|$. Hier wird die strenge Monotonie von b ausgenutzt. Dann definieren wir die *dissipative Zone* $Z_{\text{diss}}(N) = \{(t,\xi) : 0 \leq t \leq t_\xi\}$. In dieser Zone ist der Term $ib(t)$ der bestimmende in obiger Matrix. Außerdem definieren wir die *hyperbolische Zone* $Z_{\text{hyp}}(N) = \{(t,\xi) : t \geq t_\xi\}$. In dieser Zone ist der Term $|\xi|$ der bestimmende in obiger Matrix.

2. Schritt: Definition der Mikroenergien

In der dissipativen Zone verwenden wir die Mikroenergie $V = \big(\frac{N}{1+t}v, D_tv\big)^T$, in der hyperbolischen Zone verwenden wir die hyperbolische Mikroenergie $V = (|\xi|v, D_tv)^T$, dabei ist v eine Lösung von $v_{tt} + |\xi|^2v + b(t)v_t = 0$.

3. Schritt: Einige wichtige Beziehungen

- Unter der Voraussetzung (A3) gilt $t \le C \int\limits_0^t \frac{-b'(s)}{b^2(s)}\,ds \;=\; C\Big(\frac{1}{b(t)} - \frac{1}{b(0)}\Big)$, folglich bleibt $tb(t)$ beschränkt.
- Unter den Voraussetzungen (A1) und (A4) gilt für die Hilfsfunktion $\lambda = \lambda(t)$ aus (4.26) die Beziehung

  $$\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \sim \frac{t}{\lambda^2(t)}.$$

  Dabei ist die Funktion $\frac{t}{\lambda^2(t)}$ streng monoton wachsend und strebt für $t \to \infty$ gegen ∞.

Beweis: Partielle Integration liefert

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} = \frac{t}{\lambda^2(t)} + \int_0^t \frac{\tau b(\tau)}{\lambda^2(\tau)} d\tau.$$

Nutzen wir $tb(t) \le c < 1$ für $t \ge t_0,\ t_0$ ist eventuell groß, dann ergibt sich für das letzte Integral

$$\int_0^t \frac{\tau b(\tau)}{\lambda^2(\tau)} d\tau \le C + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\lambda^2(\tau)} d\tau \le C + c \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)}.$$

Mit $c < 1$ folgt sofort die behauptete Äquivalenz. Die Monotonie folgt aus

$$\frac{d}{dt}\frac{t}{\lambda^2(t)} = \frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)} > 0 \quad \text{für große } t. \qquad \square$$

4. Schritt: Abschätzung der Fundamentallösung in der dissipativen Zone

Erinnern wir uns an die Mikroenergie $V = \big(\frac{N}{1+t}v, D_t v\big)^T$ und an $D_t^2 v - |\xi|^2 v - ib(t)D_t v = 0$, dann ergibt sich

$$D_t V = \begin{pmatrix} \frac{i}{1+t} & \frac{N}{1+t} \\ \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} & ib(t) \end{pmatrix} V, \qquad V(0,\xi) = V_0(\xi).$$

Wir sind interessiert an einer Abschätzung für die Fundamentallösung $X = X(t,s,\xi)$, das ist die Lösung von

$$D_t X = \begin{pmatrix} \frac{i}{1+t} & \frac{N}{1+t} \\ \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} & ib(t) \end{pmatrix} X, \qquad X(s,s,\xi) = I.$$

Lemma 4.10 *Unter den Voraussetzungen (A1), (A2) und (A4) gilt*

$$\|X(t,s,\xi)\| \le C\,\frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} \qquad \textit{für alle} \qquad 0 \le s \le t \le t_\xi.$$

Beweis: Für die Elemente X_{11} und X_{21} der Matrix X bekommen wir

$$D_t X_{11} = \frac{i}{1+t} X_{11} + \frac{N}{1+t} X_{21}, \quad D_t X_{21} = \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} X_{11} + ib(t) X_{21},$$

und mit $X_{11}(s,s,\xi) = 1$, $X_{21}(s,s,\xi) = 0$ folgt daraus

$$X_{11}(t,s,\xi) = \frac{1+s}{1+t} + i\frac{N}{1+t}\int_s^t X_{21}(\tau,s,\xi)d\tau,$$
$$X_{21}(t,s,\xi) = i\frac{|\xi|^2}{N\lambda^2(t)}\int_s^t (1+\tau)\lambda^2(\tau) X_{11}(\tau,s,\xi)d\tau.$$

Multiplizieren wir nun beide Gleichungen mit $\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}$, so ergibt sich

$$\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} X_{11}(t,s,\xi) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}\ \frac{1+s}{1+t} + i\frac{N\lambda^2(t)}{1+t}\int_s^t \frac{1}{\lambda^2(\tau)}\left(\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)} X_{21}(\tau,s,\xi)\right) d\tau,$$
$$\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} X_{21}(t,s,\xi) = i\frac{|\xi|^2}{N}\int_s^t (1+\tau)\left(\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)} X_{11}(\tau,s,\xi)\right) d\tau.$$

Setzen wir jetzt die erste Gleichung in die zweite ein, dann erhalten wir folgende Volterrasche Integralgleichung 2. Art für $y(t,s,\xi) := \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} X_{21}(t,s,\xi)$:

$$y(t,s,\xi) = i\ \frac{|\xi|^2}{N}\int_s^t (1+s)\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)}\ d\tau - |\xi|^2 \int_s^t \lambda^2(\tau)\int_s^\tau \frac{1}{\lambda^2(\theta)}\ y(\theta,s,\xi)d\theta\ d\tau\ .$$

Wir können jetzt die gleiche Prozedur wie bei den Matrizant-Abschätzungen anwenden. Zur Abschätzung von $|y(t,s,\xi)|$ benötigen wir

$$|\xi|^2 \int_s^t \lambda^2(\tau)\int_s^\tau \frac{1}{\lambda^2(\theta)}\ d\theta\ d\tau \sim |\xi|^2 \int_s^t (1+\tau)d\tau$$
$$\leq C|\xi|^2(1+t)^2 \leq C_N b(t)^2(1+t)^2 \leq C_N,$$

hier wurde die zweite Beziehung aus dem 3. Schritt, die Zonendefinition $|\xi| \leq Nb(t)$ und die Voraussetzung (A4) verwendet. Nach dieser gilt $|\xi|(1+t) \leq Nb(t)(1+t) \leq C_N$. Außerdem benötigen wir die Monotonieeigenschaft von $t/\lambda^2(t)$ und schlußfolgern

$$|\xi|^2 \int_s^t (1+s)\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)}d\tau \leq |\xi|^2 \int_s^t (1+\tau)d\tau \leq C_N.$$

Insgesamt folgt damit $|y(t,s,\xi)| \leq C_N$ bzw. $|X_{21}(t,s,\xi)| \leq C_N \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}$.

Setzen wir diese Beziehung in die Gleichung für X_{11} ein, dann ergibt sich unmittelbar

$$|X_{11}(t,s,\xi)| \le C_N \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}.$$

Aufgabe 36 Zeigen Sie die Beziehung

$$|X_{12}(t,s,\xi)| + |X_{22}(t,s,\xi)| \le C_N \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}.$$

Damit ist die Aussage vollständig bewiesen. □

5. Schritt: Abschätzung der Fundamentallösung in der hyperbolischen Zone
Unter Verwendung der üblichen hyperbolischen Mikroenergie starten wir von

$$D_t V = \begin{pmatrix} 0 & |\xi| \\ |\xi| & ib(t) \end{pmatrix} V.$$

Wie schon in den Abschnitten 4.1.3 und 4.2.4 dargestellt, führen wir die ersten beiden Diagonalisierungsschritte aus und erhalten das System

$$(D_t - \mathcal{D}(\xi) - F_0(t) - R_1(t,\xi))V_1 = 0$$

mit

$$\mathcal{D}(\xi) = \begin{pmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & -|\xi| \end{pmatrix}, \quad F_0(t) = \frac{ib(t)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$R_1(t,\xi) = -N_1(t,\xi)^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{b^2(t)}{8|\xi|} & \frac{b'(t)}{4|\xi|} \\ -\frac{b'(t)}{4|\xi|} & \frac{b^2(t)}{8|\xi|} \end{pmatrix}.$$

Damit benötigen wir nur die Existenz einer Ableitung von b. Natürlich gilt $\|N_1(t,\xi)^{-1}\| \le C_N$. Benutzen wir die Voraussetzung (A3), dann kann der Rest R_1 wie folgt abgeschätzt werden

$$\|R_1(t,\xi)\| \le -C\frac{b'(t)}{|\xi|}.$$

Die Fundamentallösung $X_1(t,s,\xi)$, die

$$(D_t - \mathcal{D}(\xi) - F_0(t) - R_1(t,\xi))X_1(t,s,\xi) = 0, \; X_1(s,s,\xi) = I,$$

genügt, wird wie üblich in der Form $X_1(t,s,\xi) = E_2(t,s,\xi)Q(t,s,\xi)$ bestimmt. Führen wir die gewohnten Schritte aus und nutzen

$$\int_{t_\xi}^{t} \|R_1(s,\xi)\|ds \le \int_{t_\xi}^{\infty} \|R_1(s,\xi)\|ds \le C\int_{t_\xi}^{\infty} -\frac{b'(s)}{|\xi|}\,ds \le C\,\frac{b(t_\xi)}{|\xi|} = C_N$$

dann folgt sofort

Lemma 4.11 *Unter den Voraussetzungen (A1), (A2) und (A3) gilt*

$$\|X_1(t,s,\xi)\| \le C\,\frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \quad \textit{für alle } t_\xi \le s \le t.$$

6. Schritt: Verifikation

Nutzen wir $|\xi||v| = \frac{|\xi|(1+t)}{1+t}|v| \le C_N \frac{|v|}{1+t}$, dann ergibt sich aus Lemma 4.10 sofort

$$|(|\xi|v, D_t v)(t,\xi)| \le \frac{C}{\lambda^2(t)}|(v, D_t v)(0,\xi)| \quad \text{für } 0 \le t \le t_\xi.$$

Aus Lemma 4.11 ergibt sich

$$|V_1(t,\xi)| \le C\frac{\lambda(t_\xi)}{\lambda(t)}|V_1(t_\xi,\xi)|,$$

und nach Rücktransformation folgt daraus

$$|(|\xi|v, D_t v)(t,\xi)| \le C\frac{\lambda(t_\xi)}{\lambda(t)}|(|\xi|v, D_t v)(t_\xi,\xi)|.$$

Beide Ungleichungen ergeben zusammen

$$|(|\xi|v, D_t v)(t,\xi)| \le \frac{C}{\lambda(t)}|(v, |\xi|v, D_t v)(0,\xi)| \quad \text{für } t \ge 0.$$

Das impliziert (4.26) bzw. $E_W(u)(t) \le C\lambda(t)^{-2}E_{KG}(u)(0)$. □

Merke: Das *Energie-decay* ergibt sich aus dem Verhalten der Amplituden in der *hyperbolischen Zone*. In der dissipativen Zone haben wir ein besseres decay.

Bemerkung: Wegen der Voraussetzung (A4) erhalten wir aus (4.26) die Abschätzung (4.25) nur für $\mu < 1$. Die Funktion λ^{-1} kann beliebig langsam gegen 0 streben wie folgendes Beispiel zeigt:
$b(t) = \frac{\mu}{(e^{[n]}+t)\log(e^{[n]}+t)\cdots\log^{[n]}(e^{[n]}+t)}$ liefert $\lambda(t) = (\log^{[n]}(e^{[n]}+t))^{\mu/2}$.
Mit $\log^{[n]}$ bezeichnen wir die n-malige Anwendung von log, mit $e^{[n]}$ bezeichnen wir die n-malige Anwendung von e hoch.

4.3.3 Effektive Dämpfungen

Effektive Dämpfungen werden nach [34] und [46] durch folgende Voraussetzungen beschrieben:

(B1) $b(t) > 0$;
(B2) b ist monoton;
(B3) $|b'(t)| = o(b^2(t))$ für $t \to \infty$;
(B4) $|d_t^k b(t)| \le C_k b(t)(\frac{1}{1+t})^k,\ k = 1,2.$

Falls $b = b(t)$ monoton fallend ist, dann kann b nicht zu schnell gegen 0 streben. Es gilt
(B3)' $tb(t) \to \infty$ für $t \to \infty$.
Das folgt aus

$$\frac{-b'}{b^2} = o(1) \text{ und damit } o(t) = \int_0^t \frac{-b'(s)}{b^2(s)} ds = \frac{1}{b(t)} - \frac{1}{b(0)}.$$

Satz 4.13 *Unter den Voraussetzungen (B1) bis (B4) erfüllt der Energie-Operator* $\mathbb{E}(t)$ *die Abschätzung*

$$\|\mathbb{E}(t)\|_{L^2 \to L^2} \le C\Big(1 + \int_0^t b(s)^{-1} ds\Big)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.27}$$

d.h. mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$E_W(u)(t) \le C\Big(1 + \int_0^t b(s)^{-1} ds\Big)^{-1} E_{KG}(u)(0).$$

Bemerkung: Falls $b^{-1} \in L^1(0,\infty)$, dann erhalten wir aus der Abschätzung (4.27) *kein decay* obwohl der Dämpfungskoeffizient $b = b(t)$ sehr stark in t anwachsen darf (siehe Abschnitt 4.3.4).

Beweis von Satz 4.13: Durch Einführung einer neuen Funktion $w(t,x) = \lambda(t)u(t,x)$ mit $\lambda(t) = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t b(\tau)d\tau\Big)$ wird die Gleichung $u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0$ transformiert zu

$$\Box w = \lambda''(t)u + 2\lambda'(t)u_t + \lambda(t)u_{tt} - \lambda(t) \triangle u = \Big(\frac{1}{4}\, b^2(t) + \frac{1}{2}\, b'(t)\Big)w.$$

Nach partieller Fouriertransformation $v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(w)(t,\xi)$ erhalten wir

$$v_{tt} + m(t,\xi)v = 0 \qquad \text{mit} \qquad m(t,\xi) = |\xi|^2 - \frac{1}{4}\, b^2(t) - \frac{1}{2}\, b'(t).$$

Jetzt wird die Voraussetzung (B3) wirksam. Nach dieser können wir den Term $b'(t)$ vernachlässigen und sollten $|\xi|^2 - \frac{1}{4}b^2(t)$ analysieren. Dazu führen wir die Separationskurve

$$\Gamma_{sep} := \{(t,\xi) : |\xi| = \frac{1}{2}\, b(t)\}$$

ein. Die Monotonievoraussetzung (B2) sichert, daß jede Gerade $\{(t,\xi) : |\xi| = \text{const}\}$ die Kurve Γ höchstens in einem Punkt schneidet.

1. Schritt: Definition von Regionen

Durch die Separationskurve wird der erweiterte Phasenraum in zwei Regionen, in die *hyperbolische Region* $R_{\text{hyp}} = \{(t,\xi) : |\xi| > \frac{1}{2}\, b(t)\}$ und in die *elliptische Region* $R_{\text{ell}} = \{(t,\xi) : |\xi| < \frac{1}{2}\, b(t)\}$ unterteilt. Die Gestalt der Regionen hängt sehr von der Dämpfung ab. Für eine *schwache effektive Dämpfung* ($b'(t) < 0$ in (B2)) "überwiegt" die hyperbolische Region. Für eine *starke effektive Dämpfung* ($b'(t) > 0$ in (B2)) "überwiegt" die elliptische Region.

Aufgabe 37 Machen Sie sich für $b'(t) < 0$, $b'(t) = 0$, $b'(t) > 0$ die beiden Regionen klar. Führen Sie die obigen Transformationen für den Modellfall $u_{tt} - \triangle u + \frac{\mu}{1+t}\, u_t = 0$ aus. Für welche μ entsteht eine elliptische Region?

2. Schritt: Definition von Zonen

Beide Regionen werden in Zonen eingeteilt. Zur Beschreibung dieser benötigen wir die Bezeichnung $\langle\xi\rangle_{b(t)} := \sqrt{\left||\xi|^2 - \frac{b^2(t)}{4}\right|}$. Dann definieren wir

die reduzierte Zone $Z_{\text{red}}(\varepsilon) = \{(t,\xi) : \langle\xi\rangle_{b(t)} \le \varepsilon\, \frac{b(t)}{2}\}$, $\varepsilon > 0$ ist geeignet gewählt;
die dissipative Zone $Z_{\text{diss}}(c_0) = \{(t,\xi) : (1+t)|\xi| \le c_0\}$, $c_0 > 0$ ist geeignet gewählt;
die hyperbolische Zone $Z_{\text{hyp}}(\varepsilon) = \{(t,\xi) : \langle\xi\rangle_{b(t)} \ge \varepsilon\, \frac{b(t)}{2}\} \cap R_{\text{hyp}}$;
die elliptische Zone $Z_{\text{ell}}(c_0,\varepsilon) = \{(t,\xi) : (1+t)|\xi| \ge c_0\} \cap \{\langle\xi\rangle_{b(t)} \ge \varepsilon\, \frac{b(t)}{2}\} \cap R_{\text{ell}}$.

3. Schritt: Abschätzung der Fundamentallösung in der reduzierten Zone

In dieser Zone führen wir die Mikroenergie $V = (\varepsilon\frac{b(t)}{2} v, D_t v)^T$ ein. Mit $D_t^2 v - m(t,\xi)v = 0$ ergibt sich dann

$$D_t V \;=\; \begin{pmatrix} \frac{D_t b(t)}{b(t)} & \varepsilon\,\frac{b(t)}{2} \\ \frac{|\xi|^2 - \frac{1}{4}\,b^2(t) - \frac{1}{2}\,b'(t)}{\varepsilon\,\frac{b(t)}{2}} & 0 \end{pmatrix} V.$$

Wählen wir die Definition der reduzierten Zone und die Voraussetzung (B3), dann erhalten wir die Abschätzungen:

- $\left|\dfrac{D_t b(t)}{b(t)}\right| \;=\; o(b(t)),$
- $\left||\xi|^2 - \dfrac{1}{4}\,b^2(t) - \dfrac{1}{2}b'(t)\right| \le \varepsilon^2 \dfrac{b(t)^2}{4} \;+\; o(b(t)^2).$

Damit erhalten wir für $t \ge t_0 = t_0(\varepsilon)$ die Abschätzung der Norm der Koeffizientenmatrix durch $\varepsilon\, b(t)$. Die entsprechende Fundamentallösung

$$X_{\text{red}} = X_{\text{red}}(t,s,\xi),\; t \ge s \ge t_0(\varepsilon),\; (t,\xi),(s,\xi) \in Z_{\text{red}}(\varepsilon)$$

läßt sich mit dem Matrizanten wie folgt abschätzen:

Lemma 4.12 *Unter den Voraussetzungen (B1) bis (B3) erhalten wir die Abschätzung*

$$\|X_{\text{red}}(t,s,\xi)\| \le \exp\left(\varepsilon \int_0^t b(\tau)d\tau\right)$$

für $t \ge s \ge t_0(\varepsilon),\ (t,\xi),\ (s,\xi) \in Z_{\text{red}}(\varepsilon)$.

Beachte: Wir haben eine kompakte Menge $\{(t,\xi) \in Z_{\text{red}}(\varepsilon) : t \le t_0(\varepsilon)\}$ herausgelassen. Das ist für Abschätzungen der Fundamentallösung unwesentlich.

4. Schritt: Abschätzungen der Fundamentallösung in der dissipativen Zone
Wir gehen vor wie im Beweis von Lemma 4.10.

Lemma 4.13 *Unter den Voraussetzungen (B1) und (B3) gilt die Abschätzung*

$$\|X_{\text{diss}}(t,s,\xi)\| \ \le\ C_N\, \frac{1+s}{1+t} \qquad \text{für} \quad 0 \le s \le t \le t_\xi.$$

Beweis: Wie im Beweis zum Lemma 4.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} X_{11}(t,s,\xi) &= \frac{1+s}{1+t} + i\,\frac{N}{1+t}\int_s^t X_{21}(\tau,s,\xi)d\tau, \\ X_{21}(t,s,\xi) &= i\,\frac{|\xi|^2}{N\,\lambda^2(t)}\int_s^t (1+\tau)\lambda^2(\tau)\, X_{11}(\tau,s,\xi)d\tau. \end{aligned}$$

Setzen wir die zweite Integralgleichung in die erste ein, dann bekommen wir

$$\frac{1+t}{1+s}\, X_{11}(t,s,\xi) = 1 - |\xi|^2 \int_s^t \int_s^\tau \underbrace{\frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2(\tau)}}_{\le 1}\ \frac{1+\theta}{1+s}\, X_{11}(\theta,s,\xi)d\theta d\tau.$$

Für $y = y(t,s,\xi) := X_{11}(t,s,\xi)(1+t)/(1+s)$ schlußfolgern wir

$$|y(t,s,\xi)| \le 1 + |\xi|^2 \int_s^t \int_s^\tau |y(\theta,s,\xi)|d\theta d\tau.$$

Daraus folgt $|y(t,s,\xi)| \le C$, da $|\xi|^2 \frac{(1+t)^2}{2} \le \frac{c_0^2}{2}$ mit der Definition der dissipativen Zone. Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\frac{1+t}{1+s}$ dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{1+s}\,|X_{21}(t,s,\xi)| &\le \frac{|\xi|^2(1+t)}{N\,\lambda^2(t)} \int_s^t \lambda^2(\tau) \left|\frac{1+\tau}{1+s}\, X_{11}(\tau,s,\xi)\right| d\tau \\ &\le C_N|\xi|^2 \int_s^t \lambda^2(\tau)d\tau\, \frac{1+t}{\lambda^2(t)}. \end{aligned}$$

Nun nutzen wir die Voraussetzung (B3). Mit dieser verifizieren wir das monotone Fallen von $\frac{t}{\lambda^2(t)}$ für große t. Somit schlußfolgern wir

$$C_N|\xi|^2 \int_s^t \lambda^2(\tau)d\tau \,\frac{1+t}{\lambda^2(t)} \le C_N|\xi|^2 \int_s^t (1+\tau)\,\frac{\lambda^2(\tau)}{1+\tau}\,\frac{1+t}{\lambda^2(t)} d\tau \le C_N|\xi|^2(1+t)^2 \le C_N.$$

Aufgabe 38 Zeigen Sie die Beziehung

$$|X_{12}(t,s,\xi)| + |X_{22}(t,s,\xi)| \le C_N\,\frac{1+s}{1+t}.$$

Damit ist die Aussage vollständig bewiesen. $\square$

5. Schritt: Abschätzung der Fundamentallösung in der hyperbolischen Zone
Wir definieren die Mikroenergie $V = (\langle\xi\rangle_{b(t)}v,\ D_t v)^T$ zur transformierten Gleichung $v_{tt} + (|\xi|^2 - \frac{1}{4}b'(t) - \frac{1}{2}b'(t))v = 0$. Es ergibt sich

$$D_t V \;-\; \begin{pmatrix} 0 & \langle\xi\rangle_{b(t)} \\ \langle\xi\rangle_{b(t)} & 0 \end{pmatrix} V \;-\; \begin{pmatrix} \frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}} & 0 \\ \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} & 0 \end{pmatrix} V = 0.$$

Ein einfacher Diagonalisierungsschritt $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} V^{(0)}$ überführt obiges System in

$$D_t V^{(0)} - \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle_{b(t)} & 0 \\ 0 & -\langle\xi\rangle_{b(t)} \end{pmatrix} V^{(0)} \;-\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}} + \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} & \frac{-D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}} - \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} \\ \frac{-D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}} + \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} & \frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}} - \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} \end{pmatrix} V^{(0)} = 0.$$

Jetzt führen wir die übliche Konstruktion der Fundamentallösung $X_{\rm hyp}(t,s,\xi)$ wie in Abschnitt 4.2.4 (5. Schritt) aus. Die erste Matrix hat wegen der Hyperbolizität des Problems keinen Einfluß. Zur Konstruktion von Q mit Hilfe des Matrizanten benötigen wir die Integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}}\right| dt = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}}\right| = \log\frac{\langle\xi\rangle_{b(t_2)}}{\langle\xi\rangle_{b(t_1)}}$$

für alle $(t_1,\xi),\ (t_2,\xi) \in Z_{\rm hyp}(\varepsilon)$. Dabei benutzten wir die Monotonie von $b = b(t)$. In der hyperbolischen Zone gilt $\langle\xi\rangle_{b(t)} \sim |\xi|$, d.h. $C_1|\xi| \le \langle\xi\rangle_{b(t)} \le C_2|\xi|$ für alle $(t,\xi) \in Z_{\rm hyp}(\varepsilon)$. Somit ist obiges Integral gleichmäßig beschränkt. Für das zweite Integral erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{b'(t)}{\langle\xi\rangle_{b(t)}}\right| dt = \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{db(t)}{\sqrt{|\xi|^2 - \frac{b^2(t)}{4}}}\right| = \left|\arcsin\frac{b(t_2)}{|\xi|} - \arcsin\frac{b(t_1)}{|\xi|}\right|.$$

Da in der hyperbolischen Region R_{hyp} die Beziehung $|\xi| > \frac{b(t)}{2}$ erfüllt ist, folgt auch die gleichmäßige Beschränktheit für alle $(t_1, \xi), (t_2, \xi) \in Z_{\text{hyp}}(\varepsilon)$. Damit ist $Q = Q(t, s, \xi)$ in $Z_{\text{hyp}}(\varepsilon)$ beschränkt und wir erhalten folgende Aussage:

Lemma 4.14 *Unter den Voraussetzungen (B1) und (B2) gilt in $Z_{\text{hyp}}(\varepsilon)$ die Abschätzung*

$$\|X_{\text{hyp}}(t, s, \xi)\| \le C$$

für jedes $(t, \xi), (s, \xi) \in Z_{\text{hyp}}(\varepsilon)$, wobei C unabhängig von t, s und ξ ist.

6. Schritt: Abschätzung der Fundamentallösung in der elliptischen Zone

Wir führen die Mikroenergie $V = (\langle\xi\rangle_{b(t)} v, D_t v)^T$ ein. Mit $D_t^2 v - m(t, \xi)v = 0$ ergibt sich dann

$$D_t V - \begin{pmatrix} 0 & \langle\xi\rangle_{b(t)} \\ -\langle\xi\rangle_{b(t)} & 0 \end{pmatrix} V - \begin{pmatrix} \frac{D_t \langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(t)}} & 0 \\ -\frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} & 0 \end{pmatrix} V = 0.$$

Wir führen zwei Diagonalisierungsschritte in dieser Zone aus. Dazu benötigen wir u.a.die Voraussetzung (B4). Das Durchführen von Diagonalisierungsschritten benötigt Symbolklassen. In [33] und [45] sind die folgenden eingeführt.

Definition 4.2 *Die Amplituden $a = a(t, \xi)$ gehören zur elliptischen Symbolklasse $S^{l_1, l_2}_{\text{ell},\varepsilon}\{m_1, m_2, m_3\}$ beschränkter Glattheit (l_1, l_2) falls*

$$|D_t^k D_\xi^\alpha a(t, \xi)| \le C_{k,\alpha} \langle\xi\rangle_{b(t)}^{m_1 - |\alpha|} |\xi|^{m_2} \Big(\frac{1}{1+t}\Big)^{m_3 + k}$$

für alle $(t, \xi) \in Z_{\text{ell}}(c_0, \varepsilon)$ und für alle $k \le l_1$ and $|\alpha| \le l_2$ gilt.

Setzen wir $V =: M\, V^{(0)}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ergibt sich nach dem ersten Diagonalisierungsschritt

$$D_t V^{(0)} - \mathcal{D}(t, \xi) V^{(0)} - R(t, \xi) V^{(0)} = 0 \qquad \text{mit}$$

$$\mathcal{D}(t, \xi) = \begin{pmatrix} -i\langle\xi\rangle_{b(t)} & 0 \\ 0 & i\langle\xi\rangle_{b(t)} \end{pmatrix} \in S^{l,\infty}_{\text{ell},\varepsilon}\{1, 0, 0\},$$

$$R(t, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} - i\,\frac{b'(t)}{4\langle\xi\rangle_{b(t)}} & -\frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} + i\,\frac{b'(t)}{4\langle\xi\rangle_{b(t)}} \\ -\frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} - i\,\frac{b'(t)}{4\langle\xi\rangle_{b(t)}} & \frac{D_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} + i\,\frac{b'(t)}{4\langle\xi\rangle_{b(t)}} \end{pmatrix} \in S^{l,\infty}_{\text{ell},\varepsilon}\{0, 0, 1\}.$$

In der Matrix $F_0(t, \xi) = \operatorname{diag} R(t, \xi)$ stimmen die Elemente der Hauptdiagonale nicht überein. Deshalb müssen wir uns Gedanken über die Differenz $\delta = \delta(t, \xi)$ der Glieder von $\mathcal{D} + F_0$ machen. Diese fließt in den nächsten Diagonalisierungsschritt ein. Es gilt für t hinreichend groß unter Verwendung der Voraussetzung (B3) die Beziehung

$$i\,\delta(t,\xi) = 2\langle\xi\rangle_{b(t)} + \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} \;\sim\; \langle\xi\rangle_{b(t)}.$$

Außerdem gehört δ^{-1} zur Symbolklasse $S^{l,\infty}_{\mathrm{ell},\varepsilon}\{-1,0,0\}$. Für große $t \geq t_0$ kann jetzt der zweite Diagonalisierungsschritt wie üblich ausgeführt werden. Beachtet man noch, daß Symbole von $S^{l,\infty}_{\mathrm{ell},\varepsilon}\{-1,0,2\}$ integrierbar sind über die elliptische Zone, dann ergibt sich wie schon in anderen Fällen

$$(D_t - \mathcal{D}(t,\xi) - R(t,\xi))N_1(t,\xi) = N_1(t,\xi)(D_t - \mathcal{D}(t,\xi) - F_0(t,\xi) - R_1(t,\xi)).$$

Die Matrix R_1 gehört zur Symbolklasse $S^{l,\infty}_{\mathrm{ell},\varepsilon}\{-1,0,2\}$. Nach (B4) dürfen wir nur zwei Diagonalisierungsschritte ausführen. Unser Ziel ist es jetzt, eine Darstellung für die Fundamentallösung $X_1 = X_1(t,s,\xi)$ des transformierten Systems $(D_t - \mathcal{D}(t,\xi) - F_0(t,\xi) - R_1(t,\xi))V_1 = 0$ herzuleiten. Wir können nicht der üblichen Prozedur folgen, da jetzt in $\mathcal{D}$ nicht reelle Elemente vorliegen. Wir können uns deshalb nicht auf *hyperbolische WKB-Analysis* stützen, sondern müssen eine *elliptische WKB-Analysis* entwickeln. Dazu benötigen wir folgende Beziehung:

$$\frac{\sqrt{\langle\xi\rangle_{b(t)}b(t) \;+\; \langle\xi\rangle^2_{b(t)}}}{\sqrt{\langle\xi\rangle_{b(s)}b(s) \;+\; \langle\xi\rangle^2_{b(s)}}} \;\sim\; \frac{b(t)}{b(s)} \;\sim\; \frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}}$$

gleichmäßig in $Z_{\mathrm{ell}}(c_0,\varepsilon) \cap \{t \geq t_0\}$.

Lemma 4.15 *Unter den Voraussetzungen (B1) bis (B4) hat die Fundamentallösung $X_1 = X_1(t,s,\xi)$ die Darstellung*

$$X_1(t,s,\xi) = \frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}} \exp\Big(\int_s^t \langle\xi\rangle_{b(\tau)}d\tau\Big)Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)$$

für alle $(t,\xi),(s,\xi) \in Z_{\mathrm{ell}}(c_0,\varepsilon) \cap \{t \geq t_0\}, t \geq s$, und mit einer gleichmäßig beschränkten Matrix $Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)$.

Beweis: Wir transformieren das System für $X_1 = X_1(t,s,\xi)$, das heißt

$$(D_t - \mathcal{D}(t,\xi) - F_0(t,\xi) - R_1(t,\xi))X_1 = 0,\;\; X_1(s,s,\xi) = I,$$

in eine Integralgleichung für $Q_{\mathrm{ell},1} = Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)$. Differenzieren wir

$$\exp\Big(-i\int_s^t (D(\tau,\xi) + F_0(\tau,\xi))d\tau\Big)X_1(t,s,\xi)$$

bezüglich t, dann liefert die Diagonalstruktur von $D+F_0$ sofort

$$D_t\Big(\exp\Big(-i\int_s^t \mathcal{D}(\tau,\xi)+F_0(\tau,\xi))d\tau\Big)X_1(t,s,\xi)\Big)$$
$$=\exp\Big(-i\int_s^t \mathcal{D}(\tau,\xi)+F_0(\tau,\xi))d\tau\Big)R_1(t,\xi)X_1(t,s,\xi).$$

Integrieren wir die letzte Beziehung über $[s,t]$, dann ergibt sich

$$X_1(t,s,\xi)=\exp\Big(i\int_s^t \mathcal{D}(\tau,\xi)+F_0(\tau,\xi))d\tau\Big)X_1(s,s,\xi)$$
$$+i\int_s^t \exp\Big(i\int_\theta^t (\mathcal{D}(\tau,\xi)+F_0(\tau,\xi))d\tau\Big)R_1(\theta,\xi)X_1(\theta,s,\xi)d\theta.$$

Beachten wir die Struktur von $\mathcal{D}=\mathcal{D}(t,\xi)$, dann erkennen wir das "schlechte Verhalten" von $\exp\,(i\int\limits_s^t\cdots d\tau)$. Um dieses schlechte Verhalten kompensieren zu können, führen wir ein Gewicht $w=w(t,\xi)$ ein und setzen

$$Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)=\exp\Big(-\int_s^t w(\tau,\xi)d\tau\Big)X_1(t,s,\xi).$$

Multiplikation der letzten Beziehung mit diesem gewichteten Term ergibt

$$Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)=\exp\Big(\int_s^t (i\mathcal{D}(\tau,\xi)+i\,F_0(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)I)d\tau\Big)$$
$$+\int_s^t \exp\Big(\int_\theta^t (i\mathcal{D}(\tau,\xi)+i\,F_0(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)I)d\tau\Big)R_1(\theta,\xi)Q_{\mathrm{ell},1}(\theta,s,\xi)d\theta.$$

Die Matrix R_1 ist integrierbar über die elliptische Zone. Die Elemente von $i\,D(t,\xi)+i\,F_0(t,\xi)$ sind gegeben durch

$$\langle\xi\rangle_{b(t)}+\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}+\frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}\quad,\quad -\langle\xi\rangle_{b(t)}+\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}-\frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}\,.$$

Der erste Term dominiert den zweiten, deshalb wählen wir das Gewicht

$$w(t,\xi)\;=\;\langle\xi\rangle_{b(t)}+\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}+\frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}\,.$$

Bleibt noch auszuwerten

$$\int_s^t\Big(\frac{\partial_\tau\langle\xi\rangle_{b(\tau)}}{2\langle\xi\rangle_{b(\tau)}}+\frac{b'(\tau)}{2\langle\xi\rangle_{b(\tau)}}\Big)d\tau=\frac{1}{2}\,\log\,\frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}b(t)+\langle\xi\rangle^2_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}b(s)+\langle\xi\rangle^2_{b(s)}}\,.$$

Die rechte Seite ist äquivalent zu $\log(\langle\xi\rangle_{b(t)}/\langle\xi\rangle_{b(s)})$. Damit folgt

$$X_1(t,s,\xi) \sim \frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}} \exp\Big(\int_s^t \langle\xi\rangle_{b(\tau)} d\tau\Big) Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi).$$

Das ist die zu beweisende Aussage. □

Merke: Die zweite Zeile von $Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)$ erfüllt in der elliptischen Zone die Abschätzung

$$|Q^{(21)}_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)| \ + \ |Q^{(22)}_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)| \ \lesssim \frac{b(s)}{b(t)} \ \exp(-2\int_s^t \langle\xi\rangle_{b(\tau)} d\tau) \ \lesssim \ \frac{b(s)}{b(t)} \ \frac{(1+s)}{(1+t)} \ .$$

Die erste Zeile von $Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)$ erfüllt nur

$$|Q^{(11)}_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)| \ + \ |Q^{(12)}_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)| \ \lesssim \ 1 \ .$$

Wenden wir die Rücktransformation aus dem zweiten Diagonalisierungsschritt an, dann erhalten wir das gleiche Verhalten der ersten und zweiten Zeile von

$$Q_{\mathrm{ell},0}(t,s,\xi) \ = \ N_1(t,\xi) \ Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi) N_1^{-1}(s,\xi).$$

Die erste Zeile bleibt beschränkt, die zweite fällt wie $S^{(0,0)}_{\mathrm{ell},\varepsilon}\{-1,0,1\}$.

7. Schritt: Beziehungen zum Energie-Operator

In den vergangenen Schritten haben wir die Fundamentallösung geeigneter Systeme in den verschiedenen Zonen abgeschätzt.

Reduzierte Zone: In dieser Zone haben wir $X_{\mathrm{red}}(t,s,\xi)$ abgeschätzt. Für die Abschätzung des Energie-Operators benötigen wir die Darstellung von $U = U(t,\xi) := (|\xi|\hat{u}(t,\xi), D_t\hat{u}(t,\xi))^T$. Es gilt

$$\begin{aligned} U(t,\xi) &= T(t,\xi)V(t,\xi) = T(t,\xi)X_{\mathrm{red}}(t,s,\xi)V(s,\xi) \\ &= T(t,\xi)X_{\mathrm{red}}(t,s,\xi)T(s,\xi)^{-1}U(s,\xi) \\ &\text{mit } T(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{|\xi|}{\varepsilon\frac{b(t)}{2}\lambda(t)} & 0 \\ \frac{2i}{\varepsilon\lambda(t)} & \frac{1}{\lambda(t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nutzen wir die Zonendefinition, dann folgt sofort $\|T(t,\xi)\| \leq \lambda(t)^{-1}$.

Dissipative Zone:

In dieser Zone haben wir $X_{\text{diss}}(t,s,\xi)$ abgeschätzt. Für die Abschätzung des Energie-Operators benötigen wir die Darstellung von $U = U(t,\xi) := (\frac{c_0}{1+t}\hat{u}(t,\xi), D_t\hat{u}(t,\xi))^T$. Es gilt

$$U(t,\xi) = X_{\text{diss}}(t,s,\xi)U(s,\xi) \text{ und } U(t,\xi) = T(t,\xi)V(t,\xi)$$
$$\text{mit } T(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{(1+t)\langle\xi\rangle_{b(t)}\lambda(t)} & 0 \\ \frac{ib(t)}{\langle\xi\rangle_{b(t)}\lambda(t)} & \frac{1}{\lambda(t)} \end{pmatrix} \quad \text{und } V(t,\xi) = (\langle\xi\rangle_{b(t)}v, D_t v)^T.$$

Hyperbolische Zone:

In dieser Zone haben wir $X_{\text{hyp}}(t,s,\xi)$ abgeschätzt. Für die Abschätzung des Energie-Operators benötigen wir die Darstellung von $U = U(t,\xi) := (|\xi|\hat{u}(t,\xi), D_t\hat{u}(t,\xi))^T$. Es gilt

$$U(t,\xi) = T(t,\xi)V(t,\xi) = T(t,\xi)X_{\text{hyp}}(t,s,\xi)T(s,\xi)^{-1}U(s,\xi)$$
$$\text{mit } T(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{|\xi|}{\langle\xi\rangle_{b(t)}\lambda(t)} & 0 \\ \frac{ib(t)}{\langle\xi\rangle_{b(t)}\lambda(t)} & \frac{1}{\lambda(t)} \end{pmatrix}.$$

Elliptische Zone:

In dieser Zone haben wir die Fundamentallösung $X_1 = X_1(t,s,\xi)$ abgeschätzt. Bezeichnen wir die Fundamentallösung von $D_t - \mathcal{D} - R$ mit $X_0 = X_0(t,s,\xi)$, dann ergibt sich sofort die Abschätzung

$$|X_0(t,s,\xi)| \lesssim \frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}} \exp\Big(\int_s^t \langle\xi\rangle_{b(\tau)}d\tau\Big)|Q_{\text{ell},0}(t,s,\xi)|.$$

Mit den gleichen Bezeichnungen wie bei der Behandlung der hyperbolischen Zone erhalten wir

$$U(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{|\xi|}{\langle\xi\rangle_{b(t)}\lambda(t)} & 0 \\ \frac{ib(t)}{\langle\xi\rangle_{b(t)}\lambda(t)} & \frac{1}{\lambda(t)} \end{pmatrix} MX_0(t,s,\xi)M^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\langle\xi\rangle_{b(s)}\lambda(s)}{|\xi|} & 0 \\ \frac{-ib(s)\lambda(s)}{|\xi|} & \lambda(s) \end{pmatrix} U(s,\xi).$$

Benutzen wir die Definitionen von M und M^{-1} und die Äquivalenz $\langle\xi\rangle_{b(t)} \sim b(t)$ in der elliptischen Zone, dann ergibt sich sofort $U(t,\xi) = X_{\text{ell}}(t,s,\xi)U(s,\xi)$ mit

$$(|X_{\text{ell}}^{(kl)}(t,s,\xi)|)_{k,l=1}^2 \le C\exp\Big(\int_s^t (\langle\xi\rangle_{b(\tau)} - b(\tau))d\tau\Big)\begin{pmatrix} |\xi| & |\xi| \\ b(t) & b(t) \end{pmatrix}|Q_{\text{ell},0}(t,s,\xi)|\begin{pmatrix} \frac{1}{|\xi|} & \frac{1}{b(s)} \\ \frac{1}{|\xi|} & \frac{1}{b(s)} \end{pmatrix}$$
$$\le C\exp\Big(\int_s^t (\langle\xi\rangle_{b(\tau)} - b(\tau))d\tau\Big)\begin{pmatrix} 1 & \frac{|\xi|}{b(s)} \\ \frac{b(t)}{|\xi|} & \frac{b(t)}{b(s)} \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigen wir jetzt noch die Beziehung

$$\exp\Big(\int_s^t (\langle\xi\rangle_{b(\tau)} - b(\tau))d\tau\Big) \leq C\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big)$$

dann ergibt sich

$$(|X_{\text{ell}}^{(kl)}(t,s,\xi)|)_{k,l=1}^2 \leq C\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big)\begin{pmatrix} 1 & \frac{|\xi|}{b(s)} \\ \frac{b(t)}{|\xi|} & \frac{b(t)}{b(s)} \end{pmatrix} \text{ for } k=1,2.$$

<u>Frage:</u> Können wir mit dieser Abschätzung etwas anfangen?

<u>Antwort:</u> Zumindestens in dem Fall, dass $b = b(t)$ monoton wachsend ist, erhalten wir durch die zweite Zeile der letzten Matrix eine Abschätzung, die einen Widerspruch zu der Tatsache darstellen könnte, dass die Energie der gedämpften Welle fällt.

8. Schritt: *Eine präzisere Abschätzung für* $|X_{\text{ell}}(t,s,\xi)|$

Zumindestens für wachsende $b = b(t)$ stellt das folgende Lemma eine präzisere Aussage dar.

Lemma 4.16 *Es seien* (t,ξ), $(s,\xi) \in Z_{\text{ell}}(c_0,\varepsilon)$ *mit* $t \geq s$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}&(|X_{\text{ell}}^{(kl)}(t,s,\xi)|)_{k,l=1}^2 \\ &\quad\lesssim \exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big)\begin{pmatrix} 1 & \frac{|\xi|}{b(s)} \\ \frac{|\xi|}{b(t)} & \frac{|\xi|^2}{b(t)b(s)} \end{pmatrix} + \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for } k=1,2.\end{aligned}$$

Beweis: Einerseits haben wir $U(t,\xi) = X_{\text{ell}}(t,s,\xi)U(s,\xi)$ mit $U = U(t,\xi) := (|\xi|\hat{u}(t,\xi), D_t\hat{u}(t,\xi))^T$. Andererseits haben wir $\hat{u}(t,\xi) = \Phi_1(t,\xi)\hat{\varphi}(\xi) + \Phi_2(t,\xi)\hat{\psi}(\xi)$. Schreiben wir die letzte Beziehung für $|\xi|\hat{u}$ und $D_t\hat{u}$ auf, dann ergibt sich durch Vergleich $X_{\text{ell}}^{(11)} = \Phi_1$, $X_{\text{ell}}^{(12)} = |\xi|\Phi_2$, $X_{\text{ell}}^{(21)} = \frac{D_t\Phi_1}{|\xi|}$, $X_{\text{ell}}^{(22)} = D_t\Phi_2$. Damit erhalten wir folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned}&|\Phi_1(t,s,\xi)| \leq C\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big),\ |\Phi_2(t,s,\xi)| \leq C\frac{1}{b(s)}\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big),\\ &|D_t\Phi_1(t,s,\xi)| \leq Cb(t)\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big),\\ &|D_t\Phi_2(t,s,\xi)| \leq C\frac{b(t)}{b(s)}\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big).\end{aligned}$$

Die Multiplikatoren Φ_1 und Φ_2 sind Lösungen von $v_{tt} + |\xi|^2 v + b(t)v_t = 0$. Setzen wir $\partial_t\Phi_k =: \Psi_k$, $k = 1,2$, dann erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}\partial_t\Psi_1 + b(t)\Psi_1 &= -|\xi|^2\Phi_1(t,s,\xi),\ \Psi_1(s,s,\xi) = 0,\\ \partial_t\Psi_2 + b(t)\Psi_2 &= -|\xi|^2\Phi_2(t,s,\xi),\ \Psi_2(s,s,\xi) = i.\end{aligned}$$

Wir werten jetzt zwei inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit der rechten Seite $-|\xi|^2\Phi_k(t,s,\xi)$, $k=1,2$, aus. Mit den obigen Abschätzungen für Φ_k ergibt sich nach Duhamelschen Prinzip

$$\Psi_1(t,s,\xi) = -|\xi|^2 \int\limits_s^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(t)}\Phi_1(\tau,s,\xi)d\tau,$$

$$\Psi_2(t,s,\xi) = i\frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} - |\xi|^2 \int\limits_s^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(t)}\Phi_2(\tau,s,\xi)d\tau.$$

Die Funktion Ψ_2 schätzen wir wie folgt ab:

$$|\Psi_2(t,s,\xi)| \lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2(t)b(s)} \int\limits_s^t \lambda^2(\tau)\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^\tau \frac{1}{b(\theta)}d\theta\Big)d\tau.$$

Nutzen wir $\partial_t\lambda^2(t) = b(t)\lambda^2(t)$, dann ergibt sich nach Anwendung partieller Integration

$$|\Psi_2(t,s,\xi)| \lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} + \frac{|\xi|^2}{b(t)b(s)}\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big).$$

Aufgabe 39 Leiten Sie die Abschätzung

$$|\Psi_2(t,s,\xi)| \lesssim \frac{|\xi|^2}{b(t)}\exp\Big(-|\xi|^2\int_s^t \frac{1}{b(\tau)}d\tau\Big)$$

her.

Mit dieser Abschätzung und den obigen Äquivalenzen $X_{\text{ell}}^{(11)} = \Phi_1$, $X_{\text{ell}}^{(12)} = |\xi|\Phi_2$, $X_{\text{ell}}^{(21)} = \frac{D_t\Phi_1}{|\xi|}$, $X_{\text{ell}}^{(22)} = D_t\Phi_2$ ergibt sich die Aussage von Lemma 4.16. $\square$

9.Schritt: $\quad$ *$L^2 - L^2$ Abschätzungen*

1. Fall: $\quad$ *Die Dämpfung b sei streng monoton fallend*

Wir zeigen die gewünschte Beziehung nur für kleine Frequenzen. Für große Frequenzen kann man analog vorgehen, hat nur weniger Zonen zu berücksichtigen. Also starten wir mit Z_{diss}, kommen dann zu Z_{ell}, danach zu Z_{red} und schließlich zu Z_{hyp}.

In der dissipativen Zone Z_{diss} verwenden wir

$$\begin{pmatrix} |\xi|\hat{u}(t,\xi) \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\xi|(1+t)\frac{\hat{u}(t,\xi)}{1+t} \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \end{pmatrix} \quad \text{bzw. mit der Zonendefinition}$$

$$\left|\begin{pmatrix} |\xi|\hat{u}(t,\xi) \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \end{pmatrix}\right| \leq \left|\begin{pmatrix} c_0\,\frac{\hat{u}(t,\xi)}{1+t} \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \end{pmatrix}\right| \leq \frac{C}{1+t}\left|\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle_{b(0)}\,\hat{u}(0,\xi) \\ D_t\hat{u}(0,\xi) \end{pmatrix}\right|.$$

Zu zeigen haben wir

$$\left|\begin{pmatrix} |\xi|\hat{u}(t,\xi) \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \end{pmatrix}\right| \;\le\; C\;\left(1+\int_0^t \frac{1}{b(s)}\,ds\right)^{-1/2}\left|\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\;\hat{u}(0,\xi) \\ D_t\hat{u}(0,\xi) \end{pmatrix}\right|.$$

Nutzen wir $tb(t)\to\infty$ für $t\to\infty$ dann folgt sofort

$$1+\int_0^t \frac{1}{b(s)}\,ds \le C\left(1+\int_0^t \frac{s}{N}\,ds\right) \;\le\; C(1+t)^2.$$

Damit ist die Abschätzung in der dissipativen Zone besser als die gewünschte Abschätzung.
Bezeichnen wir die obere Berandungslinie der dissipativen Zone mit t_ξ, dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} |\xi|\hat{u}(t,\xi) \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \end{pmatrix} \;=\; X_{\mathrm{ell}}(t,t_\xi,\xi)\;\begin{pmatrix} |\xi|\hat{u}(t_\xi,\xi) \\ D_t\hat{u}(t_\xi,\xi) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw. mit Lemma 4.16}$$

$$\begin{pmatrix} |\xi||\hat{u}(t,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(t,\xi)| \end{pmatrix} \;\le\; C\;\exp\left(-|\xi|^2\int_{t_\xi}^t \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau\right)\begin{pmatrix} 1 & \frac{|\xi|}{b(t_\xi)} \\ \frac{|\xi|}{b(t)} & \frac{|\xi|^2}{b(t_\xi)b(t)} \end{pmatrix}\frac{1}{1+t_\xi}\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\;|\hat{u}(0,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(0,\xi)| \end{pmatrix}.$$

Verwenden wir jetzt $|\xi|\sim\frac{1}{1+t_\xi}$ und $\exp\left(-|\xi|^2\int\limits_0^{t_\xi}\frac{d\tau}{d(\tau)}\right)\sim 1$, dann ergibt sich sofort die Abschätzung

$$\begin{pmatrix} |\xi||\hat{u}(t,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(t,\xi)| \end{pmatrix} \;\le\; C\;\exp\left(-|\xi|^2\int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)}\right)\begin{pmatrix} |\xi| & |\xi| \\ \frac{|\xi|^2}{b(t)} & \frac{|\xi|^2}{b(t)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\;|\hat{u}(0,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(0,\xi)| \end{pmatrix}.$$

Wenden wir uns der ersten Zeile zu. Es gilt

$$|\xi|\exp\left(-|\xi|^2\int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)}\right) \le C\left(1+\int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Für die zweite Zeile erhalten wir

$$\frac{|\xi|^2}{b(t)}\exp\left(-|\xi|^2\int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)}\right) \le C\,\frac{1}{b(t)}\left(1+\int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)}\right)^{-1}.$$

Benutzen wir schließlich

$$b^2(t)\int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)} \;\to\infty \quad \text{für} \quad t\to\infty,$$

dann folgt daraus sofort die gewünschte Abschätzung

$$\left| \begin{pmatrix} |\xi|\hat{u}(t,\xi) \\ |D_t\hat{u}(t,\xi)| \end{pmatrix} \right| \leq C \left(1 + \int_0^t \frac{1}{b(s)}\, ds\right)^{-1/2} \left| \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\hat{u}(0,\xi) \\ D_t\hat{u}(0,\xi) \end{pmatrix} \right|.$$

Zu beachten haben wir aber, daß das Maximum c_1 von $y\exp(-y)$ bzw. c_2 von $y^2\exp(-y)$ entlang der Linie $|\xi|^2 \int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)} = c_k$, $k = 1, 2$, angenommen wird. Diese Linie liegt in der elliptischen Zone.

Gehen wir jetzt zur reduzierten Zone. Dann ergibt sich mit t_ξ als obere Berandung der elliptischen Zone

$$\begin{pmatrix} |\xi||\hat{u}(t,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(t,\xi)| \end{pmatrix} \leq |\xi| \exp\left(-|\xi|^2 \int_0^{t_\xi} \frac{d\tau}{b(\tau)} + \int_{t_\xi}^t (\varepsilon - \frac{1}{2}) b(\tau) d\tau\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\ |\hat{u}(0,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(0,\xi)| \end{pmatrix}.$$

Benutzen wir in der reduzierten Zone Z_{red}

$$|\xi|^2 \leq (\frac{1}{2} - \varepsilon) b^2(t) \quad \text{bzw.} \quad (\varepsilon - \frac{1}{2}) b(t) \leq -\frac{|\xi|^2}{b(t)}\ ,$$

dann ergibt sich sofort die gewünschte Abschätzung aus

$$\begin{pmatrix} |\xi||\hat{u}(t,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(t,\xi)| \end{pmatrix} \leq |\xi| \exp\left(-|\xi|^2 \int_0^t \frac{d\tau}{b(\tau)}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\ |\hat{u}(0,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(0,\xi)| \end{pmatrix}.$$

Wenden wir uns schließlich der hyperbolischen Zone zu. Es gilt mit jedem $C \leq 1$

$$\begin{pmatrix} |\xi||\hat{u}(t,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(t,\xi)| \end{pmatrix} \leq |\xi| \exp\left(-C|\xi|^2 \int_0^{t_\xi} \frac{d\tau}{b(\tau)}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_\xi}^t b(\tau) d\tau\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\xi\rangle\ |\hat{u}(0,\xi)| \\ |D_t\hat{u}(0,\xi)| \end{pmatrix}$$

Untersuchen wir

$$\exp\left(-C|\xi|^2 \int_0^{t_\xi} \frac{d\tau}{b(\tau)} - \frac{1}{2}\int_{t_\xi}^t b(\tau) d\tau\right),\ \langle\xi\rangle_{b(t_\xi)} = \varepsilon\, \frac{b(t_\xi)}{2},$$

dann kann man zeigen, daß die Ableitung

$$\partial_{|\xi|} \exp\left(-C|\xi|^2 \int_0^{t_\xi} \frac{d\tau}{b(\tau)} - \frac{1}{2}\int_{t_\xi}^t b(\tau) d\tau\right) < 0$$

ausfällt falls $|\xi| \to 0$ strebt. Dabei benutzt man, daß $C \leq 1$ beliebig gewählt werden kann. Fixieren wir ein $t > 0$, dann nimmt somit der Ausdruck

$$|\xi| \exp\left(-C|\xi|^2 \int_0^{t_\xi} \frac{d\tau}{b(\tau)} - \frac{1}{2}\int_{t_\xi}^t b(\tau) d\tau\right)$$

sein Maximum nicht nur auf der Trennlinie t_ξ zur reduzierten Zone, sondern sogar in $\tilde{t}_\xi$ in der elliptischen Zone an. Für ein solches $\tilde{t}_\xi$ verschwindet das Integral $\int_{t_\xi}^t$ und der obige Ausdruck lässt sich durch

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left\{|\xi|\exp\left(-C_1|\xi|^2\int_0^t\frac{d\tau}{b(\tau)}\right)\right\}$$

abschätzen. Das liefert die Aussage des Satzes.

2. Fall: *Die Dämpfung b sei streng monoton steigend*

In diesem Fall führt ein analoges Vorgehen zur gewünschten Abschätzung. Die Reihenfolge der Zonen ändert sich. Wir beginnen mit der hyperbolischen Zone Z_{hyp}, kommen dann zur reduzierten Zone Z_{red}, um dann in der elliptischen Zone Z_{ell} zu enden. □

Merke: Das Energie-decay ergibt sich aus dem Verhalten der Amplituden in einer Umgebung der Trennlinie Γ_{sep}.

Bemerkung: Typische Beispiele effektiver Dämpfungen sind

$$b(t)=\tfrac{\log^{[n]}(e^{[n]}+t)}{1+t};\ b(t)=(1+t)^{-\kappa},\kappa\in(-1,1);\ b(t)=\tfrac{1}{\log^{[n]}(e^{[n]}+t)};$$
$$b(t)=\log^{[n]}(e^{[n]}+t),\ b(t)=(e^{[n]}+t)\log(e^{[n]}+t)\cdots\log^{[n]}(e^{[n]}+t).$$

Wählen wir $b(t)\equiv 1$, dann liefert Satz 4.13 sofort die Aussage von Satz 3.5.

4.3.4 Überdämpfungen

Die rechte Seite von (4.27) liefert kein decay falls $b^{-1}\in L^1(0,\infty)$ ist, obwohl der Dämpfungskoeffizient $b(t)$ extrem anwachsen kann für $t\to\infty$. Dieser Feststellung wollen wir in diesem Abschnitt auf die Spur gehen. Was steckt dahinter?

Wir wenden uns zuerst dem Lemma 4.15 zu. Nach diesem haben wir für die Fundamentallösung in der elliptischen Zone die Darstellung

$$X_1(t,s,\xi)=\frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}}\exp\left(\int_s^t\langle\xi\rangle_{b(\tau)}d\tau\right)Q_{\text{ell},1}(t,s,\xi).$$

Für uns interessant ist der Fall $b'(t)>0$ und $\int\limits_0^\infty\frac{d\tau}{b(\tau)}<\infty$. Dann liegt die elliptische Zone "oberhalb" der reduzierten und der hyperbolischen Zone. Die folgende Aussage enthält eine Konvergenzeigenschaft für $Q_{\text{ell},1}(t,s,\xi)$ für $t\to\infty$.

Lemma 4.17 *Für $b'(t)>0$ (ohne Einführung einer dissipativen Zone) gilt*

$$\lim_{t\to\infty}Q_{\text{ell},1}(t,s,\xi)=Q_{\text{ell},1}(\infty,s,\xi),\ s\gg 1,$$

gleichmäßig auf kompakten Mengen in $|\xi| \in [0, b(\infty))$*, und definiert hier eine stetige Funktion* $Q_{\mathrm{ell},1}(\infty, s, \xi)$.

Beweis: Im Beweis zu Lemma 4.15 haben wir die Funktion

$$H(t,s,\xi) := \exp\left(\int_s^t (i\mathcal{D}(\tau,\xi) + iF_0(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)I)d\tau\right)$$

verwendet mit

$$w(t,\xi) := \langle\xi\rangle_{b(t)} + \frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{b(t)}}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}} + \frac{b'(t)}{2\langle\xi\rangle_{b(t)}}.$$

Diese Wahl liefert

$$H(t,s,\xi) = \mathrm{diag}\Big(1, \frac{b(s) + 2\langle\xi\rangle_{b(s)}}{b(t) + 2\langle\xi\rangle_{b(t)}} \exp\Big(-2\int_s^t \langle\xi\rangle_{b(\tau)}d\tau\Big)\Big) \to \mathrm{diag}(1,0) \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.15 kennen wir schon die folgende Integralgleichung für $Q_{\mathrm{ell},1}$:

$$Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi) = H(t,s,\xi) + \int_s^t H(t,\theta,\xi)R_1(\theta,\xi)Q_{\mathrm{ell},1}(\theta,s,\xi)d\theta.$$

Wir verwenden wieder die Matrizantdarstellung und erhalten

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi) &= H(t,s,\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} i^k \int_s^t H(t,t_1,\xi)R_1(t_1,\xi)\int_s^t H(t_1,t_2,\xi)R_1(t_2,\xi) \\ &\quad \cdots \int_s^{t_{k-1}} H(t_{k-1},t_k,\xi)R_1(t_k,\xi)dt_k\cdots dt_2dt_1. \end{aligned}$$

Wählen wir jetzt $s \gg 1$ und wissen, das $R_1(\theta,\xi)$ eine L^1-Funktion in θ darstellt, dann konvergiert die Reihe stetiger Funktionen gleichmäßig auf kompakten Teilmengen in $|\xi| \in [0, b(\infty))$. Damit ist die Funktion $Q_{\mathrm{ell},1}(\infty,s,\xi)$ stetig. □

Merke: Für große s ($s \to \infty$) strebt $Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi) \to Q_{\mathrm{ell},1}(\infty,s,\xi)$, wobei die erste Zeile von $Q_{\mathrm{ell},1}(\infty,s,\xi)$ von der Zeile $(0,0)$ verschieden ist. Beachten wir $N_1(t,\xi) \to I$ für $t \to \infty$, dann bleibt diese Eigenschaft auch für $Q_{\mathrm{ell},0}(t,s,\xi) = N_1(t,\xi)Q_{\mathrm{ell},1}(t,s,\xi)N_1^{-1}(s,\xi)$ erhalten, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} Q_{\mathrm{ell},0}(t,s,\xi) = Q_{\mathrm{ell},0}(\infty,s,\xi),\ s \gg 1,$$

gleichmäßig auf kompakten Mengen in $|\xi| \in [0, b(\infty))$, und die erste Zeile von $Q_{\mathrm{ell},0}(\infty,s,\xi)$ ist verschieden von $(0,0)$. Speziell gilt: $\lim_{s\to\infty} Q_{\mathrm{ell},0}(\infty,s,\xi) = \mathrm{diag}$ $(1,0)$. Im folgenden betrachten wir den Grenzwert

$$S(s,\xi) = (1,0)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}}X_0(t,s,\xi)$$

mit

$$X_0(t,s,\xi) = \frac{\langle\xi\rangle_{b(t)}}{\langle\xi\rangle_{b(s)}}\ \exp\Big(\int_s^t \langle\xi\rangle_{b(\tau)} d\tau\Big) Q_{\mathrm{ell},0}(t,s,\xi).$$

Lemma 4.18 *Unter den Voraussetzungen (B1), (B2), (B4) und* $1/b(t) \in L^1$ *existiert der Grenzwert* $S(s,\xi)$ *gleichmäßig auf kompakten Mengen in* $|\xi| \in [0, b(\infty))$ *und ist verschieden vom Nullvektor.*

Beweis: Es gilt

$$\frac{1}{\lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}}\ X_0(t,s,\xi) = \frac{1}{\lambda(s)\langle\xi\rangle_{b(s)}} \exp\Big(\int_s^t \Big(\langle\xi\rangle_{b(\tau)} - \frac{b(\tau)}{2}\Big) d\tau\Big) Q_{\mathrm{ell},0}(t,s,\xi).$$

Verwenden wir

$$\frac{b(\tau)}{2} - \frac{2|\xi|^2}{b(\tau)} \le \langle\xi\rangle_{b(\tau)} - \frac{b(\tau)}{2} \le \frac{b(\tau)}{2} - \frac{|\xi|^2}{b(\tau)}$$

dann erhalten wir

$$\exp\Big(-2|\xi|^2 \int_s^t \frac{1}{b(\tau)} d\tau\Big) \le \exp\Big(\int_s^t \Big(\langle\xi\rangle_{b(\tau)} - \frac{b(\tau)}{2}\Big) d\tau\Big) \le \exp\Big(-|\xi|^2 \int_s^t \frac{1}{b(\tau)}\ d\tau\Big).$$

Da $1/b(t) \in L^1$, konvergiert $\exp\Big(\int_s^t \Big(\langle\xi\rangle_{b(\tau)} - \frac{b(\tau)}{2}\Big)\ d\tau\Big)$ für $t \to \infty$ und für $s \ge t_\xi$. Nach Lemma 4.17 und der Folgerung wissen wir, daß $Q_{\mathrm{ell},0}(t,s,\xi)$ für $t \to \infty$ gegen $Q_{\mathrm{ell},0}(\infty,s,\xi)$ konvergiert. Für sehr große s ist $Q_{\mathrm{ell},0}(\infty,s,\xi)$ annähernd diag $(1,0)$. Damit ist für sehr große s die erste Komponente des Vektors $S(s,\xi)$ ungleich 0. □

Wenden wir noch einmal dem Grenzwert $S(s,\xi)$ zu. Was leistet dieser? Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.3.3 (Schritt 6) gilt $V^{(0)}(t,\xi) = X_0(t,s,\xi)V^{(0)}(s,\xi)$ mit $V^{(0)} = M^{-1}V$, $V = (\langle\xi\rangle_{b(t)}v, D_t v)^T$. Damit ist

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1,0)V^{(0)}(t,\xi)}{\lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(1,0)X_0(t,s,\xi)}{\lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}}\ V^{(0)}(s,\xi) = S(s,\xi)V^{(0)}(s,\xi) \qquad \text{bzw.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1,0)M^{-1}\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle_{b(t)}v \\ D_t v \end{pmatrix}}{\lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(1,0)M^{-1}\begin{pmatrix} \lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}\hat{u} \\ D_t(\lambda(t)\hat{u}) \end{pmatrix}}{\lambda(t)\langle\xi\rangle_{b(t)}}$$
$$= S(s,\xi)\ M^{-1}\begin{pmatrix} \langle\xi\rangle_{b(s)}\lambda(s)\hat{u} \\ D_s(\lambda(s)\hat{u}) \end{pmatrix}.$$

Einfache Berechnungen liefern

$$2\,\hat{u}(\infty;\xi) + \lim_{t\to\infty} \frac{\partial_t \hat{u}(t,\xi)}{\langle\xi\rangle_{b(t)}}$$
$$= S(s,\xi)\cdot\Big(\langle\xi\rangle_{b(s)}\lambda(s)\hat{u}(s,\xi) + \partial_t(\lambda(t)\hat{u})(s,\xi), -\lambda(s)\langle\xi\rangle_{b(s)}\hat{u}(s,\xi) + \partial_t(\lambda(t)\hat{u})(s,\xi)\Big).$$

Da die erste Komponente des Vektors S ungleich 0 ist für sehr große s sehen wir, daß i.allg. Daten auf $t = s$ zu einem Grenzwert $2\hat{u}(\infty,\xi) + \lim_{t\to\infty} \frac{\partial_t \hat{u}(t,\xi)}{\langle\xi\rangle_{b(t)}}$ führen, der für $|\xi| \in [0, b(\infty))$ verschieden von 0 ist. Damit sind decay Verhalten von $|\xi|\hat{u}(t,\xi)$ und $\partial_t \hat{u}(t,\xi)$ für $t \to \infty$ ausgeschlossen. Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 4.14 *Vorgelegt sei das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x)$$

mit $\varphi \in H^1$, $\psi \in L^2$. Die Dämpfung erfülle die Voraussetzungen (B1), (B2), (B4) und $1/b \in L^1$. Dann kann i.allg. kein decay der Energie $E_W(u)(t)$ für $t \to \infty$ erwartet werden.

4.3.5 Beweis eines Scattering-Resultates

Wir haben schon in Abschnitt 4.2.3 Grundlagen der Scattering-Theorie kurz diskutiert. In diesem Abschnitt wollen wir uns dem Beweis von Satz 4.7 zuwenden.

Beweis von Satz 4.7 Wir führen den Beweis für $n \geq 2$, für $n = 1$ läuft er analog. Dazu muß nur $|\xi|$ durch ξ oder $-\xi$ ersetzt werden. Wir wollen im Fourierbild arbeiten und nutzen dafür

$$\hat{u}_{tt} + |\xi|^2\hat{u} + b(t)\hat{u}_t = 0, \; \hat{u}(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi), \; \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi),$$
$$\hat{v}_{tt} + |\xi|^2\hat{v} = 0, \; \hat{v}(0,\xi) = \hat{\tilde{\varphi}}(\xi), \; \hat{v}_t(0,\xi) = \hat{\tilde{\psi}}(\xi).$$

Nach Einführung der Energie $U(t,\xi) = (|\xi|\hat{u}, D_t\hat{u})^T$ erhalten wir nach einem Diagonalisierungsschritt

$$D_tU^{(0)} - \mathcal{D}(\xi)U^{(0)} - R(t)U^{(0)} = 0, \quad \mathcal{D}(\xi) = \begin{pmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & -|\xi| \end{pmatrix}, \quad R \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Dazu haben wir die Substitution $U^{(0)} = M^{-1}U, \; M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, verwendet. Die Fundamentallösung zum diagonalen Teil $\mathcal{D}_t - \mathcal{D}(\xi)$ ist gegeben durch $X_0(t-s,\xi) = \begin{pmatrix} e^{i(t-s)|\xi|} & 0 \\ 0 & e^{-i(t-s)|\xi|} \end{pmatrix}$. Betrachten wir jetzt das Cauchy-Problem

$$\hat{v}_{tt} + |\xi|^2 v = 0, \; \hat{v}(s,\xi) = v_0(\xi), \; \hat{v}_t(s,\xi) = v_1(\xi),$$

dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} |\xi|\hat{v}(t,\xi) \\ D_t\hat{v}(t,\xi) \end{pmatrix} = MX_0(t-s,\xi)M^{-1}\begin{pmatrix} |\xi|\hat{v}(s,\xi) \\ D_t\hat{v}(s,\xi) \end{pmatrix},$$

bzw. im physikalischen Raum

$$S_0(t-s,D):\begin{pmatrix}|D|v(s,x)\\ D_tv(s,x)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}|D|v(t,x)\\ D_tv(t,x)\end{pmatrix}.$$

Wenden wir uns jetzt der Fundamentallösung $X = X(t,s,\xi)$ zum System $D_t - \mathcal{D}(\xi) - R(t)$ zu. Somit haben wir

$$D_tX - \mathcal{D}(\xi)X - R(t)X = 0,\ X(s,s,\xi) = I$$

zu lösen. Wir können wieder der üblichen Prozedur mit Hilfe des Matrizanten folgen und erhalten im physikalischen Raum

$$S(t,s,D):\begin{pmatrix}|D|u(s,x)\\ D_tu(s,x)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}|D|u(t,x)\\ D_tu(t,x)\end{pmatrix},$$

bzw. im Fourierbild

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}|\xi|\hat{u}(t,\xi)\\ D_t\hat{u}(t,\xi)\end{pmatrix} &= MX(t,s,\xi)M^{-1}\begin{pmatrix}|\xi|\hat{u}(s,\xi)\\ D_t\hat{u}(s,\xi)\end{pmatrix}\\ &= MX_0(t-s,\xi)Q(t,s,\xi)M^{-1}\begin{pmatrix}|\xi|\hat{u}(s,\xi)\\ D_t\hat{u}(s,\xi)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

mit

$$Q(t,s,\xi) = I + \sum_{k=1}^{\infty} i^k \int_s^t \mathcal{R}(t,s,\xi)\int_s^{t_1}\mathcal{R}(t_2,s,\xi)\cdots\int_s^{t_{k-1}}\mathcal{R}(t_k,s,\xi)dt_k\cdots dt_1,$$

als Lösung von

$$D_tQ - \mathcal{R}(t,s,\xi)Q = 0,\ Q(s,s,\xi) = I,$$

und

$$R(t,s,\xi) = X_0(s-t,\xi)R(t)X_0(t-s,\xi).$$

Beachten wir die Struktur von X_0 und die Voraussetzung an $b\,(b \in L^1(\mathbb{R}_+))$, dann gilt $|\mathcal{R}(t,s,\xi)| \le |R(t)| \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Wir wenden uns schließlich dem Møllerschen Wellenoperator W_+ zu. Dazu wählen wir Daten φ,ψ aus dem Energieraum $|D|^{-1}L^2 \times L^2$. Darauf wenden wir den Lösungsoperator $S(t,0)$ an, der uns $(u(t,\cdot),u_t(t,\cdot))^T$ zu den Daten $(\varphi,\psi)^T$ liefert. Dann betrachten wir die freie Wellengleichung $v_{tt} - \triangle v = 0$ mit Daten $v(t,\cdot) = u(t,\cdot)$, $v_t(t,\cdot) = u_t(t,\cdot)$ und wenden den Lösungsoperator $S_0(0,t)$ an. Dieser liefert die Lösung des rückwärts gerichteten Cauchy-Problems auf $t=0$. Der Møllersche Wellenoperator ist dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} W_+ &= \lim_{t\to\infty} S_0(0,t)S(t,0) = \lim_{t\to\infty} MX_0(-t,D)X(t,0,D)M^{-1} \\ &= \lim_{t\to\infty} MX_0(-t,D)X_0(t,D)Q(t,0,D)M^{-1} \\ &= \lim_{t\to\infty} MQ(t,0,D)M^{-1}. \end{aligned}$$

Da die Matrix M konstant ist, haben wir auf dem Fourierlevel zu entscheiden, ob $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t,0,\xi)$ existiert, und wenn ja, in welchem Sinne dieser Grenzwert interpretiert werden muß. Eine formale Rechnung liefert

$$Q(t,0,\xi)-Q(s,0,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} i^k \int_s^t \mathcal{R}(t_1,0,\xi)\int_0^{t_1}\mathcal{R}(t_2,0,\xi)\cdots\int_0^{t_{k-1}}\mathcal{R}(t_k,0,\xi)dt_k\dots dt_1.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} &\|Q(t,0,\cdot)-Q(s,0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_s^t |R(t_1)|\frac{1}{(k-1)!}\Big(\int_0^{t_1}|R(\tau)|d\tau\Big)^{k-1}dt_1 \\ &= \int_s^t |R(t_1)|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\int_0^{t_1}|R(\tau)|d\tau\Big)^{k}dt_1 = \int_s^t |R(t_1)|\exp\Big(\int_o^{t_1}|R(\tau)|d\tau\Big)dt_1 \to 0 \end{aligned}$$

für $s,t\to\infty$, da $R\in L^1(\mathbb{R}_+)$ erfüllt ist. Damit ist $\{Q(t_k,0,\cdot)\}_{k\ge0}$, $t_k\to\infty$, eine Cauchy-Folge in $L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$. Der Grenzwert für $\{t_k\}_{k\ge0}\to\infty$ existiert und ist unabhängig von der gewählten Folge $\{t_k\}_{k\ge0}$. Somit existiert auch

$$W_+(\xi) = \lim_{t\to\infty} MQ(t,0,\xi)M^{-1} = M\lim_{t\to\infty} Q(t,0,\xi)M^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi).$$

Der Møllersche Wellenoperator $W_+ = \lim\limits_{t\to\infty} S_0(0,t)S(t,0)$ erfüllt die Behauptungen von Satz 4.7. Im Fourierbild gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}|\xi|\hat{u}(t,\xi)\\ D_t\hat{u}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}|\xi|\hat{v}(t,\xi)\\ D_t\hat{v}\end{pmatrix} &= MX_0(t,\xi)Q(t,0,\xi)M^{-1}\begin{pmatrix}|\xi|\hat{\varphi}\\ \hat{\psi}\end{pmatrix} - MX_0(t,\xi)M^{-1}\begin{pmatrix}|\xi|\hat{\tilde{\varphi}}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix} \\ &= MX_0(t,\xi)M^{-1}(MQ(t,0,\xi)M^{-1}-W_+)\begin{pmatrix}|\xi|\hat{\varphi}\\ \hat{\psi}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den Klammern strebt gegen 0 für $t\to\infty$. Damit strebt $\|(u(t,\cdot),u_t(t,\cdot))-(v(t,\cdot),v_t(t,\cdot))\|_E$ gegen 0 für $t\to\infty$.
Im nächsten Schritt zeigen wir, daß $W_+\in L(E\to E)$ ist. Dazu erinnern wir uns an die Beziehungen

$$D_tQ - R(t,s,\xi)Q = 0,\ Q(s,s,\xi)=I, \quad W_+(\xi) = M\lim_{t\to\infty} Q(t,0,\xi)M^{-1}.$$

Einerseits haben wir

$$0 = D_t(Q \cdot Q^{-1}) = D_tQ\, Q^{-1} + QD_tQ^{-1} = R + QD_tQ^{-1},$$

und somit auch

$$D_tQ^{-T}(t,s,\xi) + \mathcal{R}^T(t,s,\xi)Q^{-T}(t,s,\xi) = 0,\ Q^{-T}(s,s,\xi) = I.$$

Damit kann man die gleiche Prozedur verwenden, um die Existenz von $\lim\limits_{t\to\infty} Q^{-T}(t,0,\xi)$ bzw. von $\lim\limits_{t\to\infty} Q^{-1}(t,0,\xi)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu beweisen. Andererseits haben wir $W_+^{-1}(\xi) = M \lim\limits_{t\to\infty} Q^{-1}(t,0,\xi)M^{-1}$. Damit ist $W_+(\xi)$ invertierbar, es gilt $W_+^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das liefert auf dem Operatorlevel sofort $W_+ \in L(E \to E)$.
Bleibt nun noch

$$\|(u(t,\cdot),u_t(t,\cdot)) - (v(t,\cdot),v_t(t,\cdot))\|_E \le C\|(\varphi(\cdot),\psi(\cdot))\|_E \int_t^\infty b(\tau)d\tau$$

nachzuweisen. Das folgt aber sofort aus

$$MQ(t,0,\xi)M^{-1} - W_+ = M(Q(t,0,\xi) - Q(\infty,0,\xi))M^{-1}$$

und aus

$$Q(\infty,0,\xi) - Q(t,0,\xi) = \sum_{k=1}^\infty i^k \int_t^\infty \mathcal{R}(t_1,0,\xi)\int_0^{t_1} \mathcal{R}(t_2,0,\xi)\ldots\int_0^{t_{\xi-1}} \mathcal{R}(t_\xi,0,\xi)dt_\xi\cdots dt_1.$$

Daraus ergibt sich

$$\|Q(\infty,0,\cdot) - Q(t,0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \int_t^\infty |\mathcal{R}(\tau)|d\tau \exp\Big(\int_0^\infty |\mathcal{R}(\tau)|d\tau\Big) \le C\int_t^\infty b(\tau)d\tau.$$

Somit sind alle Aussagen von Satz 4.7 bewiesen. □

4.3.6 Ein modifiziertes Scattering-Resultat

Vergleichen wir die Aussagen der Sätze 4.7 und 4.12, dann kann man natürlich kein Scattering Resultat zwischen dem nicht-effektiv gedämpften Wellenoperator und dem klassischen Wellenoperator erhalten. Der klassische Wellenoperator erlaubt eine Erhaltung der Energie, im Fall des nicht-effektiv gedämpften Wellenoperators fällt der Energieoperator wie $\lambda(t)^{-2}$.

Frage: Ist im Falle des nicht-effektiv gedämpften Wellenoperators das Fallen des Energieoperators wie $\lambda(t)^{-2}$ scharf?

Antwort: Ja! Die Optimalität des Fallens wird mit Hilfe eines *modifizierten Scattering Resultates* gezeigt. Dazu benötigen wir den Energieoperator

$$E(t,D) : (\langle D\rangle\varphi,\psi) \in L^2 \times L^2 \to (|D|u(t,\cdot),\partial_t u(t,\cdot)) \in L^2 \times L^2$$

für Lösungen des Cauchy-Problems für die nicht-effektiv gedämpfte Wellengleichung

$$u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0,\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x),$$

und den Energieoperator

$$E_0(t,s,D) = MX_0(t,s,D)M^{-1},\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_0(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} e^{i(t-s)|\xi|} & 0 \\ 0 & e^{-i(t-s)|\xi|} \end{pmatrix}.$$

Dabei verfolgen wir folgende Strategie:
Wir multiplizieren den Energieoperator $E(t,D)$, der wie $\lambda(t)^{-1}$ fällt, mit $\lambda(t)$ und vergleichen $\lambda(t)E(t,D)$ mit $E_0(t,0,D)^{-1}$. Mittels des modifizierten Møllerschen Wellenoperators

$$W_+(D) = \lim_{t\to\infty} \lambda(t)E_0(t,0,D)^{-1}E(t,D)$$

beweisen wir folgendes modifizierte Scattering-Resultat.

Satz 4.15: *Vorgelegt seien die Cauchy-Probleme*

$$u_{tt} - \triangle u + b(t)u_t = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),$$
$$v_{tt} - \triangle v = 0,\ v(0,x) = \tilde{\varphi}(x),\ v_t(0,x) = \tilde{\psi}(x),$$

wobei $b = b(t)$ den Voraussetzungen von Satz 4.12 genügt. Dann gilt

- $\lim_{t\to\infty} \|W_+ - \lambda(t)E_0(0,t,D)^{-1}E(t,0)\|_{L(L^2\times L^2\to L^2\times L^2)} = 0,$
- *der Operator $W_+ \in L(L^2\times L^2 \to L^2\times L^2) : (\langle D\rangle\varphi,\psi) \in L^2\times L^2 \to (\langle D\rangle\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \in L^2 \times L^2$ besitzt einen trivialen Kern,*
- *die Lösungen u und v zu den Daten (φ,ψ) und $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ erfüllen die a-priori Abschätzung*
  $\|E_0(t,0,D)(\langle D\rangle\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) - \lambda(t)E(t,D)(\langle D\rangle\varphi,\psi)\|_{L^2\times L^2} \to 0$ *für $t\to\infty$.*

Bemerkung: Für sehr große Zeiten t nähert sich $\lambda(t)^2E_W(u)(t)$ immer mehr $E_W(v)(t) = E_W(v)(0)$. Damit ist das Decay scharf. Im Gegensatz zu Satz 4.7 haben wir nur eine Kerneigenschaft von $W_+(D)$, aber keine Isomorphismus-Eigenschaft.

Wir wenden uns (übersetzt in den Phasenraum) $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t)E_0(t,0,D)^{-1}E(t,D)$ zu. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lambda(t)E_0(t,0,\xi)^{-1}E(t,\xi)\\
&\quad= \lambda(t)E_0(-t_\xi,\xi)MX_0(t_\xi,t,\xi)N_1(t,\xi)\frac{\lambda(t_\xi)}{\lambda(t)}X_0(t,t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi)N_1^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}E(t_\xi,\xi)\\
&\quad= E_0(-t_\xi,\xi)M\,X_0(t_\xi,t,\xi)N_1(t,\xi)X_0(t,t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi)N_1^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)E(t_\xi,\xi).
\end{aligned}$$

Fixieren wir jetzt ein $c > 0$ und betrachten $\{\xi : |\xi| \geq c\}$, dann zeigt man wie im Beweis von Satz 4.7, daß $Q(t,t_\xi,\xi) \to Q(\infty,t_\xi,\xi)$ gleichmäßig auf $\{\xi : |\xi| \geq c\}$ erfüllt ist. Dabei wird $R_1(\cdot,\xi) \in L^1(t_\xi,\infty)$ gleichmäßig auf $\{\xi : |\xi| \geq c\}$ ausgenutzt. Betrachten wir schließlich noch

$$\lim_{t\to\infty} X_0(t_\xi,t,\xi)N_1(t,\xi)X_0(t,t_\xi,\xi) = I,$$

dann ergibt sich sofort die Existenz von

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)E_0(t,0,\xi)^{-1}E(t,\xi) = E_0(-t_\xi,\xi)M\,Q(\infty,t_\xi,\xi)N^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)E(t_\xi,\xi)$$

gleichmäßig auf $\{\xi : |\xi| \geq c\}$. Das heißt, falls wir $U \in L^2$ wählen mit dist (0, supp $\hat{U}) \geq c$, dann gelten obige Untersuchungen gleichmäßig auf $\{\xi : |\xi| \geq c\}$.
Wir definieren deshalb den Unterraum

$$B_c = \{U \in L^2(\mathbb{R}^n) :\ \text{dist}\,(0, \text{supp}\hat{U}) \geq c\}.$$

Dann zeigen die obigen Rechnungen, daß $W_+(D)$ als Abbildung von B_c in sich existiert, d.h. $W_+(D) \in L(B_c \to B_c)$. Das gilt natürlich für alle $c > 0$, d.h. auf $\bigcup\limits_{c>0} B_c$. Diese Menge liegt dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Somit haben wir gezeigt, $\lim\limits_{t\to\infty} W_+(D)U$ existiert für alle $U \in \bigcup\limits_{c>0} B_c$.
Nutzen wir die Aussage von Satz 4.12, dann sind die Normen $\|\lambda(t)E_0(t,0,D)^{-1}E(t,D)\|_{L(L^2\to L^2)} \leq C$ gleichmäßig für alle $t \in [0,\infty)$. Diese Tatsache erlaubt den Einsatz des *Satzes von Banach-Steinhaus*. Setzen wir mit einer Folge $\{t_n\} \to \infty$

$$A_n\,U \;=\; \lambda(t_n)E_0(t_n,0,D)^{-1}E(t_n,D)U,$$

dann gilt $\|A_n\|_{L(L^2\to L^2)} \leq C$ und $\{A_n\,U\}_n$ konvergiert gegen $W_+(D)U$ für alle U aus der dichten Menge $\bigcup\limits_{c>0} B_c$ des L^2. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist damit $W_+(D)$ auf L^2 definiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|W_+(D) - A_n\|_{L(L^2\to L^2)} = 0.$$

Dieser Operator ist unabhängig von der gewählten Folge $\{t_n\} \to \infty$. Der Møllersche Wellenoperator wird beschrieben durch

$$W_+(\xi) = E_0(-t_\xi, \xi) M\, Q(\infty, t_\xi, \xi) N^{-1}(t_\xi, \xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) E(t_\xi, \xi).$$

Die gewünschte Datenzuordnung erhalten wir durch

$$(\langle\xi\rangle \hat{\tilde{\varphi}}, \hat{\tilde{\psi}})^T = W_+(\xi)(\langle\xi\rangle \hat{\varphi}, \hat{\psi})^T.$$

Bleibt nur noch die Kerneigenschaft von $W_+(D)$ zu prüfen. Diese folgt aber sofort aus $\det E(t,\xi) = \frac{1}{\lambda^2(t)} \frac{|\xi|}{\langle\xi\rangle}$ bzw. aus $\det W_+(\xi) = \lim_{t\to\infty} \lambda^2(t) \det E(t,\xi) = \frac{|\xi|}{\langle\xi\rangle}$, da $\det E_0(t, 0, \xi)^{-1} = 1$ gilt. □

5 Optimalitätsbeweise

Im Satz 4.6 haben wir mit Hilfe der Floquet-Theorie, insbesondere mit Lemma 4.4, ein Optimalitätsresultat bewiesen. Wir wollen jetzt zeigen wie dieses Lemma bzw. gewisse Erweiterungen zum Beweis der Optimalität von Resultaten in der Theorie von Wellengleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten genutzt werden können. Als Erweiterung von Lemma 4.4 sehen wir das folgende Resultat an.

Lemma 5.1 *Es sei $b = b(t)$ eine nicht konstante, 1-periodische, glatte und positive Funktion. Wir untersuchen das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - b^2(t) u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \exp(ix\xi),\ u_t(0,x) = 0,$$

wobei die positive reelle Zahl ξ^2 zu einem Instabilitätsintervall für den Koeffizienten $b^2(t)$ gehört. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u = u(t,x) = \exp(ix\xi) w(t)$, wobei w der asymptotischen Beziehung $|w(M)| \sim |\mu_0|^M$ mit $|\mu_0| > 1$ für alle hinreichend großen $M \in \mathbb{N}$ genügt.

In der Arbeit [22] wurde im wesentlichen folgendes Resultat gezeigt:

Satz 5.1 *Gegeben sei mit einer reellen Konstanten a das Cauchy-Problem*

$$u_{tt} - \lambda^2(t) b^2(t) u_{xx} - a \frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)} u_x = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),$$

unter den folgenden Voraussetzungen an die Funktion $\lambda = \lambda(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T]$, welche ein Entartungsverhalten des Koeffizienten in $t = 0$ beschreibt:

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0,\ \lambda(t) > 0,\ \lambda'(t) > 0,\ t \in (0,T], \\ d_0 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)} \le \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \le d_1 \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)},\ d_0, d_1 > 0,\ \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \\ |\lambda''(t)| \le d_2 \lambda(t) \left(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\right)^2. \end{cases}$$

Weiterhin benötigen wir eine positive und monoton fallende Funktion $\nu = \nu(t)$, $t \in (0, T]$, die das oszillierende Verhalten des Koeffizienten beschreibt. Dieses Verhalten wird beschrieben durch

$$\begin{cases} c_0 := \inf\limits_{t\in(0,T]} b(t) \le b(t) \le c_1 := \sup\limits_{t\in(0,T]} b(t),\ t \in (0,T],\ c_0, c_1 > 0, \\ |b^{(k)}(t)| \le C_k(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\nu(t))^k,\ k = 1, 2. \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen existiert zu jedem $\varphi \in H^s$, $\psi \in (\Lambda^{-1}(\frac{N}{\langle D_x\rangle}))^{-1}H^s$, N ist eine feste positive Konstante, eine eindeutig bestimmte Lösung u, die zu folgenden Funktionenräumen gehört:

1. *falls* $0 < \lim_{t\to 0} \frac{\Lambda(t)^{\frac{|a|}{c_0}}}{\lambda(t)} \le +\infty$,
   dann gilt $u \in C([0,T], \exp(C_\alpha\nu((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})))H^s)$
   $\bigcap C^1([0,T], \exp(C_\alpha\nu((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})))H^{s-1})$
   mit nichtnegativen Konstanten C_α und N_2,

2. *falls* $\lim_{t\to 0} \frac{\Lambda(t)^{\frac{|a|}{c_0}}}{\lambda(t)} = 0$,
   dann gilt $u \in C([0,T], \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}\left((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})\right)}{\Lambda^{\frac{|a|}{2c_0}}\left((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})\right)} \exp(C_\alpha\nu((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})))H^s)$
   $\bigcap C^1([0,T], \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}\left((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})\right)}{\Lambda^{\frac{|a|}{2c_0}}\left((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})\right)} \exp(C_\alpha\nu((\frac{\Lambda}{\nu})^{-1}(\frac{N_2}{\langle D_x\rangle})))H^{s-1})$
   mit nichtnegativen Konstanten C_α und N_2.

Beispiele: Was haben wir mit diesem Satz bewiesen?
Aus Satz 5.1 schließen wir für $a = 0$, $b(t) \equiv 1$, das folgende Lösungsverhalten für schwach hyperbolische Cauchy-Probleme der Form

$$u_{tt} - \lambda^2(t)u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x):$$

1. $\lambda(t) \equiv 1$ (klassische Wellengleichung)
   $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-1} \Longrightarrow u \in C([0,T], H^s) \bigcap C^1([0,T], H^{s-1})$,

2. $\lambda(t) = (\log^{[n]} \frac{1}{t})^{-1}$ (logarithmisch entarteter Fall)
   $\varphi \in H^s$, $\psi \in (\Lambda^{-1}(\frac{N}{\langle D_x\rangle}))^{-1}H^s \Longrightarrow u \in C([0,T], H^s) \bigcap C^1([0,T], H^{s-1})$,
   $\Lambda(t) = O(t(\log^{[n]} \frac{1}{t})^{-1})$,

3. $\lambda(t) = t^l$ (endlich entarteter Fall)
   $\varphi \in H^s$, $\psi \in H^{s-\frac{1}{l+1}} \Longrightarrow u \in C([0,T], H^s) \bigcap C^1([0,T], H^{s-1})$,

4. $\lambda(t) = \frac{1}{t^2}\exp(-\frac{1}{t})$ (unendlich entarteter Fall)
   $\varphi \in H^s$, $\psi \in \log\langle D_x\rangle H^s \Longrightarrow u \in C([0,T], H^s) \bigcap C^1([0,T], H^{s-1})$,

5. $\lambda(t) = \frac{d}{dt}\exp(-\exp^{[n]}(\frac{1}{t}))$ (super unendlich degenerierter Fall)
   $\varphi \in H^s$, $\psi \in \log^{[n]+1}\langle D_x\rangle H^s \Longrightarrow u \in C([0,T],H^s)\bigcap C^1([0,T],H^{s-1})$.

Interpretation der Beispiele: Je "größer" die Entartung ist, desto kleiner ist der Regularitätsunterschied zwischen φ und ψ, der ein Regularitätsverhalten der Lösung wie im klassischen Wellenfall impliziert.

Sind diese Resultate scharf?

Mit Hilfe der Theorie spezieller Funktionen kann man zeigen, daß die Resultate aus 3. und 4. scharf sind.

Wir erklären jetzt den Einfluß verschiedener Funktionen ν, die unterschiedliches oszillierendes Verhalten der Koeffizienten beschreiben. Wir setzen wieder voraus $\varphi \in H^s$, $\psi \in (\Lambda^{-1}(\frac{N}{\langle D_x\rangle}))^{-1}H^s$. Dann gehört nach Satz 5.1 die eindeutig bestimmte Lösung u zu folgenden Funktionenräumen:

1. $\nu(t) \le C \implies u \in C([0,T],H^s)\bigcap C^1([0,T],H^{s-1})$,
2. $\nu(t) = \log\frac{1}{\Lambda(t)} \implies u \in C([0,T],\langle D_x\rangle^{C_\alpha}H^s)\bigcap C^1([0,T],\langle D_x\rangle^{C_\alpha}H^{s-1})$,
3. $\nu(t) = (\log\frac{1}{\Lambda(t)})^\gamma,\ \gamma \in (0,1), \implies$
   $u \in C([0,T],\langle D_x\rangle^{C_\alpha(\log\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma-1}}H^s)\bigcap C^1([0,T],\langle D_x\rangle^{C_\alpha(\log\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma-1}}H^{s-1})$,
4. $\nu(t) = (\log\frac{1}{\Lambda(t)})^{\gamma_1}(\log^{[2]}\frac{1}{\Lambda(t)})^{\gamma_2}\cdots(\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)})^{\gamma_n},\ \gamma_1 \in (0,1),\ \gamma_k > 0,\ k = 2,\cdots,n$,
   $\implies u \in C([0,T],\langle D_x\rangle^{C_\alpha(\log\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma_1-1}(\log^{[2]}\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma_2}\cdots(\log^{[n]}\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma_n}}H^s)$
   $\bigcap C^1([0,T],\langle D_x\rangle^{C_\alpha(\log\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma_1-1}(\log^{[2]}\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma_2}\cdots(\log^{[n]}\frac{\langle D_x\rangle}{N})^{\gamma_n}}H^{s-1})$.

Interpretation der Beispiele: Je "schneller" das oszillierende Verhalten ist, desto größer scheint der Regularitätsverlust der Lösung gegenüber den Daten zu sein.

Sind diese Resultate scharf?

Es ist noch nichts darüber bekannt, ob ein Ableitungsverlust tatsächlich eintritt.

5.1 Welcher Regularitätsverlust tritt wirklich auf?

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß in Satz 5.1 für $\nu(t) = \log\frac{1}{\Lambda(t)}$ tatsächlich ein endlicher Ableitungsverlust eintritt. Satz 5.1 sagt uns nur, daß höchstens ein endlicher Ableitungsverlust auftritt.

Strategie unseres Vorgehens

• Da alle Voraussetzungen aus Satz 5.1 bez. der Variablen t gleichmäßig bezüglich $(0,T]$ sind, kann anstelle des Cauchy-Problems aus Satz 5.1 das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \lambda^2(t)b^2(t)u_{xx} - a\frac{\lambda^2(t)}{\Lambda(t)}u_x = 0, \quad u(t_0,x) = \varphi(x),\ u_t(t_0,x) = \psi(x),\ t_0 \in (0,T],$$

untersucht werden, ohne daß sich die Aussage von Satz 5.1 ändert.

• Anstelle des obigen Cauchy-Problems erzeugen wir zu einer vorgegebenen Funktion $b = b(t)$, die den Voraussetzungen von Lemma 5.1 genügt, eine Familie von Koeffizienten $\{b_k = b_k(t)\}_k$ und betrachten die Familie von schwach hyperbolischen Cauchy-Problemen

$$u_{tt} - \lambda^2(t)b_k^2(t)u_{xx} = 0,\ u(t_k, x) = u_{0,k}(x),\ u_t(t_k, x) = u_{1,k}(x),\ t_k \in [0, T].$$

Für diese Familie kann aus Satz 5.1 die folgende Aussage geschlossen werden:

Satz 5.2 *Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten $\lambda(t)$ und $b_k(t)$ den Voraussetzungen von Satz 5.1 genügen mit Konstanten, die unabhängig von k und t_k sind, und mit $\nu(t) = \log \frac{1}{\Lambda(t)}$. Dann existiert zu vorgegebenen Daten $u_{0,k} \in H^s$, $u_{1,k} \in (\Lambda^{-1}(\frac{N}{\langle D_x \rangle}))^{-1}H^s$, N ist eine feste positive Konstante, eine eindeutig bestimmte Lösung*

$$u_k \in C([0, T], \langle D_x \rangle^{C_\alpha} H^s) \cap C^1([0, T], \langle D_x \rangle^{C_\alpha} H^{s-1}),$$

wobei die nichtnegative Konstante C_α unabhängig von k und t_k ist.

• Der Satz 5.2 impliziert zusammen mit dem Beweis zu Satz 5.1, daß für die Familie der Lösungen $\{u_k\}_k$ von k und $t_1, t_2 \in [0, T]$ unabhängige Konstanten C und p_1 existieren mit

$$\|u_k(t_2, \cdot)\|_{H^{s-p_1}(\mathbb{R})} \leq C(\|u_k(t_1, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\partial_t u_k(t_1, \cdot)\|_{(\Lambda^{-1}(\frac{N}{\langle D_x \rangle}))^{-1}H^s(\mathbb{R})})$$

für beliebige $t_1, t_2 \in [0, T]$. Damit tritt *höchstens ein endlicher Ableitungsverlust auf.*

• Im folgenden Satz zeigen wir die tatsächliche Existenz eines endlichen Ableitungsverlustes. Wir untersuchen im folgenden nur den Fall unendlicher Entartung.

Satz 5.3 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 5.1 und die zusätzliche Voraussetzung $\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} = o(t)$ erfüllt. Dann existiert zu jeder beliebig vorgegebenen 1-periodischen, positiven, nicht konstanten und glatten Funktion $b = b(t)$, die konstant in einer Umgebung von $t = 0$ ist, eine Familie von Koeffizienten $\{b_k = b_k(t)\}_k$, die den Voraussetungen von Satz 5.1 mit von k unabhängigen Konstanten erfüllt, es existiert eine Familie von Daten $\{u_{0,k} = u_{0,k}(x),\ u_{1,k} = u_{1,k}(x)\}_k$ aus $H^s(\mathbb{R}) \times (\Lambda^{-1}(\frac{N}{\langle D_x \rangle}))^{-1}H^s(\mathbb{R})$, die auf $t = t_k^{(1)}$ vorgeschrieben werden, und es exisitieren zwei Nullfolgen $\{t_k^{(1)}\}_k$, $\{t_k^{(2)}\}_k$ so, daß die folgenden Abschätzungen erfüllt sind:*

$$\|u_k(t_k^{(2)}, \cdot)\|_{H^{s-p_0}(\mathbb{R})} \geq C_k \|u_k(t_k^{(1)}, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Dabei ist die positive Konstante p_0 unabhängig von k. Weiterhin gilt $\sup_k C_k = \infty$.

Die Aussage von Satz 5.3 liefert sofort einen *endlichen Ableitungsverlust.*

5.2 Der Beweis zu Satz 5.3

Proof. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

Schritt 1: Folgen von Parametern

Für den Beweis benötigen wir Parameterfolgen

- **(A1)** Nullfolgen $\{t_k\}_k$, $\{\rho_k\}_k$, und $\{\delta_k\}_k$,
- **(A2)** eine gegen ∞ strebende Folge $\{h_k\}_k$.

Weiterhin benötigen wir zwei Nullfolgen $\{t_k'\}_k$ und $\{t_k''\}_k$ mit $t_k' = t_k + \rho_k$ und $t_k'' = t_k - \rho_k$. Schließlich brauchen wir drei Folgen von Intervallen $\{I_k\}_k$, $\{I_k'\}_k$ und $\{I_k''\}_k$, die wie folgt definiert sind:

$$I_k = \Big[t_k - \frac{\rho_k}{2}, t_k + \frac{\rho_k}{2}\Big], \quad I_k' = \Big[t_k' - \frac{\rho_k}{2}, t_k' + \frac{\rho_k}{2}\Big], \quad I_k'' = \Big[t_k'' - \frac{\rho_k}{2}, t_k'' + \frac{\rho_k}{2}\Big].$$

Damit I_k, I_k', I_k'' in $(0, T]$ enthalten sind, fordern wir

- **(A3)** $\rho_k = o(t_k)$ für $k \to \infty$.

Aufgaben der Parameterfolgen

• Die Parameterfolge $\{t_k\}_k$ legt die Lokalisierung der Intervalle I_k, I_k' und I_k'' fest.
• Die Parameterfolge $\{\rho_k\}_k$ legt die Länge der Intervalle I_k, I_k' und I_k'' fest.
• Die Parameterfolge $\{\delta_k\}_k$ stellt eine Beziehung zum Verhalten des monotonen Teils $\lambda(t)^2$ des Koeffizienten $a_k(t) = \lambda(t)^2 b_k(t)^2$ auf dem Intervall $[t_k - 4\frac{\rho_k}{3}, t_k + 4\frac{\rho_k}{3}]$ dar (vergleiche mit Voraussetzung (A5)).
• Die Parameterfolge $\{h_k\}_k$ ist eine Folge von Frequenzen und beschreibt das oszillierende Verhalten des oszillierenden Teils $b_k(t)^2$ des Koeffizienten $a_k(t) = \lambda(t)^2 b_k(t)^2$ auf dem Intervall $[t_k - \frac{rho_k}{2}, t_k + \frac{\rho_k}{2}]$. Dabei strebt die Anzahl der Oszillationen $O(h_k \rho_k)$ gegen unendlich für k gegen unendlich.

Schritt 2: Konstruktion einer geeigneten Familie von Koeffizienten

Zur Konstruktion der Familie von Koeffizienten benötigen wir eine monoton wachsende Funktion $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$, die wie folgt definiert ist:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\frac{1}{3}], \\ 1, & x \in [\frac{1}{3}, +\infty). \end{cases}$$

Die Familie von Koeffizienten $\{a_k = a_k(t)\}_k$ mit $a_k = \lambda^2(t) b_k^2(t)$ wird wie folgt definiert:

$$a_k(t) = \begin{cases} \lambda^2(t), & t \in \ [0,T] \setminus (I_k' \cup I_k \cup I_k''); \\ \delta_k b^2(h_k(t-t_k)), & t \in I_k; \\ \delta_k b(0)^2(1-\mu(\frac{t-t_k'}{\rho_k})) + \lambda^2(t)\mu(\frac{t-t_k'}{\rho_k}), & t \in I_k'; \\ \delta_k b(0)^2\mu(\frac{t-t_k''}{\rho_k}) + \lambda^2(t)(1-\mu(\frac{t-t_k''}{\rho_k})), & t \in I_k'', \end{cases}$$

wobei $b(0)$ gerade die positive reelle Zahl ist, die $b(t)$ in Umgebung von $t = 0$ (b ist konstant in einer Umgebung von $t = 0$) annimmt. Damit die Koeffizienten beim Übergang vom Intervall I_k zu I_k' und I_k'' *unendlich oft differenzierbar* bleiben, benötigen wir die Forderung

- **(A4)** $\dfrac{h_k\rho_k}{2} \in \mathbb{N}$

für die Parameter h_k und ρ_k.

Wir wollen diese Definition näher verstehen.

• Beginnen wir mit dem Intervall $[0, t_k - \frac{3}{2}\rho_k]$. Auf diesem Intervall ist $a_k(t) = \lambda^2(t)$, wobei $\lambda = \lambda(t)$ den Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt. Damit ist a_k auf diesem Intervall *monoton wachsend*.

• Die Definition auf dem Intervall $I_k'' = [t_k - \frac{3}{2}\rho_k, t_k - \frac{1}{2}\rho_k]$ ist wie folgt gewählt: Auf dem Intervall $[t_k - \frac{3}{2}\rho_k, t_k - \frac{4}{3}\rho_k]$ bleibt der Koeffizient $a_k(t) = \lambda^2(t)$. Auf dem Intervall $[t_k - \frac{2}{3}\rho_k, t_k - \frac{1}{2}\rho_k]$ ist der Koeffizient a_k konstant mit $a_k(t) = \delta_k b(0)^2$. Dazwischen ist der Koeffizient a_k *unendlich oft differenzierbar fortgesetzt* ohne ein wesentliches oszillierendes Verhalten zu besitzen.

• Kommen wir zu dem *interessanten Intervall* $I_k = [t_k - \frac{1}{2}\rho_k, t_k + \frac{1}{2}\rho_k]$. In $t = t_k - \frac{1}{2}\rho_k$ gilt $a_k(t) = \delta_k b^2(-\frac{h_k\rho_k}{2})$. Nach der Voraussetzung (A4) ist das Argument von b^2 eine ganze Zahl. Da b als 1-periodisch vorausgesetzt ist und $b(t) = b(0)$ in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ ist, gibt es ein kleines Intervall um $t_k - \frac{1}{2}\rho_k$, in welchem $a_k(t) = \delta_k b(0)^2$ konstant ist. Damit ist der Übergang von I_k'' zu a_k unendlich oft differenzierbar. Nach diesem konstanten Verhalten setzen Oszillationen ein, ein wildes oszillierendes Verhalten, welches durch das Verhältnis von h_k zu ρ_k beschrieben werden kann. Die gleiche Argumentation wie für $t = t_k - \frac{1}{2}\rho_k$ liefert für $t = t_k + \frac{1}{2}\rho_k$, daß $a_k = \delta_k b(0)^2$ konstant in einem kleinen Intervall um $t = t_k + \frac{1}{2}\rho_k$ ist.

• Die Definition auf dem Intervall $I_k' = [t_k + \frac{1}{2}\rho_k, t_k + \frac{3}{2}\rho_k]$ ist wie folgt gewählt: Auf dem Intervall $[t_k + \frac{1}{2}\rho_k, t_k + \frac{2}{3}\rho_k]$ ist der Koeffizient a_k konstant mit $a_k(t) = \delta_k b(0)^2$. Auf dem Intervall $[t_k + \frac{4}{3}\rho_k, t_k + \frac{3}{2}\rho_k]$ bleibt der Koeffizient $a_k(t) = \lambda^2(t)$. Dazwischen ist der Koeffizient a_k *unendlich oft differenzierbar fortgesetzt* ohne ein wesentliches oszillierendes Verhalten zu besitzen.

• Schließen wir mit dem Intervall $[t_k+\frac{3}{2}\rho_k, T]$. Auf diesem Intervall ist $a_k(t) = \lambda^2(t)$, wobei $\lambda = \lambda(t)$ den Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt. Damit ist a_k auf diesem Intervall *monoton wachsend.*

Um eine entsprechende Struktur des Koeffizienten aus Satz 5.1 zu erhalten, definieren wir die Familie $\{b_k = b_k(t)\}_k$ oszillierender Teile von $\{a_k\}_k$ durch

$$b_k^2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,T] \setminus (I_k' \cup I_k \cup I_k''); \\ \frac{1}{\lambda^2(t)}\delta_k b^2(h_k(t-t_k)), & t \in I_k; \\ \frac{1}{\lambda^2(t)}\delta_k b(0)^2(1-\mu(\frac{t-t_k'}{\rho_k})) + \mu(\frac{t-t_k'}{\rho_k}), & t \in I_k'; \\ \frac{1}{\lambda^2(t)}\delta_k b(0)^2\mu(\frac{t-t_k''}{\rho_k}) + (1-\mu(\frac{t-t_k''}{\rho_k})), & t \in I_k''. \end{cases}$$

Schritt 3: *Konkrete Wahl der Parameter*

Wir wählen die Parameterfolgen $\{t_k\}_k$, $\{\rho_k\}_k$, $\{\delta_k\}_k$, $\{h_k\}_k$ mit

$$t_k = \Lambda^{-1}(\exp(-k)), \quad \rho_k = \Big[\Big(\frac{\Lambda(t_k)}{\lambda(t_k)}\Big)^{-1}\Big]^{-1},$$

$$\delta_k = [\lambda(t_k)^{-1}]^{-2}, \quad h_k = 2\Big[\frac{\lambda(t_k)}{\Lambda(t_k)}\Big]\Big[\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}\Big],$$

wobei $[a]$ das Grösste Ganze von a bezeichnet. Kontrollieren wir die Voraussetzungen.

• **(A1)** t_k strebt gegen 0, ρ_k ist im wesentlichen gleich $\frac{\Lambda(t_k)}{\lambda(t_k)}$, strebt somit auch gegen 0, δ_k ist im wesentlichen gleich $\lambda^2(t_k)$, strebt also auch gegen 0,

• **(A2)** h_k ist im wesentlichen gleich $\frac{\lambda(t_k)}{\Lambda(t_k)}\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}$, strebt somit gegen unendlich,

• **(A3)** ρ_k verhält sich wie $\frac{\Lambda(t_k)}{\lambda(t_k)}$, nach Voraussetzung von Satz 5.3 verhält sich dieser Ausdruck wie $o(t_k)$,

• **(A4)** wir erhalten sofort $\frac{h_k\rho_k}{2} = \Big[\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}\Big]$.

Außerdem setzen wir voraus

$$\bullet \quad (\mathbf{A5}) \quad d_0 \le \inf_k \frac{\lambda(t_k)}{\lambda(t_k \pm \frac{4}{3}\rho_k)} \le \sup_k \frac{\lambda(t_k)}{\lambda(t_k \pm \frac{4}{3}\rho_k)} \le d_1$$

mit positiven Konstanten d_0 und d_1.

Beispiel: Wir diskutieren anhand eines Beispiels die Voraussetzung (A5). Vorgelegt sei

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt}\exp\Big(-\exp^{[n]}\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{t^2}\exp\Big(-\exp^{[n]}\frac{1}{t}\Big)\exp^{[n]}\frac{1}{t}\cdots\exp\frac{1}{t},$$

$$\text{folglich } \Lambda(t) = \exp\Big(-\exp^{[n]}\frac{1}{t}\Big), \text{ und } \Lambda^{-1}(s) = \frac{1}{\log^{[n+1]}\frac{1}{s}}.$$

Entsprechend obiger Wahl erhalten wir

$$t_k = \Lambda^{-1}\Big(\exp(-\exp^{[n]} k)\Big) = \frac{1}{k} \text{ mit } k \in \mathbb{N},$$
$$\rho_k \sim \frac{1}{2}\frac{\Lambda(t_k)}{\lambda(t_k)} = \frac{1}{2}\frac{t_k^2}{\exp^{[n]}\frac{1}{t_k}\cdots\exp\frac{1}{t_k}} = \frac{1}{2k^2\exp^{[n]} k\cdots\exp k}.$$

Somit ergibt sich $\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda(t_k)}{\lambda(t_k\pm\frac{1}{2}\rho_k)} = 1$.

Aufgabe 40 Beweisen Sie diese Beziehung!

Schritt 4: Eigenschaften von b_k

Wir wollen jetzt zeigen, daß der im 2.Schritt konstruierte Koeffizient $b = b(t)$ den Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt. Die zusätzlich eingeführte Voraussetzung (A5) liefert

$$0 < b_0 \le \inf_{t\in[0,T]} b_k(t) \le \sup_{t\in[0,T]} b_k(t) \le b_1 < \infty,$$

wobei die Konstanten b_0 und b_1 unabhängig von k sind. Berücksichtigen müssen wir dabei nur, daß $\delta_k \sim \lambda^2(t_k)$ gilt und daß δ_k nur in dem Intervall $[t_k - \frac{4}{3}\rho_k, t_k + \frac{4}{3}\rho_k]$ in der Definition von $b_k(t)$ auftritt.

Zu zeigen haben wir folgende Ungleichungen auf der Menge $I_k \cup I_k' \cup I_k''$:

$$|b_k'(t)| \le C\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\log\frac{1}{\Lambda(t)}; \quad |b_k''(t)| \le C\Big(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\log\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2,$$

wobei die Konstante C unabhängig von k ist. Hierfür benutzen wir natürlich die Voraussetzungen (A1) bis (A5) für $\lambda = \lambda(t)$, insbesondere folgt aus (A5) die Beziehung $\Lambda(t) \sim \Lambda(t_k)$ auf dem Intervall $[t_k - \frac{4}{3}\rho_k, t_k + \frac{4}{3}\rho_k]$, und die konkrete Parameterwahl aus Schritt 3. Wir werden uns das Verhalten der ersten Ableitung $b_k'(t)$ auf I_k anschauen. Wir haben auf I_k die Darstellung $b_k^2(t) = \frac{\delta_k}{\lambda^2(t)} b^2(h_k(t-t_k))$. Als erste Ableitung erhalten wir

$$b_k'(t) = -2\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\frac{\delta_k}{\lambda^2(t)}b^2(h_k(t-t_k)) + 2h_k\frac{\delta_k}{\lambda^2(t)}b(h_k(t-t_k))b'(h_k(t-t_k)).$$

Nutzen wir

$$\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \sim \frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}, \quad h_k \sim \frac{\lambda(t_k)}{\Lambda(t_k)}\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}, \quad \lambda(t) \sim \lambda(t_k),\ \Lambda(t) \sim \Lambda(t_k) \text{ auf } I_k,$$

dann folgt sofort die Abschätzung

$$|b_k'(t)| \le C\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\log\frac{1}{\Lambda(t)} \text{ auf } I_k$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten C.

Schritt 5: Konkrete Wahl der Daten

Es sei $\chi = \chi(r) \in [0,1]$ eine abschneidende Funktion aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$, wobei $\chi \equiv 1$ für $|r| \le 1$ und $\chi \equiv 0$ für $|r| \ge 2$ definiert wird. Wir wählen für große k die folgenden Daten:

$$u_{0,k}(x) = \exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big)\chi\Big(\frac{x}{(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^2 P_k}\Big), \quad u_{1,k}(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei

$$P_k = 2\pi\frac{\sqrt{\delta_k}}{h_k\xi} \sim \Lambda(t_k)\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}\Big)^{-1}$$

definiert ist. Nach dieser Fixierung wollen wir für $s \ge 0$ die Norm $\|u_{0,k}\|_{H^s(\mathbb{R})}$ abschätzen. Es sei zuerst s ganzzahlig. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$, $m \le s$

$$\begin{aligned}
\|u_{0,k}\|^2_{H^m(\mathbb{R})} &= \int\limits_{|x|\le 2(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^2 P_k} |d_x^m u_{0,k}(x)|^2 dx \\
&= \int\limits_{|x|\le 2(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^2 P_k} \Big|\sum_{0\le m_1\le m}\binom{m}{m_1} d_x^{m_1}\exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big) d_x^{m-m_1}\chi\Big(\frac{x}{(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^2 P_k}\Big)\Big|^2 dx \\
&\le C_m\Big(\Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)^m + \frac{1}{(\Lambda(t_k)\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^m} + 1\Big)^2\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}\Big)^2 P_k.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich somit für alle $s \ge 0$, $s \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{0,k}\|_{H^s(\mathbb{R})} \le C\Big(\Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)^s + \frac{1}{(\Lambda(t_k)\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^s} + 1\Big)\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}\Big)\sqrt{P_k}.$$

Durch Interpolation erhalten wir diese Beziehung auch für alle nicht ganzzahligen $s \ge 0$.

Aufgabe 41 Versuchen sie ausgehend von einem Interpolationssatz die letzte Beziehung für alle nicht ganzzahligen s herzuleiten.

Schritt 6: Cauchy-Probleme auf I_k

Wir studieren folgende Cauchy-Probleme auf I_k:

$$u_{tt} - \delta_k b^2(h_k(t-t_k))u_{xx} = 0,\ u(t_k,x) = u_{0,k}(x),\ u_t(t_k,x) = 0,\ t \in [t_k - \frac{\rho_k}{2}, t_k + \frac{\rho_k}{2}].$$

Später interessieren wir uns für die eindeutig bestimmte Lösung $u_k = u_k(t_k + \frac{\rho_k}{2}, x)$ auf der Menge $\{|x| \le P_k\}$. Bestimmen wir das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen

u_k auf $t = t_k + \frac{\rho_k}{2}$ über der Menge $\{|x| \le P_k\}$ bezüglich dem Datum $u_{0,k}$ auf $t = t_k$. Falls wir auf $t = t_k \pm \frac{\rho_k}{2}$ die Variable x aus der Menge $\{|x| \le P_k\}$ nehmen, dann wird die Lösung $u(t_k + \frac{\rho_k}{2}, x)$ durch die Daten auf der Menge $\{|x| \le P_k + O(\frac{\rho_k\sqrt{\delta_k}}{2})\}$ beeinflußt. Nutzen wir $\rho_k\sqrt{\delta_k} = O(\Lambda(t_k))$ und $P_k = \Lambda(t_k)(\log \frac{1}{\Lambda(t_k)})^{-1}$, dann benötigen wir Informationen über die Daten auf der Menge $\{|x| \le O(\log(\frac{1}{\Lambda(t_k)})P_k)\}$. Der Anfangswert $u_{0,k}$ verhält sich auf dieser Menge wie $u_{0,k}(x) = \exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big)$.

Die Transformationen $s = h_k(t - t_k)$, $v(s,x) := u(t,x)$ überführen obiges Cauchy-Problem in das folgende:

$$v_{ss} - \frac{\delta_k}{h_k^2}b^2(s)v_{xx} = 0, \quad v(0,x) = u_{0,k}(x), \quad v_s(0,x) = 0,\ s \in \Big[-\frac{h_k\rho_k}{2}, \frac{h_k\rho_k}{2}\Big],$$

wobei wir jetzt das Datum $u_{0,k}$ mit $u_{0,k}(x) = \exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big)$ voraussetzen. Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u_k = u_k(s,x)$ in der Form $u_k(s,x) = u_{0,k}(x)w(s)$, wobei $w = w(s)$ dem Cauchy-Problem

$$w''(s) + \xi^2 b^2(s)w(s) = 0,\ w(0) = 1,\ w'(0) = 0,\ s \in \Big[-\frac{h_k\rho_k}{2}, \frac{h_k\rho_k}{2}\Big],$$

genügt und wobei ξ wie im Lemma 5.1 gewählt wird. Nach Anwendung von Lemma 5.1 und Rücktransformation erhalten wir für $\{|x| \le P_k\}$

$$u_k\Big(t_k + \frac{\rho_k}{2}, x\Big) = \exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big)w\Big(\frac{\rho_k h_k}{2}\Big), \quad u_k(t_k, x) = \exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big)w(0),$$
$$\text{mit} \quad \Big|w\Big(\frac{\rho_k h_k}{2}\Big)\Big| \sim |\mu_0|^{\frac{\rho_k h_k}{2}}.$$

Schritt 7: Mindestens ein endlicher Ableitungsverlust

Zuerst kümmern wir uns um die Norm $\|u_k(t_k + \frac{\rho_k}{2}, \cdot)\|_{H^{s-p_0}(\{|x|\le P_k\})}$. Es gilt

$$\|u_k(t_k + \frac{\rho_k}{2}, \cdot)\|_{H^{s-p_0}(\{|x|\le P_k\})} \sim \Big(\Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)^{s-p_0} + 1\Big)\sqrt{P_k}|\mu_0|^{\frac{\rho_k h_k}{2}}.$$

Diese Berechnung ergibt sich wie im Schritt 5. Schauen wir uns die Lösungsdarstellung

$$u_k\Big(t_k + \frac{\rho_k}{2}, x\Big) = \exp\Big(i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}x\xi\Big)w\Big(\frac{\rho_k h_k}{2}\Big)$$

genau an, dann ergibt sich $D_x u_k = i\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\xi u_k$ für $\{|x| \le P_k\}$. Damit können wir schlußfolgern

$$\log\langle D_x\rangle \sim \log\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}} \sim \log\frac{1}{\Lambda(t_k)} \sim h_k\rho_k.$$

Folgende Abschätzungen führen jetzt zum Ziel, dabei setzen wir $t_k^{(1)} = t_k,\ t_k^{(2)} = t_k + \frac{\rho_k}{2}$, beide Folgen $\{t_k^{(1)}\}_k,\ \{t_k^{(2)}\}_k\}$ sind Nullfolgen:

$$\|u_k(t_k^{(2)},\cdot)\|_{H^{s-p_0}(\mathbb{R})} \geq \|u_k(t_k^{(2)},\cdot)\|_{H^{s-p_0}(\{|x|\leq P_k\})} \geq C\Big(\Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)^{s-p_0}+1\Big)\sqrt{P_k}|\mu_0|^{\frac{\rho_k h_k}{2}},$$

$$\|u_k(t_k^{(1)},\cdot)\|_{H^{s}(\mathbb{R})} \leq C\Big(\Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)^{s}+\frac{1}{(\Lambda(t_k)\log\frac{1}{\Lambda(t_k)})^s}+1\Big)\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t_k)}\Big)\sqrt{P_k}.$$

Berücksichtigen wir schließlich mit $a = \log|\mu_0| > 0,\ |\mu_0| > 1$

$$|\mu_0|^{\frac{\rho_k h_k}{2}} \sim \exp\Big(a\log\Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)\Big) \sim \Big(\frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}}\Big)^a,\ \frac{h_k}{\sqrt{\delta_k}} \to \infty \text{ für } k\to\infty,$$

dann impliziert die Wahl $p_0 < a$ sofort die gewünschte Abschätzung

$$\|u_k(t_k^{(2)},\cdot)\|_{H^{s-p_0}(\mathbb{R})} \geq C_k\|u_k(t_k^{(1)},\cdot)\|_{H^{s}(\mathbb{R})}$$

mit $\sup_k C_k = \infty$. *Somit tritt der endliche Ableitungsverlust tatsächlich auf.* Damit ist der Satz 5.3 vollständig bewiesen. □

Bemerkung: Der endlich degenerierte Fall ($\lambda(t) = t^l,\ l > 0$) kann in gleicher Weise studiert werden. Wir wählen die Parameterfolgen $\{\rho_k\}_k = \{2^{-(k+3)}\}_k,\ \{t_k\}_k = \{2^{-k}\}_k,\ \{\delta_k\}_k = \{\lambda^2(t_k) = 2^{-2k\ell}\}_k,\ \ \{h_k = 32k2^k\}_k$. Dabei benötigen wir nicht die Voraussetzung $\frac{\Lambda(t)}{\lambda(t)} = o(t)$.

Aufgabe 42 Vollziehen sie die Schritte 1 bis 7 für den endlich degenerierten Fall nach!

Weitere Aufgabenstellungen: Aus den obigen Untersuchungen ergeben sich direkt die folgenden Aufgabenstellungen:

1. Im Satz 5.3 haben wir nur den Fall $\nu(t) = \log\frac{1}{\Lambda(t)}$ studiert. Wir haben gezeigt, daß in diesem Fall ein endlicher Ableitungsverlust entsteht. Es ergibt sich sofort die Frage, ob mit dem gleichen Beweisschema der Fall $\nu(t) = \Big(\log\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^\gamma,\ \gamma \in (0,1)$ behandelt werden und gezeigt werden kann, daß ein *beliebig kleiner Ableitungsverlust tatsächlich auftritt.*

5.3 Unendlicher Regularitätsverlust

Im Gegensatz zum Beweis der Optimalität der Bedingungen, die zu einem endlichen Ableitungsverlust führen (siehe Satz 5.3) können wir *explizit Beispiele* von Cauchy-Problemen angeben, die zu einem *unendlichen Ableitungsverlust* führen. Dazu studieren wir wie gehabt das schwach hyperbolische Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \lambda^2(t)b^2(t)u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x).$$

Wir setzen aber jetzt voraus, daß der Koeffizient $b = b(t)$ eine ganz spezielle Struktur besitzt. Der Koeffizient soll in der Form

$$b(t) := b\Big(\Big(\log \frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2 \log^{[n]} \frac{1}{\Lambda(t)}\Big)$$

vorgegeben sein, wobei $n \geq 1$ und $b = b(s)$ eine glatte, positive, nicht konstante und 1-periodische Funktion sind.

Bemerkung: Falls $n = 0$ ist, dann sind die Voraussetzungen von Satz 5.1 mit $\nu(t) = \log \frac{1}{\Lambda(t)}$ erfüllt, somit haben wir *höchstens einen endlichen Ableitungsverlust.* Für $n \geq 1$ sind die Voraussetzungen von Satz 5.1 mit $\nu(t) = \log \frac{1}{\Lambda(t)} \log^{[n]} \frac{1}{\Lambda(t)}$ erfüllt, das ist eine schwächere Bedingung als im kritischen Fall $n = 0$. Deshalb erwarten wir einen *unendlichen Ableitungsverlust*, d.h. wir haben i.a. keine Sobolevlösung zu vorgegebenen Daten aus einem Sobolevraum. Falls $n \geq 1$ ist, dann kommen wir mit wachsendem n beliebig nah an den kritischen Fall $n = 0$ heran.

Wenden wir uns jetzt dem Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \lambda^2(t) b^2\Big(\Big(\log \frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2 \log^{[n]} \frac{1}{\Lambda(t)}\Big) u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),$$

zu.

Satz 5.4 *Vorgelegt sei das obige Cauchy-Problem, wobei $\lambda = \lambda(t)$ den Voraussetzungen von Satz 5.1 genügt. Falls $n \geq 1$ ist, dann ist das Cauchy-Problem nicht C^∞ korrekt gestellt, d.h. zu vorgegebenen Daten φ, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ exisitiert i.a. keine Lösung $u \in C^2([0,T], C^\infty(\mathbb{R}))$.*

Beweis: *Philosophie des Vorgehens*

Wir setzen voraus, daß das vorgelegte Cauchy-Problem C^∞-korrekt ist. Benutzen wir die Abhängigkeitsgebietseigenschaft, dann können wir die Untersuchungen der C^∞-Korrektheit auf die der H^∞- Korrektheit reduzieren, d.h. zu vorgegebenen Daten φ, $\psi \in H^\infty(\mathbb{R})$ exisitiert i.a. keine Lösung $u \in C^2([0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$.

Wie schon nach der Formulierung von Satz 5.2 können wir auch jetzt bemerken, daß die H^∞-Korrektheit die Existenz von t, $t_0 \in [0,T]$ unabhängigen Konstanten p_1 und C sichert mit

$$\begin{aligned} &E_{s-p_1}(u)(t) \leq C E_s(u)(t_0), \\ \text{d.h. } &\|(\nabla u, \partial_t u)(t,\cdot)\|_{H^{s-p_1}(\mathbb{R})} \leq \|(\nabla u, \partial_t u)(t_0,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

gilt, wie zu sehen bezeichnet $E_s(u)(t)$ die Wellenenergie auf der Basis von H^s.

Die H^∞-Korrektheit kann nach [26] auch wie folgt charakterisiert werden:

Es existieren zwei nichtnegative Konstanten r und C so, daß für jede Lösung u, und für beliebige $t^{(1)}$, $t^{(2)} \in [0,T]$ und $\xi \in \mathbb{R}$ die partielle Fouriertransformierte $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$ der folgenden Abschätzung genügt:

$$|\hat{u}(t^{(2)},\xi)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}(t^{(2)},\xi)\Big| \le C(1+|\xi|)^r \Big(|\hat{u}(t^{(1)},\xi)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}(t^{(1)},\xi)\Big|\Big).$$

Am Ende des Beweises werden wir eine Folge von Lösungen $\{\hat{u}_m(t,\xi)\}_m$ der partiell Fouriertransformierten Ausgangsgleichung

$$\hat{u}_{tt} + \lambda^2(t) b^2\Big(\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2 \log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)\xi^2\hat{u} = 0,$$

eine Folge von Frequenzen $\{\xi_m\}_m$ mit $\lim_{m\to\infty}|\xi_m| \to \infty$, und eine Folge von Zeitpaaren $\{(t_m^{(1)}, t_m^{(2)})\}_m$ mit $0 < t_m^{(1)} < t_m^{(2)} < T$, und $\lim_{m\to\infty} t_m^{(1)} = \lim_{m\to\infty} t_m^{(2)} = 0$ konstruieren mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned}&|\hat{u}_m(t_m^{(2)},\xi_m)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t_m^{(2)},\xi_m)\Big| \\ &\quad \ge C_0 \exp(C_1 \log|\xi_m| (\log^{[n]}|\xi_m|)^{\frac{1}{2}}) \Big(|\hat{u}_m(t_m^{(1)},\xi_m)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t_m^{(1)},\xi_m)\Big|\Big).\end{aligned}$$

Das widerspricht der aus [26] bekannten Charakterisierung der H^∞-Korrektheit.

Schritt 1: Herleitung einer Hilfsgleichung

Wir setzen $s = \log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}(\log\frac{1}{\Lambda(t)})^2$ und definieren $w(s,\xi) := \tau^{\frac{1}{2}}(s)\hat{u}(t(s),\xi)$ mit $\tau(s) := -\frac{ds}{dt}(t(s))$. Dann erhalten wir die Hilfsgleichung

$$w_{ss}(s,\xi) + b^2(s)\lambda(s,\xi)w(s,\xi) = 0, \quad (s,\xi) \in [s(T),\infty) \times \mathbb{R},$$

wobei sich der Teil $\lambda(s,\xi)$ des Koeffizienten in folgender Form ergibt:

$$\lambda(s,\xi) = \lambda_1(s,\xi) + \lambda_2(s),\ \lambda_1(s,\xi) = \frac{\lambda^2(t(s))|\xi|^2}{\tau^2(s)},\ \lambda_2(s) = \frac{\theta(s)}{b^2(s)\tau^2(s)},\ \theta = \frac{(\tau')^2 - 2\tau''\tau}{4}.$$

Diese Art der Transformation ist dazu geeignet, den oszillierenden Teil des Koeffizienten in der Form $b^2(s)$ (entsprechend der Form der Floquet Theorie) zu erhalten.

Zuerst zeigen wir, daß der Anteil $\lambda_2(s)$ von $\lambda(s,\xi)$ unwesentlich ist und damit nur $\lambda_1(s,\xi)$ von Bedeutung ist. Formale Berechnungen ergeben

$$\begin{aligned}\frac{\tau'(s)^2 - 2\tau''(s)\tau(s)}{\tau^2(s)} &= \frac{1}{\tau^4(s)}\Big(3\Big(\frac{d^2s}{dt^2}\Big)^2 - 2\frac{d^3s}{dt^3}\frac{ds}{dt}\Big) \\ &\sim \Big(2\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\log\frac{1}{\Lambda(t)}\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^{-4}\Big(12\Big(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\Big)^4\Big(\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2\end{aligned}$$

$$+12\Big(\frac{\lambda'(t)\Lambda(t)-\lambda^2(t)}{\Lambda^2(t)}\log\frac{1}{\Lambda(t)}\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2$$
$$-8\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\frac{\lambda''(t)\Lambda(t)-\lambda'(t)\lambda(t)}{\Lambda^2(t)}\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t)}\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2$$
$$+16\Big(\frac{\lambda(t)}{\Lambda(t)}\Big)^2\frac{\lambda'(t)\Lambda(t)-\lambda^2(t)}{\Lambda^2(t)}\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t)}\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2\Big).$$

Damit gilt $\lim_{s\to\infty}\lambda_2(s)=0$.
Für die weiteren Berechnungen benötigen wir (wir studieren nur noch den Fall $n\geq 2$)

$$s=\log^{[n]}\frac{1}{\Lambda(t)}\Big(\log\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2 \text{ liefert } \Big(\log\frac{1}{\Lambda(t)}\Big)^2\sim\frac{s}{\log^{[n-1]}s^{\frac{1}{2}}}.$$

Schritt 2: Zum asymptotischen Verhalten

Wir definieren eine Funktion $s_\xi=s(\xi)$ implizit durch

$$\lambda(s,\xi)\sim\frac{1}{4}\frac{1}{s\log^{[n-1]}s^{\frac{1}{2}}\exp\Big(2\Big(\frac{s}{\log^{[n-1]}s^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)}|\xi|^2+\lambda_2(s)=\lambda_0,$$

wobei die Konstante λ_0 später gewählt wird. Wir verraten an dieser Stelle, daß λ_0 aus einem Instabilitätsintervall für den Koeffizienten $b^2(s)$ gewählt wird. Die Definition für s_ξ impliziert $s_\xi\to\infty$ falls $\xi\to\infty$ strebt. Damit ist für sehr große $|\xi|$ wegen $\lambda_2(s)\to 0$ für $s\to\infty$ folgende Beziehung näherungsweise erfüllt:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{s\log^{[n-1]}s^{\frac{1}{2}}\exp\Big(2\Big(\frac{s}{\log^{[n-1]}s^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)}|\xi|^2\sim\lambda_0.$$

Wir interessieren uns später für große s, d.h. in Konsequenz für kleine t in der Nähe von $t=0$. Aus diesem Grunde benötigen wir das asymptotische Verhalten von λ_1 und λ_2 um große Werte s_ξ.

Im folgenden Lemma führen wir eine Variable δ ein. Es ist dabei einerseits zu beachten, daß δ sehr groß werden darf für $s_\xi\to\infty$, daß aber andererseits die obere Grenze für δ im Vergleich zu s_ξ klein sein muß für $s_\xi\to\infty$.

Lemma 5.2 *Für $0\leq\delta\leq\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$, und hinreichend große s_ξ gilt*

$$|\lambda_1(s_\xi-\delta,\xi)-\lambda_1(s_\xi,\xi)|\leq C\lambda_1(s_\xi,\xi)(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}},$$
$$|\lambda_2(s_\xi-\delta)-\lambda_2(s_\xi)|\leq C\lambda_2(s_\xi)((\log|\xi|\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|\lambda(s_\xi-\delta,\xi)-\lambda(s_\xi)|\leq C\lambda(s_\xi,\xi)(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Aus der impliziten Definition von s_ξ erhalten wir

$$\frac{1}{4}(\log|\xi|)^2 \le \frac{s_\xi}{\log^{[n-1]} s_\xi^{\frac{1}{2}}} \le (\log|\xi|)^2.$$

Folglich gilt

$$C_1(\log|\xi|)^2 \log^{[n]}|\xi| \le s_\xi \le C_2(\log|\xi|)^2 \log^{[n]}|\xi|.$$

Für große $|\xi|$ und $0 \le \delta \le \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$ haben wir

$$\Big|\frac{\delta}{s_\xi}\Big| \le C\frac{1}{\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}},$$

und, folglich,

$$\begin{aligned}
&|\lambda_1(s_\xi-\delta,\xi)-\lambda_1(s_\xi,\xi)| \\
&\quad = \left|\frac{|\xi|^2}{(s_\xi-\delta)\log^{[n-1]}(s_\xi-\delta)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(2\Big(\frac{s_\xi-\delta}{\log^{[n-1]}(s_\xi-\delta)^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)}-\lambda_1(s_\xi,\xi)\right| \\
&\quad \sim \left|\frac{|\xi|^2}{(s_\xi-\delta)\log^{[n-1]} s_\xi^{\frac{1}{2}}\exp\Big(2\Big(\frac{s_\xi-\delta}{\log^{[n-1]}(s_\xi-\delta)^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)}-\lambda_1(s_\xi,\xi)\right| \\
&\quad \sim \lambda_1(s_\xi,\xi)\left|\Big(1-\frac{\delta}{s_\xi}\Big)^{-1}\exp\Big(-2\Big(\frac{s_\xi}{\log^{[n-1]} s_\xi^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\Big(1-\frac{\delta}{s_\xi}\Big)^{\frac{1}{2}}-1\Big)\Big)-1\right| \\
&\quad \le C\lambda_1(s_\xi,\xi)(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Beachten wir $\lambda_2(s) \sim \frac{1}{s\log^{[n-1]} s^{\frac{1}{2}}}$, dann können wir schlußfolgern

$$\begin{aligned}
&|\lambda_2(s_\xi-\delta)-\lambda_2(s_\xi)| \\
&\quad \sim \Big|\frac{1}{(s_\xi-\delta)\log^{[n-1]}(s_\xi-\delta)^{\frac{1}{2}}}-\lambda_2(s_\xi)\Big| \le \Big|\frac{1}{(s_\xi-\delta)\log^{[n-1]}(s_\xi)^{\frac{1}{2}}}-\lambda_2(s_\xi)\Big| \\
&\quad \sim \lambda_2(s_\xi)\Big|\Big(1-\frac{\delta}{s_\xi}\Big)^{-1}-1\Big| \le C\lambda_2(s_\xi)\frac{1}{\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung Berücksichtigen wir $\lambda_2(s) \to 0$ für $s \to \infty$ dann liefert uns die letzte Abschätzung noch einmal die unwesentliche Rolle von $\lambda_2(s)$. Im weiteren konzentrieren wir uns somit auf $\lambda(s,\xi) = \lambda_1(s,\xi)$.

Schritt 3: Anwendung der Floquet-Theory

In Abschnitt 4.2 haben wir uns für die Fundamentallösung $X = X(s, s_0)$ als Lösung des Cauchy Problems

$$\frac{d}{ds}X = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_0 b^2(s) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X =: A(s)X, \qquad X(s_0, s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

interessiert. Wir haben dort die Verbindung dieser Fundamentallösung zu Lösungen von $w_{ss} + \lambda_0 b^2(s)w = 0$ dargestellt und Eigenschaften dieser studiert. Aus der vorausgesetzten 1-Periodizität von $b = b(s)$ folgt sofort die Unabhängigkeit von $X(s_0 - 1, s_0)$ von $s_0 \in \mathbb{N}$. Das folgende wichtige Resultat der Floquet-Theorie wiederholen wir noch einmal (vgl. mit Lemma 4.4).

Lemma 5.3 (Floquet-Theorie, vgl. mit [23]) *Es sei $b = b(s) \in C^2$ eine nicht konstante und positive 1-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann exisitert ein positives λ_0 aus einem Instabilitätsintervall für $w_{ss} + \lambda_0 b^2(s)w = 0$, d.h., die Fundamentalmatrix $X(s_0 - 1, s_0)$ hat Eigenwerte μ_0 und μ_0^{-1} mit $|\mu_0| > 1$.*

Wir starten jetzt von einem großen $s_\xi \in \mathbb{N}$ und werden die Fundamentalmatrix für kleiner werdende s untersuchen. Dabei wird die untere Grenze möglicher s durch die obere Grenze von δ aus Lemma 5.2 bestimmt. Dieses Vorgehen entspricht in Konsequenz einem kleinen t_ξ, und kleiner werdende s entsprechen der Untersuchung der Fundamentalmatrix für wachsende t. Wir setzen dazu

$$X(s_\xi - 1, s_\xi) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Das Lemma 5.3 liefert die Eigenwerte μ_0 und μ_0^{-1}. Deshalb gilt

$$x_{11} + x_{22} = \mu_0 + \mu_0^{-1},$$

bzw.

$$|x_{11} - \mu_0| + |x_{22} - \mu_0| \geq |\mu_0 - \mu_0^{-1}|.$$

Daraus folgt

$$\max\{|x_{11} - \mu_0|, |x_{22} - \mu_0|\} \geq \frac{1}{2}|\mu_0 - \mu_0^{-1}|.$$

Unter der Voraussetzung

$$|x_{11} - \mu_0| \geq \frac{1}{2}|\mu_0 - \mu_0^{-1}|,$$

der andere Fall kann analog behandelt werden, haben wir

$$|x_{22} - \mu_0^{-1}| \geq \frac{1}{2}|\mu_0 - \mu_0^{-1}|.$$

Für ganzzahliges $m \geq 0$, dabei stimmt die obere Grenze von m im wesentlichen mit der von δ überein, betrachten wir folgende Gleichung:

$$w_{ss}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s_\xi - m + s)\log^{[n-1]}(s_\xi - m + s)^{\frac{1}{2}}\exp\left(2\left(\frac{s_\xi-m+s}{\log^{[n-1]}(s_\xi-m+s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}|\xi|^2b^2(s_\xi-m+s)w = 0,$$

die sich wegen der 1-Periodizität von $b = b(s)$ in der Form

$$w_{ss}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s_\xi - m + s)\log^{[n-1]}(s_\xi - m + s)^{\frac{1}{2}}\exp\left(2\left(\frac{s_\xi-m+s}{\log^{[n-1]}(s_\xi-m+s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}|\xi|^2b^2(s_\xi+s)w = 0$$

schreiben lässt. *Wir gehen also im wesentlichen m Schritte von s_ξ zurück.* Es sei $X_m(s, s_1)$ die dazu assoziierte Lösung des folgenden Systems erster Ordnung:

$$\frac{d}{ds}X_m(s, s_1)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4}\frac{1}{(s_\xi-m+s)\log^{[n-1]}(s_\xi-m+s)^{\frac{1}{2}}\exp\left(2\left(\frac{s_\xi-m+s}{\log^{[n-1]}(s_\xi-m+s)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}|\xi|^2b^2(s_\xi + s) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_m(s, s_1),$$
$$X_m(s_1, s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.4 *Es gilt* $\max_{s,s_1\in[-1,0]} \|X_m(s, s_1)\| \leq \exp(C\lambda_0)$ *für* $0 \leq m \leq \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$ *(vergleiche die Intervalle für δ und m). Somit sind alle Fundamentallösungen $X_m(s, s_1)$ gleichmäßig normbeschränkt sofern m obiger Bedingung genügt.*

Beweis: Bezeichnen wir mit A_m die Koeffizientenmatrix obigen Systems dann erhalten wir mit dem Matrizanten die Lösungsdarstellung

$$X_m(s, s_1) = I + \sum_{j=1}^{\infty}\int_{s_1}^{s} A_m(r_1, \xi)\int_{s_1}^{r_1} A_m(r_2, \xi)\cdots\int_{s_1}^{r_{j-1}} A_m(r_j, \xi)dr_j\cdots dr_1.$$

Mit Lemma 5.2 haben wir

$$\max_{s,s_1\in[-1,0]} \|X_m(s, s_1)\| \leq \exp(1 + b_1^2|\lambda(s_\xi - m, \xi) - \lambda(s_\xi, \xi) + \lambda_0|)$$

$$\leq \exp(1 + b_1^2(1 + \varepsilon)\lambda_0) \leq \exp(C\lambda_0),$$

wobei $b_1 = \max_s\{b(s)\}$ und $0 \leq m \leq \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$ verwendet werden. □

Lemma 5.5 *Es gilt*

$$\|X_m(-1, 0) - X(s_\xi - 1, s_\xi)\| \leq C(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}$$

für $0 \leq m \leq \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$. *Damit ist für große* ξ *die Matrix* $X_m(-1,0)$ *nur unwesentlich von* $X(s_\xi - 1, s_\xi)$ *entfernt.*

Aufgabe 43 Machen Sie sich noch einmal klar was es bedeutet, daß die Matrix $X_m(-1,0)$ nur unwesentlich von $X(s_\xi - 1, s_\xi)$ entfernt liegt. Welche Konsequenzen kann man daraus ziehen?

Beweis: Zuerst bemerken wir, daß $X(s_\xi + s, s_\xi) = X(s,0)$ gilt wegen $s_\xi \in \mathbb{N}$ und der 1-Periodizität von $b(s)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{ds}X_m(s,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -\lambda(s_\xi,\xi)b^2(s) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_m(s,0) \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \Big(\lambda(s_\xi,\xi) - \lambda(s_\xi - m + s,\xi)\Big)b^2(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_m(s,0)\end{aligned}$$

mit $X_m(0,0) = I$. Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{ds}\Big(X_m(s,0) - X(s,0)\Big) &= \begin{pmatrix} 0 & -\lambda(s_\xi,\xi)b^2(s) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big(X_m(s,0) - X(s,0)\Big) \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \Big(\lambda(s_\xi,\xi) - \lambda(s_\xi - m + s,\xi)\Big)b^2(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_m(s,0)\end{aligned}$$

mit dem Anfangsdatum $X_m(0,0) - X(0,0) = 0$.

In diesem System 1.Ordnung können wir unsere Strategie gut erläutern. *Einerseits ist* $\lambda(s_\xi,\xi)b^2(s) = \lambda_0 b^2(s)$, *dadurch kommt Instabilität ins Spiel. Andererseits folgt aus Lemma 5.2*

$$|\lambda(s_\xi,\xi) - \lambda(s_\xi - m + s,\xi)| \leq C\lambda_0(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}$$

für $0 \leq m \leq \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$. *Mit der gleichmäßigen Beschränktheit von* $\|X_m(r,0)\|$ *aus Lemma 5.4 ergibt sich*

$$\|X_m(s,0)-X(s,0)\| \leq \Big|\int_0^s C\lambda_0\|X_m(r,0)-X(r,0)\|dr + \int_0^s C\lambda_0(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}\|X_m(r,0)\|dr\Big|.$$

Mit Hilfe der Gronwallschen Ungleichung schlußfolgern wir für $s = -1$

$$\|X_m(-1,0) - X(-1,0)\| = \|X_m(-1,0) - X(s_\xi - 1, s_\xi)\| \leq C\lambda_0(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist die Aussage des Lemmas bewiesen. □

Lemma 5.6 *Es gilt*

$$\|X_m(-1,0) - X_{m-1}(-1,0)\| \leq C(\log|\xi|\log^{[n]}|\xi|)^{-1}$$

für $0 < m \le \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$.

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 5.5 haben wir

$$\frac{d}{ds}\Big(X_m(s,0) - X_{m-1}(s,0)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda(s_\xi - m + s, \xi)b^2(s) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big(X_m(s,0) - X_{m-1}(s,0)\Big)$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & \Big(\lambda(s_\xi - (m-1) + s, \xi) - \lambda(s_\xi - m + s, \xi)\Big)b^2(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_{m-1}(s,0)$$

mit Anfangsdatum $X_m(0,0) - X_{m-1}(0,0) = 0$. Gehen wir analog wie im Beweis von Lemma 5.2 vor, dann ergeben sich für $0 < m \le \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &|\lambda(s_\xi - m + r, \xi) - \lambda(s_\xi - (m-1) + r, \xi)| \\ &\quad \sim \lambda(s_\xi - (m-1) + r, \xi)\Big|\Big(1 - \frac{1}{s_\xi - (m-1) + r}\Big)^{-1} \\ &\qquad \times \exp\Big(- 2\Big(\frac{s_\xi - (m-1) + r}{\log^{[n-1]}(s_\xi - (m-1) + r)^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\Big(1 - \frac{1}{s_\xi - (m-1) + r}\Big)^{\frac{1}{2}} - 1\Big)\Big) - 1\Big| \\ &\quad \le \frac{C\lambda_0}{s_\xi - (m-1) + r}\Big(\frac{s_\xi - (m-1) + r}{\log^{[n-1]}(s_\xi - (m-1) + r)^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}} \le C\lambda_0(\log|\xi|\log^{[n]}|\xi|)^{-1}. \end{aligned}$$

Wie am Ende des Beweises von Lemma 5.5 schlußfolgern wir die gewünschte Abschätzung

$$\|X_m(-1,0) - X_{m-1}(-1,0)\| \le C\lambda_0(\log|\xi|\log^{[n]}|\xi|)^{-1}$$

für $0 < m \le \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$. □

Die Eigenwertbeziehungen

$$\det(I\mu_0 - X(s_\xi - 1, s_\xi)) = 0, \quad \det(I\mu_m - X_m(-1,0)) = 0$$

und die aus Lemma 5.5 bekannte Abschätzung

$$\|X_m(-1,0) - X(s_\xi - 1, s_\xi)\| \le C(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}}$$

sichern für die Matrix $X_m(-1,0)$, mit der Eigenschaft $\det X_m(-1,0) = 1$, Eigenwerte μ_m und μ_m^{-1}, die folgender Relation genügen:

$$|\mu_m - \mu_0| \le C(\log^{[n]}|\xi|)^{-\frac{1}{2}} \le \varepsilon$$

für jedes positive ε und für hinreichend große s_ξ. Wählen wir $\varepsilon \le \frac{|\mu_0|-1}{2}$, dann gilt

$$|\mu_m| \ge \frac{1}{2}(|\mu_0| + 1) \ge 1 + \varepsilon.$$

Somit sind die Eigenwerte μ_m gleichmäßig größer als 1, und μ_m und μ_m^{-1} gleichmäßig verschieden für jedes m. Mit der Bezeichnung

$$X_m(-1,0) = \begin{pmatrix} x_{11}(m) & x_{12}(m) \\ x_{21}(m) & x_{22}(m) \end{pmatrix}$$

haben wir

$$|x_{11}(m) - \mu_m| \geq |x_{11} - \mu_0| - (|x_{11}(m) - x_{11}| + |\mu_0 - \mu_m|) \geq \frac{1}{4}|\mu_0 - \mu_0^{-1}|.$$

Entsprechend gilt

$$|x_{22}(m) - \mu_m^{-1}| \geq \frac{1}{4}|\mu_0 - \mu_0^{-1}|.$$

Nach Lemma 5.6 ist

$$|x_{ij}(m) - x_{ij}(m-1)| \leq C(\log|\xi| \log^{[n]}|\xi|)^{-1}$$

bzw.

$$|\mu_m - \mu_{m-1}| \leq C(\log|\xi| \log^{[n]}|\xi|)^{-1}.$$

Schritt 4: Energieabschätzung für ein Modellproblem

Die folgende Aussage stellt das Herzstück unseres Beweises dar.

Lemma 5.7 *Es sei m_0 die grösste ganze Zahl, die $0 \leq m \leq \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}$ erfüllt. Dann erfüllt für $(s,\xi) \in [s(1),\infty) \times \mathbb{R}$ die Lösung $w = w(s,\xi)$ des Cauchy-Problems*

$$w_{ss}(s,\xi) + b^2(s)\lambda(s,\xi)w(s,\xi) = 0, \quad w(s_\xi,\xi) = 1, \; \frac{d}{ds}w(s_\xi,\xi) = \frac{x_{12}(0)}{\mu_0 - x_{11}(0)}$$

die Abschätzung

$$\left|\frac{d}{ds}w(s_\xi - m_0 - 1,\xi)\right| + |w(s_\xi - m_0 - 1,\xi)| \geq C\exp(C_1 \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}).$$

Aufgabe 44 Machen Sie sich die Bedeutung der letzten Abschätzung noch einmal klar, insbesondere wenn Sie diese in der Form

$$\begin{aligned} &\left|\frac{d}{ds}w(s_\xi - m_0 - 1,\xi)\right| + |w(s_\xi - m_0 - 1,\xi)| \\ &\quad \geq C\exp(C_1 \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}})\Big(\left|\frac{d}{ds}w(s_\xi,\xi)\right| + |w(s_\xi,\xi)|\Big) \end{aligned}$$

schreiben.

Beweis: Die Funktion $w(s_\xi - m_0 + s, \xi)$ genügt

$$\frac{d^2}{ds^2} w + \lambda(s_\xi - m + s, \xi) b(s_\xi + s) w = 0$$

mit $m = m_0$. Damit ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ds} w(s_\xi - m_0 - 1, \xi) \\ w(s_\xi - m_0 - 1, \xi) \end{pmatrix} = X_{m_0}(-1,0) X_{m_0-1}(-1,0) \cdots X_0(-1,0) \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} w(s_\xi) \\ w(s_\xi) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$B_m = \begin{pmatrix} \frac{x_{12}(m)}{\mu_m - x_{11}(m)} & 1 \\ 1 & \frac{x_{21}(m)}{\mu_m^{-1} - x_{22}(m)} \end{pmatrix}$$

ist ein Diagonalisator für $X_m(-1,0)$, d.h.,

$$X_m(-1,0) B_m = B_m \begin{pmatrix} \mu_m & 0 \\ 0 & \mu_m^{-1} \end{pmatrix}.$$

Hier wird das Verhalten der Eigenwerte von $X_m(-1,0)$ berücksichtigt. Mit $\det X_m(-1,0) = 1$ und der Spur von $X_m(-1,0)$ ist gleich $\mu_m + \mu_m^{-1}$ erhalten wir

$$\det B_m = \frac{\mu_m - \mu_m^{-1}}{\mu_m^{-1} - x_{22}(m)}.$$

Lemma 5.4 liefert uns die Informationen

$$|\mu_m^{-1} - x_{22}(m)| \le C, \quad |x_{ij}(m)| \le C,$$

und mit $|\mu_m| \ge 1 + \varepsilon$ ergibt sich

$$|\det B_m| \ge C > 0, \quad \|B_m\| \le C, \quad \|B_m^{-1}\| \le C$$

für $0 \le m \le \log|\xi| (\log^{[n]} |\xi|)^{\frac{1}{2}}$. Weiterhin schlußfolgern wir aus

$$|x_{ij}(m) - x_{ij}(m-1)| \le C(\log|\xi| \log^{[n]} |\xi|)^{-1}$$

sofort

$$\|B_{m-1}^{-1} B_m - I\| = \|B_{m-1}^{-1}(B_m - B_{m-1})\| \le C(\log|\xi| \log^{[n]} |\xi|)^{-1}.$$

Mit den Bezeichnungen $G_m := B_{m-1}^{-1} B_m - I$ haben wir

$$\begin{aligned} & X_{m_0}(-1,0) X_{m_0-1}(-1,0) \cdots X_0(-1,0) \\ = \;& B_{m_0} \begin{pmatrix} \mu_{m_0} & 0 \\ 0 & \mu_{m_0}^{-1} \end{pmatrix} (I + G_{m_0}) \cdots (I + G_1) \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1} \end{pmatrix} B_0^{-1}. \end{aligned}$$

Wir zeigen schließlich, daß das $(1,1)$ Element y_{11} der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu_{m_0} & 0 \\ 0 & \mu_{m_0}^{-1} \end{pmatrix} (I+G_{m_0})\cdots(I+G_1) \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_0^{-1} \end{pmatrix}$$

nach unten abgeschätzt werden kann durch $C_0 \exp(C_1 \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}})$. Zuerst haben wir

$$\|B_{m-1}^{-1}B_m - I\| = \|B_{m-1}^{-1}(B_m - B_{m-1})\| \leq C(\log|\xi| \log^{[n]}|\xi|)^{-1}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod\limits_{k=1}^{m_0} \mu_k & 0 \\ 0 & \prod\limits_{k=1}^{m_0} \mu_k^{-1} \end{pmatrix} + M_1 + \cdots + M_{m_0},$$

wobei M_l die Matrix der Summe aller Faktoren ist, die exakt l der Matrizen G_k, $k = 1, \cdots, m_0$, enthalten. Es gilt natürlich die Abschätzung

$$\|M_l\| \leq \left(\prod_{k=1}^{m_0} |\mu_l|\right) \left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_l\leq m_0} \prod_{j=1}^{l} \|G_{ij}\|\right).$$

Nutzen wir

$$\|G_l\| \leq C(\log|\xi| \log^{[n]}|\xi|)^{-1}, \; l = 1, \cdots, m_0,$$

dann gilt

$$\|M_l\| \leq \left(\prod_{k=1}^{m_0} |\mu_l|\right) \begin{pmatrix} m_0 \\ l \end{pmatrix} C(\log|\xi| \log^{[n]}|\xi|)^{-l}.$$

Folglich ist

$$|y_{11}| \geq \left(\prod_{k=1}^{m_0} |\mu_k|\right) \left(2 - \left(1 + \frac{C}{\log|\xi| \log^{[n]}|\xi|}\right)^{\log|\xi|\left(\log^{[n]}|\xi|\right)^{1/2}}\right) \geq \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{m_0} |\mu_k|.$$

Andererseits ist $|y_{mp}| \leq \nu \prod\limits_{k=1}^{m_0} |\mu_k|$, $\nu > 0$ beliebig klein, für $(m,p) \neq (1,1)$. Damit wird die gewünschte Aussage wegen

$$\prod_{k=1}^{m_0} |\mu_k| \geq C(1+\varepsilon)^{m_0} \geq C(1+\varepsilon)^{\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}}$$

erhalten. $\square$

Schritt 5: Verifikation der Aussage von Satz 5.4

Jetzt haben wir alle Vorbereitungen für den Beweis von Satz 5.4 getroffen. Wir wählen eine Folge $\{\xi_m\}_m$ positiver Frequenzen mit $|\xi_m| \to \infty$ für $m \to \infty$. Für große ξ_m sei $w_m(s,\xi)$ die Lösung aus Lemma 5.7 mit $\xi = \xi_m$. Außerdem wählen wir

$$t_m^{(1)} = t(s_{\xi_m}), \quad t_m^{(2)} = t(s_{\xi_m} - m_0(\xi_m) - 1), \quad \hat{u}_m(t,\xi_m) = \tau^{-\frac{1}{2}}(s(t)) w_m(s(t),\xi_m).$$

Beachten wir

$$\Lambda^{-1}\Big(\frac{c_1}{|\xi_m|}\Big) \le t_m^{(1)} < t_m^{(2)} \le \Lambda^{-1}\Big(\frac{c_2}{|\xi_m|}\Big),$$

dann sind beide Folgen $\{t_m^{(1)}\}_m$, $\{t_m^{(2)}\}_m$ Nullfolgen. Für $0 < t \le T$ haben wir

$$\Big|\frac{d}{ds} w_m(s(t),\xi)\Big| \le \frac{1}{2}\tau_s(s(t))\tau^{-\frac{1}{2}}(s(t))|\hat{u}_m(t,\xi)| + \tau^{-\frac{1}{2}}(s(t))\Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t,\xi)\Big|.$$

Deshalb dürfen wir wie folgt schlußfolgern:

$$\begin{aligned}
|w_m(s(t),\xi)| + \Big|\frac{d}{ds} w_m(s(t),\xi)\Big| &\le \tau^{\frac{1}{2}}(s(t))\Big(1 + \frac{\tau_s(s(t))}{2\tau(s(t))}\Big)|\hat{u}_m(t,\xi)| + \tau^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t,\xi)\Big| \\
&\le 2\tau^{\frac{1}{2}}(s(t))|\hat{u}_m(t,\xi)| + \tau^{-\frac{1}{2}}(s(t))\Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t,\xi)\Big| \\
&\le C\tau^{\frac{1}{2}}(s(t))\Big(|\hat{u}_m(t,\xi)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t,\xi)\Big|\Big), \\
|\hat{u}_m(t,\xi)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t,\xi)\Big| &\le C\tau^{\frac{1}{2}}(s(t))\Big(|w_m(s(t),\xi)| + \Big|\frac{d}{ds} w_m(s(t),\xi)\Big|\Big).
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die erste Ungleichung für $t = t_m^{(2)}$, die zweite Ungleichung für $t = t_m^{(1)}$ und die Aussage von Lemma 5.7 an. All das liefert

$$\begin{aligned}
&|\hat{u}_m(t_m^{(2)},\xi_m)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t_m^{(2)},\xi_m)\Big| \\
&\ge C\tau^{-\frac{1}{2}}(s(t_m^{(2)}))\Big(|w_m(s(t_m^{(2)}),\xi_m)| + \Big|\frac{d}{ds} w_m(s(t_m^{(2)}),\xi_m)\Big|\Big) \\
&\ge C\tau^{-\frac{1}{2}}(s(t_m^{(2)}))\exp(C_1 \log|\xi_m|(\log^{[n]}|\xi_m|)^{\frac{1}{2}}) \\
&\ge C\tau^{-\frac{1}{2}}(s(t_m^{(2)}))\tau^{-\frac{1}{2}}(s(t_m^{(1)}))\exp(C_1 \log|\xi_m|(\log^{[n]}|\xi_m|)^{\frac{1}{2}})\Big(|\hat{u}_m(t_m^{(1)},\xi_m)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t_m^{(1)},\xi_m)\Big|\Big) \\
&\ge C\exp(C_2 \log|\xi_m|(\log^{[n]}|\xi_m|)^{\frac{1}{2}})\Big(|\hat{u}_m(t_m^{(1)},\xi_m)| + \Big|\frac{d}{dt}\hat{u}_m(t_m^{(1)},\xi_m)\Big|\Big),
\end{aligned}$$

wobei C, C_1 und C_2 universelle positive Konstanten sind. Für den Fall unendlicher Entartung berechnen wir

$$s(t) = \frac{1}{t^2}\log^{[n-1]}\frac{1}{t}, \quad t \sim \sqrt{\frac{\log^{[n-1]} s^{\frac{1}{2}}}{s}},$$

$$\tau(s) = 2\frac{1}{t^3}\log^{[n-1]}\frac{1}{t}\Big|_{t=t(s)} \sim 2s\sqrt{\frac{s}{\log^{[n-1]} s^{\frac{1}{2}}}},$$

$$s_\xi,\ s_\xi - m_0 - 1 \sim (\log|\xi|)^2\log^{[n]}|\xi|,$$

$$\tau(s_\xi),\ \tau(s_\xi - m_0 - 1) \sim \frac{s_\xi^{\frac{3}{2}}}{(\log^{[n-1]} s_\xi^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{(\log|\xi|)^3(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{3}{2}}}{\Big(\log^{[n-1]}\Big((\log|\xi|)(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Damit gilt die gewünschte Aussage. Weiterhin berechnen wir für den Fall endlicher Entartung

$$s(t) = \Big(\log\frac{l+1}{t^{l+1}}\Big)^2\log^{[n]}\frac{l+1}{t^{l+1}},\quad t \sim (l+1)^{\frac{1}{l+1}}\exp\Big(-\frac{1}{l+1}\Big(\frac{s}{\log^{[n-1]} s^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big),$$

$$\tau(s) = 2\frac{l+1}{t}\log\frac{l+1}{t^{l+1}}\log^{[n]}\frac{l+1}{t^{l+1}}\Big|_{t=t(s)} \sim 2(l+1)\Big(\frac{1}{l+1}\Big)^{\frac{1}{l+1}} s\,\frac{\exp\Big(\frac{1}{l+1}\Big(\frac{s}{\log^{[n-1]} s^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)}{\Big(\frac{s}{\log^{[n-1]} s^{\frac{1}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}}},$$

$$s_\xi,\ s_\xi - m_0 - 1 \sim (\log|\xi|)^2\log^{[n]}|\xi|,$$

$$\begin{aligned}&\tau(s_\xi),\ \tau(s_\xi - m_0 - 1)\\ \sim\ & \log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}\Big(\log^{[n-1]}\Big(\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{1}{l+1}\frac{\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}}{(\log^{[n-1]}(\log|\xi|(\log^{[n]}|\xi|)^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}}\Big).\end{aligned}$$

Die gewünschte Aussage gilt ebenfalls, da $\xi_m \to \infty$ für $m \to \infty$ gilt. Damit ist der Beweis von Satz 5.4 abgeschlossen. □

Bemerkung Mit dem Beweis von Satz 5.4 haben wir Familien von Koeffizienten $\lambda^2(t)b^2(t)$ konstruiert für welche das zugrunde gelegte Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \lambda(t)^2 b(t)^2 u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),$$

nicht H^∞ und damit auch nicht C^∞-korrekt ist.

Bemerkung Wir sollten einige Beispiele von Cauchy-Problemen bringen.

Beispiel 1 Wir wählen $\lambda(t) = \exp(-t^{-\alpha})$, $\alpha > 0$. Dann sind nach Satz 5.4 die Cauchy-Probleme

$$u_{tt} - e^{-2t^{-\alpha}}\Big(2+\sin\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\log^{[n-1]}\frac{1}{t^\alpha}\Big)\Big)u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ n \geq 2,$$

nicht H^∞ bzw. nicht C^∞ korrekt. Damit wird das Resultat aus [41] verbessert. Danach ist das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - e^{-2t^{-\alpha}}\Big(2 + \sin\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),$$

H^∞ bzw. C^∞-korrekt genau dann, wenn $\alpha \geq 1/2$.

Beispiel 2 Wir wählen $\lambda(t) = t^l$, $l > 0$. Dann sind nach Satz 5.4 die Cauchy-Probleme

$$u_{tt} - t^{2l}\Big(2+\sin\Big(\Big(\log\frac{1}{t}\Big)^2\Big(\log^{[n]}\frac{1}{t}\Big)\Big)\Big)u_{xx} = 0,\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ n \geq 2,$$

nicht H^∞ bzw. nicht C^∞ korrekt.

Aufgabe 45 Finden Sie noch andere Beispiele!

5.4 Optimalität von Levi-Bedingungen

Vorgelegt sei das folgende lineare Cauchy-Problem

$$Lu := \partial_t^m u + \sum_{j=1}^{m} a_j(t,\partial_x)\partial_t^{m-j}u = 0,\ \partial_t^j u(t_0,x) = u_j(x)$$

für $j = 0,...,m-1$ und für $t_0 \in [0,T]$, d.h. wir stellen die Cauchy-Bedingungen nicht notwendig auf $t_0 = 0$. Die Koeffizienten von a_j sind glatt auf $[0,T]$.

Definition 5.1 *Wir sagen, daß das obige Cauchy-Problem gleichmäßig H^∞-korrekt in der positiven Zeitrichtung (oder in der Zukunft) ist, falls zu jedem $u_j \in H^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{k=1}^{\infty} H^k(\mathbb{R}^n)$, $j = 0,...,m-1$, eine eindeutige Lösung $u \in C^m([t_0,T],H^\infty)$ existiert.*

Betrachten wir das nach partieller Fouriertransformation erhaltene Cauchy-Problem

$$\partial_t^m v + \sum_{j=1}^{m} a_j(t,i\xi)\partial_t^{m-j}v = 0,\ \partial_t^j v(t_0,\xi) = v_j(\xi),\ j = 0,...,m-1$$

mit $v = F_{x\to\xi}(u)$ und $v_j = F(u_j)$, dann haben wir folgende notwendige und hinreichende Aussage für die gleichmäßige H^∞-Korrektheit:

Satz 5.5 *Das vorgelegte Cauchy-Problem ist gleichmäßig H^∞-korrekt genau dann, wenn folgende Ungleichung gilt für $t \in [t_0,T]$, wobei die Konstanten $C(T)$ und p unabhängig von t_0 und den Daten u_j, $j = 0,...,m-1$ sind:*

$$\sum_{j=0}^{m-1} |\partial_t^j v(t,\xi)| \leq C(T)(1+|\xi|)^p \sum_{j=0}^{m-1} |\partial_t^j v(t_0,\xi)|.$$

Als Anwendung von Satz 5.5 wenden wir uns dem Cauchy-Problem

$$\partial_t^2 u - t^{2l}\partial_x^2 u - a\, t^k\partial_x u = 0,\ \ u(t_0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(t_0,x) = u_1(x)$$

zu. In $t = 0$ ist die gegebene Differentialgleichung schwach hyperbolisch, für $t > 0$ strikt hyperbolisch. In einer Umgebung von $t = 0$ kann $a\, t^k \partial_x u$ nicht als Term niederer Ordnung betrachtet werden. Dabei ist a eine reelle Konstante.

Satz 5.6 *Das vorgelegte Cauchy-Problem mit $l \geq 1$ ist gleichmäßig H^∞-korrekt für $t \geq 0$ genau dann, wenn $k \geq l - 1$ gilt.*

Beweis: Zuerst beweisen wir die Notwendigkeit der Bedingung $k \geq l - 1$. Es sei $a \neq 0$. Wir setzen voraus $k < l - 1$ und zeigen, daß das vorgelegte Cauchy-Problem in diesem Fall nicht gleichmäßig H^∞-korrekt ist. Wir studieren nach partieller Fouriertransformation das Cauchy-Problem

$$\partial_t^2 v + t^{2l} \xi^2 v - i\, a\, t^k \xi\, v = 0, \;\; v(t_0, \xi) = v_0(\xi), \;\; \partial_t v(t_0, \xi) = v_1(\xi).$$

Angenommen dieses ist gleichmäßig H^∞-korrekt, dann gilt nach Satz 5.5

$$|v(t, \xi) + |\partial_t v(t, \xi)| \leq C(T)(1 + |\xi|)^p (|v(t_0, \xi)| + |\partial_t v(t_0, \xi)|).$$

Wir zeigen jedoch, daß für kein $C(T)$ und p diese Ungleichung für alle $t \in [t_0, T]$ und $t_0 \in [0, T]$ erfüllt werden kann.

1. Schritt: Diagonalisierung

Wir werden unsere Untersuchungen in einem Teil des Phasenraumes, in $\{(t, \xi) \in [1/\xi, t_\xi],\ \xi \to +\infty\}$ durchführen.
Mit einem später zu wählenden $\sigma \in (0, 1)$ definieren wir $t_\xi = \xi^{-\sigma}$ für $\xi \gg 1$. Damit ist $1/\xi < t_\xi$ und außerdem

$$t_\xi^{2l-k} \xi = \xi^{-\sigma(2l-k)+1} \to 0 \quad \text{für} \quad \xi \to \infty$$

falls $\frac{1}{2l-k} < \sigma < 1$. Somit gilt auch $t^{2l-k}\xi \to 0$ für $t \in [1/\xi, t_\xi]$ für $\xi \to \infty$. Vergleichen wir die Glieder

$$t^{2l} \xi^2 v \qquad \text{und} \qquad i a t^k \xi v$$

in obigem Teil des Phasenraums, dann erweist sich $iat^k \xi v$ als der bestimmende Term, da

$$t^{2l} \xi^2 v = \underbrace{t^{2l-k} \xi}_{\to 0} (t^k \xi v).$$

Der bestimmende Term legt die Diagonalisierungsstrategie fest. Wir setzen $w_0 = t^{\frac{k}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} v$, $\;w_1 = \partial_t v$, und mit $W = (w_0, w_1)^T$ erhalten wir

$$\partial_t W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ia - t^{2l-k}\xi & 0 \end{pmatrix} t^{\frac{k}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} W + \frac{k}{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W.$$

Die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ia & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sind} \qquad \pm\lambda = \pm\sqrt{ia}.$$

Da $a \neq 0$ als reell vorausgesetzt wird, können wir annehmen $\Re\sqrt{ia} > 0$. Wir definieren den Diagonalisator

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \sqrt{ia}$$

und erhalten

$$N^{-1} = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}, \quad N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ia & 0 \end{pmatrix}N^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $\tilde{W} = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1)^T := NW$, dann schlußfolgern wir folgendes System 1. Ordnung für $\tilde{W}$:

$$\partial_t \tilde{W} = \begin{pmatrix} \sqrt{ia} + p_{11}(t,\xi) & p_{12}(t,\xi) \\ p_{21}(t,\xi) & -\sqrt{ia} + p_{22}(t,\xi) \end{pmatrix} t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\, \tilde{W} + \frac{k}{4t}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\tilde{W},$$

wobei $p_{ij}(t,\xi)$ gleichmäßig gegen 0 streben für $t \in [1/\xi, t_\xi]$ und für $\xi \to \infty$. Dabei bedeutet gleichmäßig, daß zu vorgelegtem $\varepsilon > 0$ ein $M(\varepsilon)$ so existiert mit $|p_{ij}(t,\xi)| < \varepsilon$ für $\{(t,\xi) \in [1/\xi, t_\xi] \times \{\xi \geq M(\varepsilon)\}\}$.
Beachte: Da $t \in [1/\xi, t_\xi]$ und $t_\xi = \xi^{-\sigma}$ gewählt werden, haben wir für $\xi \geq M(\varepsilon)$

$$|w_0(t,\xi)| \leq \xi^{-\frac{k}{2}\sigma}\xi^{\frac{1}{2}}|v(t,\xi)|, \quad |v(t,\xi)| \leq \xi^{\frac{k}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}|w_0(t,\xi)|.$$

Diese und die im Moment vorausgesetzte Beziehung

$$|v(t,\xi) + |\partial_t v(t,\xi)| \leq C(T)(1+|\xi|)^p(|v(t_0,\xi)| + |\partial_t v(t_0,\xi)|)$$

liefern sofort

$$|W(t,\xi)| \leq \tilde{C}(T)(1+|\xi|)^{\tilde{p}}|W(t_0,\xi)| \quad \text{für} \quad t_0 \in [1/\xi, t_\xi],\ t \in [t_0, t_\xi]$$

mit eventuell neuen Konstanten $\tilde{C}(T)$ und $\tilde{p}$. Eine entsprechende Ungleichung gilt für $\tilde{W}$, da N eine konstante Matrix ist, also

$$|\tilde{W}(t,\xi)| \leq \tilde{C}(T)(1+|\xi|)^{\tilde{p}}|\tilde{W}(t_0,\xi)| \quad \text{für} \quad t_0 \in [1/\xi, t_\xi],\ t \in [t_0, t_\xi]$$

mit einer eventuell neuen Konstanten $\tilde{C}(T)$.

Unsere weitere Strategie: Wir werden zeigen, daß die letzte Ungleichung für keine $\tilde{C}(T)$ und $\tilde{p}$ gelten kann.

2. Schritt: Ljapunov-Funktional gegen Energie-Funktional

Wir definieren das Ljapunov-Funktional $S(\tilde{W})(t,\xi) = \frac{1}{2}(|\tilde{w}_0(t,\xi)|^2 - |\tilde{w}_1(t,\xi)|^2)$.
Bekannt ist uns das Energie-Funktional $E(\tilde{W})(t,\xi) = \frac{1}{2}(|\tilde{w}_0(t,\xi)|^2 + |\tilde{w}_1(t,\xi)|^2)$.
Trivialerweise gilt $-E(\tilde{W})(t,\xi) \le S(\tilde{W})(t,\xi) \le E(\tilde{W})(t,\xi)$.
Wir wählen auf $t = 1/\xi$ die Daten

$$\tilde{w}_0(1/\xi,\xi) = \chi(\xi)\exp(-\xi^{\tilde{\rho}}),\ \ \chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \chi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi \ge 2M(\varepsilon) \\ 0 & \text{für } \xi \le M(\varepsilon) \end{cases},\ \tilde{w}_1(1/\xi,\xi) = 0,$$

mit einem später zu wählenden $\tilde{\rho} > 0$. Dann gilt

$$S(\tilde{W})(1/\xi,\xi) = E(\tilde{W})(1/\xi,\xi) = \frac{1}{2}\chi(\xi)^2\exp(-2\xi^{\tilde{\rho}}).$$

Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\partial_t S(\tilde{W})(t,\xi) = \Re(\tilde{w}_0,\partial_t\tilde{w}_0) - \Re(\tilde{w}_1,\partial_t\tilde{w}_1) \\
&\quad = \Re(\tilde{w}_0,\sqrt{ia}t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_0) + \Re(\tilde{w}_1,\sqrt{ia}t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_1) \\
&\qquad +\Re(\tilde{w}_0,p_{11}(t,\xi)t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_0) + \Re(\tilde{w}_0,p_{12}(t,\xi)t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_1) + \frac{k}{4t}(\tilde{w}_0,\tilde{w}_0) - \frac{k}{4t}\Re(\tilde{w}_0,\tilde{w}_1) \\
&\qquad -\Re(\tilde{w}_1,p_{21}(t,\xi)t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_0) - \Re(\tilde{w}_1,p_{22}(t,\xi)t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\tilde{w}_1) + \frac{k}{4t}\Re(\tilde{w}_1,\tilde{w}_0) - \frac{k}{4t}\,(\tilde{w}_1,\tilde{w}_1) \\
&\quad \ge 2(\Re\sqrt{ia})t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}E(\tilde{W})(t,\xi) - \varepsilon\, t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}E(\tilde{W})(t,\xi) + \frac{k}{4t}\,S(\tilde{W})(t,\xi).
\end{aligned}$$

Nutzen wir schließlich

$$\Re\sqrt{ia} > 0\,,\ \ k > 0 \quad \text{und} \quad E(\tilde{W})(t,\xi) \ge S(\tilde{W})(t,\xi),$$

dann ergibt sich mit einem $\delta > 0$ sofort

$$d_t S(\tilde{W})(t,\xi) \ge \delta\, t^{\frac{k}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}\ S(\tilde{W})(t,\xi)\ \text{ für }\ \{(t,\xi) \in [1/\xi,t_\xi] \times \{|\xi| \ge M\}\}.$$

Nach Integration über $t \in [1/\xi,t_\xi]$ folgt mit einem universellen positiven $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
S(\tilde{W})(t_\xi,\xi) &\ge \exp\left(\delta\xi^{\frac{1}{2}}\int_{1/\xi}^{t_\xi}\tau^{\frac{k}{2}}d\tau\right)S(\tilde{W})(1/\xi,\xi) \\
&\ge \exp\left(\delta\xi^{\frac{1}{2}}t_\xi^{\frac{k}{2}+1}\right)S(\tilde{W})(1/\xi,\xi) = \exp(\delta\xi^{\frac{1}{2}-\sigma(\frac{k}{2}+1)})S(\tilde{W})(1/\xi,\xi).
\end{aligned}$$

Jetzt fixieren wir unser σ so, daß $\sigma(\frac{k}{2}+1)<\frac{1}{2}$.
Die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{2l-k} \;<\; \sigma \;<\; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{k}{2}+1} \qquad \text{bedeuten} \qquad k<l-1,$$

das wird gerade vorausgesetzt.
Definieren wir ein σ welches beiden Bedingungen genügt und setzen wir $\rho = 1/2 - \sigma(\frac{k}{2}+1) > 0$, dann schlußfolgern wir schließlich

$$\begin{aligned}&E(\tilde{W})(t_\xi,\xi) \geq S(\tilde{W})(t_\xi,\xi) \geq \exp(\delta\xi^\rho)S(\tilde{W})(1/\xi,\xi)\\ &= \exp(\delta\xi^\rho)E(\tilde{W})(1/\xi,\xi) \geq \exp(\delta\xi^\rho - \xi^{\tilde{\rho}}) \text{ für } \quad \{\xi \geq M(\varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Wählen wir $\tilde{\rho} \in (0,\rho)$, dann kann niemals gelten

$$|\tilde{W}(t,\xi)| \leq \tilde{C}(T)(1+|\xi|)^{\tilde{\rho}}|\tilde{W}(t_0,\xi)| \;\text{ für }\; t_0 \in [1/\xi, t_\xi], t \in [t_0, t_\xi]$$

im Widerspruch zur Annahme.

3. Schritt: *Beziehung zu unserem Ausgangsproblem*

Wir haben die Daten $\tilde{w}_0(1/\xi,\xi) = \chi(\xi)\exp(-\xi^{\tilde{\rho}})$ und $\tilde{w}_1(1/\xi,\xi) = 0$ vorgeschrieben. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} v(1/\xi,\xi) \\ \partial_t v(1/\xi,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N^{-1} \begin{pmatrix} \chi(\xi)\exp(-\xi^{\tilde{\rho}}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn $\tilde{\rho} > 0$ gewählt ist, dann haben $v(1/\xi,\xi)$ und $\partial_t v(1/\xi,\xi)$ ein hinreichend großes decay für $\xi \to \infty$. Nun untersuchen wir das rückwärts gerichtete Cauchy-Problem $\partial_t^2 v + t^{2l}\xi^2 v - ia\, t^k \xi v = 0, \quad v(1/\xi,\xi), \partial_t v(1/\xi,\xi)$ vorgegeben, für $t \in [0, 1/\xi]$ und $\xi \geq M(\varepsilon)$. Führen wir $V = (v, \partial_t v)^T$ ein, dann ergibt sich das System erster Ordnung

$$\partial_t V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ia\, t^k\xi - t^{2l}\xi^2 & 0 \end{pmatrix} V, \quad V(1/\xi,\xi) \quad \text{vorgegeben.}$$

Nach Integration erhalten wir für $\xi \geq M(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}|V(0,\xi)| &\leq C\exp\Big(C\int_0^{1/\xi}(\tau^k\xi + \tau^{2l}\xi^2 + 1)d\tau\Big)|V(1/\xi,\xi)|\\ &\leq C\exp\Big(C + \xi^{1-(k+1)} + \xi^{2-(2l+1)}\Big)|V(1/\xi,\xi)|\\ &\leq C\,|\,V(1/\xi,\xi)| \leq C\ \exp(-\xi^{\tilde{\rho}}).\end{aligned}$$

Da $V(1/\xi,\xi) = 0$ für $\xi \leq M(\varepsilon)$, $\quad 1/\xi := T$ falls $1/\xi > T$ haben wir $|V(0,\xi)| \leq C\ \exp(-|\xi|^{\tilde{\rho}})$. Somit gehören die Daten u_0 und u_1 unseres Ausgangsproblems

$$\partial_t^2 u - t^{2l}\partial_x^2 u - at^k\partial_x u = 0\ , \;\; u(0,x) = u_0(x), \;\; u_t(0,x) = u_1(x)$$

zum Raum H^∞. Für kein $t > 0$ gehört aber die Lösung $u(t, \cdot)$ zum Raum H^∞.

Bleibt die Hinlänglichkeit der Bedingung $k \geq l - 1$ zu zeigen.

Aufgabe 46: Beweisen Sie die Hinlänglichkeit der Bedingung $k \geq l - 1$, $l > 0$, mit Hilfe der Methode der Zonen. Dabei reicht es, die Ungleichung

$$|v(t,\xi)| + |\partial_t v(t,\xi)| \leq C(T)(1 + |\xi|^p)(|v(t_0,\xi)| + |\partial_t v(t_0,\xi)|)$$

für $t_0 \in [0, \infty)$ und $t \in [t_0, T]$, $T < \infty$ beliebig, nachzuweisen.

Mit dem Lösen der Aufgabe ist der Beweis von Satz 5.6 vollständig erbracht. $\square$

6 $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen

6.1 $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

6.1.1 Verwendung expliziter Lösungsdarstellungen

Wir wenden uns dem vowärts gerichteten Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

zu.

Aufgabe 47 Zeigen Sie, dass unter gewissen Voraussetzungen an u_0 ($u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$) durch

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy =: \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x-y) u_0(y) dy$$

eine Lösung des obigen Cauchy-Problems gegeben ist. Wir sehen, daß das Integral eine Faltungsstruktur mit der speziellen Kernfunktion $K(t,x) = e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ besitzt.

Frage: Welche Eigeschaften hat die Lösung in Abhängigkeit des gegebenen Datums u_0?

Antwort: Natürlich ist die Lösung C^∞ in x für $t > 0$. Das ergibt sich aus dem glättenden Effekt perabolischer Operatoren. Eine solche Aussage reicht uns aber nicht, insbesondere sind wir interessiert an dem Verhalten der Lösung für $t \to +0$.

Man kann verschiedene Strategien im Auge haben.
Definieren wir die Energie $E(u)(t) := \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, dann ergibt sich durch mehr oder weniger standardmäßige Überlegungen

$$\frac{d}{dt}E(u)(t) + 2\|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Nach Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E(u)(t) + 2\int_0^t \|\nabla u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds = E(u)(0),\\
&E(u)(t) \le E(u)(0) \text{ für alle } t \ge 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine $L^2 - L^2$ *Abschätzung der Lösung* hergeleitet, da $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ für alle $t \ge 0$ gezeigt wurde. Versuchen wir jetzt, eine $L^1 - L^\infty$ Abschätzung der Lösung herzuleiten, d.h. das Datum u_0 wird als Element des $L^1(\mathbb{R}^n)$ vorausgesetzt. Aus obiger Lösungsdarstellung erhalten wir sofort

$$|u(t,x)| \le (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\ t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|dy \le Ct^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

woraus sofort $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ folgt. Diese Abschätzung liefert uns ein parabolisches decay für $t \to \infty$. Dabei ist C eine universelle, von t und u_0 unabhängige Konstante.

Frage: Was stört uns an dieser Abschätzung?

Antwort: Für $t \to +0$ strebt $t^{-\frac{n}{2}}$ gegen $+\infty$. Wir müssen versuchen, für kleine t eine Abschätzung herzuleiten, in der die Abschätzungskonstante beschränkt bleibt. Dazu benötigen wir eine *zusätzliche Regularität von* u_0 wie die folgenden Untersuchungen zeigen werden. Wir verwenden noch einmal die Lösungsdarstellung aus Aufgabe 47. Dann gilt

$$|u(t,x)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy\Big| \le \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy\, \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Zur Berechnung des Integrals setzen wir $z := \frac{x-y}{\sqrt{t}}$. Dann haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} dz = C,$$

und somit $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Für große t reichte die L^1-Eigenschaft von u_0. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz ist der $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ stetig eingebettet in dem Raum $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das liefert sofort die gewünschte $L^1 - L^\infty$ Abschätzung $||u(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C||u_0||_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)}$ für $t \in [0,1]$.

Fazit: Wir haben sowohl eine $L^2 - L^2$ Abschätzung, als auch eine $L^1 - L^\infty$ Abschätzung hergeleitet.

$L^2 - L^2$ Abschätzung: $\quad ||u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||u_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)};$

$L^1 - L^\infty$ Abschätzung: $\quad ||u(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}||u_0||_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)}.$

Die Idee, $L^p - L^q$ Abschätzungen für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p < 2$, zu erhalten, besteht in der Anwendung von Interpolationsresultaten. Wir zitieren ein solches aus [29].

Satz 6.1 *Ein vorgelegter linearer Operator T habe die folgenden Eigenschaften:*

- $T \in \mathcal{L}(W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n))$ *mit der Norm* M_0,
- $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n))$ *mit der Norm* M_1.

Es seien p, q, θ und N vorgelegt mit $1 < p < 2 < q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \theta := \frac{2}{q},\ N \in \mathbb{N}$ *mit* $N > n(1-\theta)$. *Dann ist*

- $T \in \mathcal{L}(W^{N,p}(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n))$ *mit der Norm* M,
  wobei $M \leq cM_0^{1-\theta}M_1^\theta$ *mit* $c = c(p,n)$ *erfüllt ist.*

Durch Anwendung dieses Satzes erhalten wir mit $M_0 = C(1+t)^{-\frac{n}{2}},\ M_1 = 1$ sofort die folgende Aussage:

Folgerung 6.1 *$L^p - L^q$ decay Abschätzungen*

Für die Lösung u von $u_t - \Delta u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, *gilt die $L^p - L^q$ decay Abschätzung*

$$||u(t,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}||u_0||_{W^{N,p}(\mathbb{R}^n)} = C(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||u_0||_{W^{N,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für $2 < q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ N > n\left(1 - \frac{2}{q}\right) = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$

Wir müssen uns nicht auf $L^p - L^q$ decay Abschätzungen auf der *konjugierten Linie* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ beschränken wie folgende Aussage zeigt.

Satz 6.2 *Vorgelegt sei das Cauchy-Problem* $u_t - \Delta u = 0, u(0,x) = u_0(x) \in S(\mathbb{R}^n)$. *Dann gelten folgende Abschätzungen:*

- $||u(t,\cdot)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq ||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ *für* $t \geq 0$ *und* $1 \leq p \leq \infty$;
- $||D_x^\alpha u(t,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-(\frac{n}{2r}+\frac{|\alpha|}{2})}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ *für* $t > 0,\ \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r},\ 1 \leq r, q \leq \infty$ *und mit* $C = C(p,q,r,\alpha)$.

Beweis: Wir verwenden die Kernfunktion $K(t,x-y)=K(t,y-x)$ aus Aufgabe 47. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)dx = 1.$$

Nach Anwendung der Hölderschen Ungleichung haben wir für $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ sofort

$$\begin{aligned}&|u(t,x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)|u_0(y)|dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}|u_0(y)|dy\\ &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)|u_0(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |K(t,x-y)|dy\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)|u_0(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p dx &\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)|u_0(y)|^p dy\Big)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x-y)dx\Big)|u_0(y)|^p dy = ||u_0||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

das ist gerade die erste Ungleichung. Zum Beweis der zweiten Ungleichung nutzen wir folgende Ungleichung für Faltungsintegrale:

$$||f*g||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le ||f||_{L^s(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ für } \frac{1}{p}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q}+1, \quad 1\le p,q,s\le\infty.$$

Mit $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ haben wir

$$\begin{aligned}||K(t,\cdot)||_{L^s(\mathbb{R}^n)} &\le C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{t^{\frac{ns}{2}}}e^{-\frac{s|x|^2}{4t}}dx\Big)^{\frac{1}{s}} \le Ct^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{s})} = Ct^{-\frac{n}{2r}},\\ ||\partial_{x_i}K(t,\cdot)||_{L^s(\mathbb{R}^n)} &\le C\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{t^{\frac{ns}{2}}}\Big(\frac{|x_i|}{t}\Big)^s e^{-\frac{s|x|^2}{4t}}dx\Big)^{\frac{1}{s}} \le Ct^{-\frac{n}{2r}-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Allgemein erwarten wir die Abschätzung

$$||\partial_x^\alpha K(t,\cdot)||_{L^s(\mathbb{R}^n)} \le Ct^{-(\frac{n}{2r}+\frac{|\alpha|}{2})}.$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}||D_x^\alpha u(t,\cdot)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= ||D_x^\alpha(K(t,\cdot)*u_0)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le ||D_x^\alpha K(t,\cdot)||_{L^s(\mathbb{R}^n)}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le Ct^{-(\frac{n}{2r}+\frac{|\alpha|}{2})}||u_0||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Ungleichung bewiesen. $\square$

6.1.2 Verwendung von Fouriermultiplikatoren

Im Abschnitt 6.1.1 haben wir explizite Lösungsdarstellungen für das Cauchy-Problem

$$u_t - \triangle u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

zur Herleitung von $L^p - L^q$ decay Abschätzungen herangezogen. In diesem Abschnitt wollen wir Eigenschaften der Fouriertransformation auf Lösungsdarstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren anwenden. Nach Anwendung der partiellen Fouriertransformation und ihrer Inversen erhalten wir sofort die Lösungsdarstellung

$$u(t,x) = F^{-1}_{\xi \to x}(e^{-|\xi|^2 t} F(u_0)(\xi)).$$

Herleitung einer $L^2 - L^2$ Abschätzung

Nutzen wir die Eigenschaften der Fouriertransformation (siehe Abschnitt 4.2.3 der Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen I") im Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ergibt sich sofort

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} = \|e^{-|\xi|^2 t} F(u_0)(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)} \leq \|F(u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}.$$

Damit erhalten wir die gewünschte $L^2 - L^2$ Abschätzung $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Herleitung einer $L^1 - L^\infty$ Abschätzung

Nutzen wir die Eigenschaften der Fouriertransformation (siehe Abschnitt 4.2.3 der Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen I") im Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ergibt sich sofort mit einer universellen Konstanten C

$$\begin{aligned} &\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_x)} \leq C\, \|e^{-|\xi|^2 t} F(u_0)(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n_\xi)} \\ &\quad \leq C\ \ \|e^{-|\xi|^2 t}\|_{L^1(\mathbb{R}^n_\xi)} \|F(u_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)} \leq C\, \|e^{-|\xi|^2 t}\|_{L^1(\mathbb{R}^n_\xi)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n_x)}. \end{aligned}$$

Für $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|e^{-|\xi|^2 t}\|_{L^1(\mathbb{R}^n_\xi)} &= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-|\xi|^2 t} d\xi \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-|\xi|^2 t} d(\xi\sqrt{t}) \\ &= \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n_z} e^{-|z|^2} dz \leq C\, t^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewünschte $L^1 - L^\infty$ Abschätzung $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\, t^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Nun stört natürlich wieder der für $t \to +0$ unbeschränkte Term $t^{-\frac{n}{2}}$. Deshalb schätzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-|\xi|^2 t} F(u_0)(\xi) d\xi$$

für $t \in (0,1]$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-|\xi|^2 t} F(u_0)(\xi) d\xi\Big| &\le \int_{|\xi|\le 1} e^{-|\xi|^2 t}|F(u_0)(\xi)|d\xi + \int_{|\xi|\ge 1} e^{-|\xi|^2 t}|F(u_0)(\xi)|d\xi \\
&\le C\,\|F(u_0)(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)} + \int_{|\xi|\ge 1}\frac{1}{|\xi|^{n+\varepsilon}}|\xi|^{n+\varepsilon}|F(u_0)(\xi)|d\xi \\
&\le C\,\|F(u_0)(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)} + \int_{|\xi|\ge 1}\frac{1}{|\xi|^{n+\varepsilon}}\langle\xi\rangle^{n+\varepsilon}|F(u_0)(\xi)|d\xi \\
&\le C\,\|F(u_0)(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)} + \|F(\langle D\rangle^{n+\varepsilon}u_0)(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)}\int_{|\xi|\ge 1}\frac{1}{|\xi|^{n+\varepsilon}}\,d\xi \\
&\le C_\varepsilon(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n_x)} + \|\langle D\rangle^{n+\varepsilon}u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n_x)}) \\
&\le C_\varepsilon\,\|u_0\|_{W^{n+\varepsilon,1}(\mathbb{R}^n_x)}
\end{aligned}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Fazit: Wir haben sowohl eine $L^2 - L^2$ Abschätzung, als auch eine $L^1 - L^\infty$ Abschätzung hergeleitet.

$L^2 - L^2$ *Abschätzung:* $\quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$;

$L^1 - L^\infty$ *Abschätzung:* $\quad \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_\varepsilon(1+t)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|_{W^{n+\varepsilon,1}(\mathbb{R}^n)}$.

Durch Anwendung des Interpolationsresultates Satz 6.1 erhalten wir die folgende Aussage:

Folgerung 6.2 *$L^p - L^q$ decay Abschätzungen*

Für die Lösung u von $u_t - \triangle u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, gilt die $L^p - L^q$ decay Abschätzung

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(N,p)(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u_0\|_{W^{N,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für $2 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Bemerkung: Damit haben wir auf zwei verschiedenen Wegen (explizite Lösungsdarstellungen, Abschätzungen von Fouriermultiplikatoren) die gleiche Aussage in Form von Folgerungen 6.1 und 6.2 bewiesen.

Wenden wir uns schließlich noch $L^p - L^q$ decay Abschätzungen für $\partial_x^\alpha u$ zu. Wir können wie im Fall $\alpha = 0$ vorgehen und erhalten

$L^2 - L^2$ *Abschätzung:* $\quad \|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$;

$L^1 - L^\infty$ *Abschätzung:* $\quad \|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_\varepsilon(1+t)^{-\frac{n}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\|u_0\|_{W^{|\alpha|+n+\varepsilon,1}(\mathbb{R}^n)}$.

Durch Anwendung des Interpolationsresultates Satz 6.1 erhalten wir die folgende Aussage:

Folgerung 6.3 *$L^p - L^q$ decay Abschätzungen*

Für die Lösung u von $u_t - \triangle u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, gilt die $L^p - L^q$ decay Abschätzung

$$\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(N,p)(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u_0\|_{W^{|\alpha|+N,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für $2 < q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $N > n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

6.2 $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für die Energie von Lösungen der gedämpften Wellengleichung

Wir wenden uns in diesem Abschnitt dem Cauchy-Problem für die gedämpfte Wellengleichung

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

zu. Unser Ziel besteht darin, $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für die Wellenenergie

$$E_W(u)(t) := \frac{1}{2}(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2)$$

von Sobolev-Lösungen obigen Cauchy-Problems herzuleiten. Dabei bedienen wir uns der Methode der Darstellung der Lösung in Form von Fouriermultiplikatoren.

Herleitung einer $L^2 - L^2$ Abschätzung

Satz 6.3 *Die elastische und kinetische Energie von Lösungen des Cauchy-Problems*

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0,\quad u(0,x) = u_0(x),\quad u_t(0,x) = u_1(x)$$

mit Daten $u_0 \in H^1$ und $u_1 \in L^2$ erfüllt die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}\Big(\|u_1\|_{L^2} + \|u_0\|_{H^1}\Big), \\ \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-1}\Big(\|u_1\|_{L^2} + \|u_0\|_{H^1}\Big), \end{aligned}$$

und somit genügt die Energie $E_W(u)(t)$ der $L^2 - L^2$ Abschätzung

$$E_W(u)(t) \le C(1+t)^{-1}\Big(\|u_1\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{H^1}^2\Big).$$

Beweis: *Schritt 1 Transformation der Energie in den Phasenraum*
Es bezeichne $\hat{u}$ die Fouriertransformierte zu u, d.h., $\hat{u}(t,\xi) = F_{x\to\xi}(u)(t,\xi)$. Die Energie $E_W(u)(t)$ wird wie folgt in den Phasenraum transformiert:

$$E_W(u)(t) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\||\xi|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\hat{u}_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right).$$

Transformieren wir $u(t,x) = e^{-\frac{1}{2}t}w(t,x)$ und $v(t,\xi) = F_{x\to\xi}(w)(t,\xi)$, dann folgt $\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}v(t,\xi)$. Für die Abschätzung der *elastischen Energie* benutzen wir

$$|\xi|\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\,|\xi|v(t,\xi),$$

für die Abschätzung der *kinetischen Energie* benutzen wir

$$\hat{u}_t(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\Big(v_t(t,\xi)\ -\frac{1}{2}\,v(t,\xi)\Big).$$

Schritt 2 Abschätzung der elastischen Energie
Wir unterscheiden folgende Fälle.
Fall 1 $\{\xi :\ |\xi| > \frac{1}{2}\}$
Wir verwenden die Darstellung $|\xi|\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\ \ t)\ \ |\xi|v_0(\xi) + t\ \frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t)}{\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t}\ |\xi|v_1(\xi)\Big)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\||\xi|\hat{u}(t,\xi)\|_{L^2\{|\xi|>\frac{1}{2}\}}^2 &= \int_{|\xi|>\frac{1}{2}}|\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \le 2\Big(\int_{|\xi|>\frac{1}{2}}e^{-t}|\xi|^2|v_0(\xi)|^2d\xi \\
&+ \int_{\frac{1}{2}<|\xi|\le 1}\underbrace{\frac{\sin^2(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t)}{\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}^2\,t^2}}_{\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\le C}t^2e^{-t}|\xi|^2|v_1(\xi)|^2d\xi\ + \int_{|\xi|\ge 1}\underbrace{\frac{1}{|\xi|^2-\frac{1}{4}}|\xi|^2}_{\le C}e^{-t}|v_1(\xi)|^2d\xi\Big) \\
&\le 2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|v_0(\xi)|^2d\xi\ +\ Ct^2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}|v_1(\xi)|^2d\xi\ +\ Ce^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}|v_1(\xi)|^2d\xi.
\end{aligned}$$

Damit *fallen alle diese Terme exponentiell in* t und wir erhalten die Abschätzung

$$\int_{|\xi|>\frac{1}{2}}|\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \le Ct^2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2)d\xi.$$

Fall 2 $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{2}\}$

Zur Abschätzung der elastischen Energie verwenden wir die Darstellung

$$
\begin{aligned}
|\xi|\hat u(t,\xi) &= |\xi| e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\Big(\frac{v_0(\xi)}{2} - \frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}\\
&\quad + \Big(\frac{v_0(\xi)}{2} + \frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}\Big)\\
&= v_0(\xi)|\xi|\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{2v_1(\xi)|\xi|}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)e^{-\frac{1}{2}t}.
\end{aligned}
$$

Wir unterteilen das Intervall $[0, \frac{1}{2})$ in zwei Teilintervalle.

a) $\{\xi : |\xi| \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\}$:

Hier schätzen wir wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
|\xi||\hat u(t,\xi)| &= |\, v_0(\xi)|\xi| \underbrace{\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)}_{\le \cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)} e^{-\frac{1}{2}t} + \underbrace{\frac{\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)}{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}t}_{\le C\,\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)}\; v_1(\xi)|\xi| e^{-\frac{1}{2}t}\,|\\
&\le |\, v_0(\xi)|\xi| \underbrace{\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)e^{-\frac{1}{2}t}}_{\le e^{-\delta t},\ \delta>0} + C\underbrace{v_1(\xi)|\xi|}_{\le |v_1(\xi)|}\underbrace{\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)\; e^{-\frac{1}{2}t}}_{\le e^{-\delta t},\ \delta>0}\,|,
\end{aligned}
$$

und schlußfolgern

$$
\int_{\frac{1}{4}\le|\xi|<\frac{1}{2}} |\xi|^2|\hat u(t,\xi)|^2 d\xi \le C e^{-\delta t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2)d\xi.
$$

b) $\{\xi : |\xi| \in [0, \frac{1}{4})\}$:

Hier nutzen wir für $|\xi| < \frac{1}{2}$ die Ungleichung $-4|\xi|^2 \le -1 + \sqrt{1-4|\xi|^2} \le -2|\xi|^2$.
Mit dieser Ungleichung verfahren wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi|^2|\hat u(t,\xi)|^2 d\xi &\le \int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)|^2|\xi|^2 + |v_0(\xi)|^2|\xi|^2)(\underbrace{e^{-t-\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}_{\le e^{-t}} + \underbrace{e^{-t+\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}_{\le e^{-2|\xi|^2t}})d\xi\\
&\le C e^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}}(|v_1(\xi)|^2|\xi|^2 + |v_0(\xi)|^2|\xi|^2)d\xi\\
&\quad + C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}}(|v_1(\xi)|^2 + |v_0(\xi)|^2)|\xi|^2 e^{-2|\xi|^2t}d\xi.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Normungleichung $\|\cdot\|_{L^2} \le \|\cdot\|_{L^\infty}\|\cdot\|_{L^2}$ erhalten wir für den zweiten Term der rechten Seite der letzten Ungleichung

$$\begin{aligned}
&C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2)|\xi|^2 e^{-2|\xi|^2 t}d\xi \\
&\quad \le C \sup_{|\xi|<\frac{1}{4},\, t\ge 1} \frac{t|\xi|^2}{t} e^{-2|\xi|^2 t} \int_{\mathbb{R}^n} (|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2)d\xi \\
&\quad \le C\frac{1}{t} \underbrace{\sup_{|\xi|<\frac{1}{4},\, t\ge 1} t|\xi|^2 e^{-2|\xi|^2 t}}_{\le C} \int_{\mathbb{R}^n} (|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2)d\xi.
\end{aligned}$$

Damit gilt für kleine Frequenzen

$$\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \;\; \le \;\; C(1+t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} (|v_0(\xi)|^2+|\xi|^2|v_0(\xi)|^2+|v_1(\xi)|^2)d\xi.$$

Schritt 3 Abschätzung der kinetischen Energie

Wenden wir uns jetzt der Abschätzung der kinetischen Energie zu. Wir benutzen die Identität $\|u_t(t,\xi)\|^2_{L^2} = \|\hat{u}_t(t,\xi)\|^2_{L^2}$ mit $\hat{u}_t(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\,(v_t(t,\xi)\; - \frac{1}{2}\,v(t,\xi))$.

Fall 1 $\{\xi : |\xi| > \frac{1}{2}\}$

Verwenden wir

$$v_t(t,\xi) = -\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\sin\Big(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t\Big)v_0(\xi) + \cos\Big(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t\Big)v_1(\xi).$$

und die obige Formel für $\hat{u}_t(t,\xi)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{u}_t(t,\xi) \;\; = \;\; & e^{-\frac{1}{2}t}\Big(v_1(\xi)\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t) \; - \; \frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t)}{\sqrt{|\xi|^2\;-\;\frac{1}{4}}}\Big) \\
& - v_0(\xi)\Big(\frac{1}{2}\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t) \; + \; \sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Wiederholen wir die Ideen zur Abschätzung der elastischen Energie, dann folgt

$$\begin{aligned}
\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2\{|\xi|>\frac{1}{2}\}} \le\, & C\int_{|\xi|>\frac{1}{2}} e^{-t}|v_1(\xi)|^2 \underbrace{\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t) - \frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t)}{\sqrt{|\xi|^2\;-\;\frac{1}{4}}}\Big)^2}_{\le C\,t^2} d\xi \\
& + C\int_{|\xi|>\frac{1}{2}} e^{-t}|v_0(\xi)|^2\Big(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t) \; + \; \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t)}_{\le C}\Big)^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $(|\xi|^2 - \frac{1}{4})\sin^2(\sqrt{|\xi|^2 - \frac{1}{4}}\ t) \le |\xi|^2$ liefert für $\{\xi : |\xi| > \frac{1}{2}\}$ die Abschätzung

$$\int_{|\xi|>\frac{1}{2}} |\xi|^2|\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \le Ct^2e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2)d\xi.$$

Fall 2: $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{2}\}$

Nach der Bestimmung von $v_t(t,\xi)$ erhalten wir sofort

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(t,\xi) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\sqrt{1-4|\xi|^2}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big) - \cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\Big)v_0(\xi)\\ &+ e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big) - \frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\Big)v_1(\xi).\end{aligned}$$

Wir unterteilen das Intervall $[0, \frac{1}{2})$ wie folgt:

a) $\{\xi : |\xi| \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\}$:

Hier zeigen wir wieder das exponentielle Fallen der kinetischen Energie. Einerseits nutzen wir

$$\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big) + \sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big) \le 2\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t),$$

andererseits strapazieren wir

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)\Big| \le C_\varepsilon t \text{ für } \frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t \le \varepsilon.$$

Beides zusammen gibt

$$\|\hat{u}_t(t,\xi)\|^2_{L^2\{|\xi|\in[\frac{1}{4},\,\frac{1}{2})\}} \le Ce^{-\delta t}\int_{\mathbb{R}^n}(|\xi|^2|v_0(\xi)|^2 + |v_1(\xi)|^2)d\xi$$

mit einem geeigneten positiven δ.

b) $\{\xi : |\xi| < \frac{1}{4}\}$:

In diesem Fall erhalten wir

$$\hat{u}_t(t,\xi) = \Big(\frac{v_0(\xi)}{4} + \frac{v_1(\xi)}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)(\sqrt{1-4|\xi|^2} - 1)e^{-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}.$$

Damit schätzen wir wie folgt ab:

$$|\hat{u}_t(t,\xi)| \le \Big|\Big(\frac{v_1(\xi)}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}} + \frac{v_0(\xi)}{4}\Big)\Big(\underbrace{\sqrt{1-4|\xi|^2} - 1}_{\le -2|\xi|^2}\Big)\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}}_{\le e^{-|\xi|^2 t},\ |\xi|<\frac{1}{2}}\Big|.$$

Eine fast analoge Untersuchung zur Behandlung der elastischen Energie führt zu

$$
\begin{aligned}
\|\hat{u}_t(t,\xi)\|^2_{L^2\{|\xi|<\frac{1}{4}\}} &\leq C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)|\xi|^4\left(e^{-t}+e^{-2|\xi|^2t}\right)d\xi \\
&\leq Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)d\xi \;+\; C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)|\xi|^4 e^{-2|\xi|^2t}d\xi \\
&\leq Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)d\xi \\
&\quad + C\frac{1}{t^2}\underbrace{\sup_{|\xi|<\frac{1}{4},\,t\geq 1} t^2|\xi|^4e^{-2|\xi|^2t}}_{\leq c}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)d\xi \\
&\leq Ce^{-t}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)d\xi \;+\; \frac{C}{(1+t)^2}\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)d\xi \\
&\leq \frac{C}{(1+t)^2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|v_1(\xi)|^2+|v_0(\xi)|^2\right)d\xi.
\end{aligned}
$$

Damit sind alle Aussagen von Satz 6.3 bewiesen. □

Aufgabe 48 Wir sind interessiert an $L^2 - L^2$ Abschätzungen für $\|\partial_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2}$ und für $\|\partial_x^\alpha u_t(t,\cdot)\|_{L^2}$, wobei $u=u(t,x)$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0,\; u(0,x)=u_0(x),\; u_t(0,x)=u_1(x)$$

ist. Was ergibt sich? Wie gehen wir vor?

Herleitung einer $L^1 - L^\infty$ Abschätzung

Wir wenden uns der elastischen Energie (jetzt auf der Basis der L^∞-Norm) $\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ zu. Dann gilt wieder mit den Regeln der Fouriertransformation

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \||\xi|\hat{u}_t(t,\cdot)\|_{L^1}.$$

Für $|\xi|\hat{u}_t(t,\xi)$ verwenden wir die in den einzelnen Bereichen bekannten expliziten Lösungsdarstellungen.
Wir unterscheiden folgende Fälle.
Fall 1 $\{\xi:\ |\xi|>\frac{1}{2}\}$

Wir verwenden die Darstellung $|\xi|\hat{u}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cos(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}\;t)\;\;|\xi|v_0(\xi) + t\,\frac{\sin(\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t)}{\sqrt{|\xi|^2-\frac{1}{4}}t}\;|\xi|v_1(\xi)\Big)$. Es gilt

$$\||\xi|\hat{u}(t,\xi)\|_{L^1\{|\xi|>\frac{1}{2}\}} = \int_{|\xi|>\frac{1}{2}} \langle\xi\rangle^{-n-\varepsilon}|\xi|\langle\xi\rangle^{n+\varepsilon}|\hat{u}(t,\xi)|d\xi$$

$$\leq Ce^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{-n-\varepsilon}d\xi(\|\langle\xi\rangle^{n+\varepsilon}|\xi||v_0(\xi)|+\langle\xi\rangle^{n+\varepsilon}|v_1(\xi)|\|_{L^\infty})$$
$$\leq Ce^{-t}(\|u_0\|_{W^{n+\varepsilon+1,1}}+\|u_1\|_{W^{n+\varepsilon,1}}).$$

Damit benötigen wir für Abschätzungen über die großen Frequenzbereiche eine zusätzliche Regularität der Daten. Wir erhalten sogar ein exponentielles decay.
Fall 2 $\{\xi:|\xi|<\frac{1}{2}\}$
Wir verwenden die Darstellung

$$|\xi|\hat{u}(t,\xi)=|\xi|e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\Big(\frac{v_0(\xi)}{2}-\frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}$$
$$+\Big(\frac{v_0(\xi)}{2}+\frac{v_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\Big)e^{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t}\Big)$$
$$=v_0(\xi)|\xi|\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{2v_1(\xi)|\xi|}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2}t\Big)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Wir unterteilen das Intervall $[0,\frac{1}{2})$ in zwei Teilintervalle.
a) $\{\xi:|\xi|\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2})\}$:
Hier schätzen wir wie folgt ab:

$$|\xi||\hat{u}(t,\xi)| = |\, v_0(\xi)|\xi|\underbrace{\cosh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2t}\Big)}_{\leq\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)}e^{-\frac{1}{2}t}+\underbrace{\frac{\sinh\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2t}\Big)}{\frac{1}{2}\sqrt{1-4|\xi|^2t}}t}_{\leq C\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)}\,v_1(\xi)|\xi|e^{-\frac{1}{2}t}\,|$$
$$\leq |\, v_0(\xi)|\xi|\underbrace{\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)e^{-\frac{1}{2}t}}_{\leq e^{-\delta t},\,\delta>0}+C\underbrace{v_1(\xi)|\xi|}_{\leq|v_1(\xi)|}\underbrace{\cosh(\frac{\sqrt{3}}{4}t)\,e^{-\frac{1}{2}t}}_{\leq e^{-\delta t},\,\delta>0}\,|,$$

und schlußfolgern

$$\int_{\frac{1}{4}\leq|\xi|<\frac{1}{2}}|\xi||\hat{u}(t,\xi)|d\xi\leq Ce^{-\delta t}\int_{\frac{1}{4}\leq|\xi|<\frac{1}{2}}1d\xi\;(\||\xi||v_0(\xi)|+|v_1(\xi)|\|_{L^\infty})$$
$$\leq Ce^{-\delta t}(\|u_0\|_{W^{1,1}}+\|u_1\|_{L^1}).$$

Damit benötigen wir für Abschätzungen über diesen Frequenzbereich keine zusätzliche Regularität der Daten. Wir erhalten sogar ein exponentielles decay.

b) $\{\xi:|\xi|\in[0,\frac{1}{4})\}$:

Hier nutzen wir für $|\xi| < \frac{1}{2}$ die Ungleichung $-4|\xi|^2 \le -1 + \sqrt{1-4|\xi|^2} \le -2|\xi|^2$. Mit dieser Ungleichung verfahren wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi||\hat{u}(t,\xi)|d\xi &\le \int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)||\xi| + |v_0(\xi)||\xi|)(\underbrace{e^{-\frac{1}{2}(t+\sqrt{1-4|\xi|^2}t)}}_{\le e^{-t/2}} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(t-\sqrt{1-4|\xi|^2}t)}}_{\le e^{-|\xi|^2 t}})d\xi \\
&\le Ce^{-\frac{1}{2}t} \int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)||\xi| + |v_0(\xi)||\xi|)d\xi \\
&\quad + C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)| + |v_0(\xi)|)|\xi|e^{-|\xi|^2 t}d\xi.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Normungleichung $\|\cdot\|_{L^1} \le \|\cdot\|_{L^\infty}\|\cdot\|_{L^1}$ erhalten wir für den zweiten Term der rechten Seite der letzten Ungleichung

$$\begin{aligned}
C&\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} (|v_1(\xi)| + |v_0(\xi)|)|\xi|e^{-|\xi|^2 t}d\xi \\
&\le C\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi|e^{-|\xi|^2 t}d\xi \;(\||v_1(\xi)| + |v_0(\xi)|\|_{L^\infty}) \\
&\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}}(\|u_1\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1}) \text{ für } t \ge 1.
\end{aligned}$$

Wir schlußfolgern

$$\int_{|\xi|<\frac{1}{4}} |\xi||\hat{u}(t,\xi)|d\xi \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}}(\|u_1\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1}).$$

Zusammenfassend haben wir damit gezeigt

$$\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}}(\|u_0\|_{W^{n+\varepsilon+1,1}} + \|u_1\|_{W^{n+\varepsilon,1}})$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 49 Wir sind interessiert an einer $L^1 - L^\infty$ Abschätzung für $u_t(t,\cdot)$, wobei $u = u(t,x)$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0,\; u(0,x) = u_0(x),\; u_t(0,x) = u_1(x)$$

ist. Was ergibt sich? Wie gehen wir vor?

Wir sammeln jetzt die $L^2 - L^2$ Abschätzungen und die $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen und wenden das Interpolationsresultat von Satz 6.1 an. Dann erhalten wir folgende Aussagen:

$L^2 - L^2$ decay Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^2}), \\
\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

$L^1 - L^\infty$ decay Abschätzungen:

$$\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}} (\|u_0\|_{W^{n+\varepsilon+1,1}} + \|u_1\|_{W^{n+\varepsilon,1}}),$$
$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon (1+t)^{-1-\frac{n}{2}} (\|u_0\|_{W^{n+\varepsilon+1,1}} + \|u_1\|_{W^{n+\varepsilon,1}})$$

für alle $\varepsilon > 0$.

$L^p - L^q$ decay Abschätzungen:

Folgerung 6.4 *$L^p - L^q$ decay Abschätzungen*

Für die elastische und kinetische Energien der Lösungen u von $u_{tt} - \triangle u + u_t = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x),\ u_0, u_1 \in S(\mathbb{R}^n)$, gelten die folgenden $L^p - L^q$ decay Abschätzungen:

$$\|\nabla_x u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(N,p)(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\|u_0\|_{W^{N+1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{W^{N,p}(\mathbb{R}^n)}),$$
$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C(N,p)(1+t)^{-1-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\|u_0\|_{W^{N+1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{W^{N,p}(\mathbb{R}^n)})$$

für $2 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Aufgabe 50 Vergleichen Sie die Aussagen der Folgerungen 6.3 und 6.4!

6.3 $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für die Energie von Lösungen der Wellengleichung

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem

$$u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x).$$

Wir können natürlich Lösungsdarstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren herleiten. Nach Anwendung der partiellen Fouriertransformation, der Lösung von Cauchy-Problemen für gewöhnliche Differentialgleichungen mit dem Parameter $|\xi|$ und anschließender Anwendung der inversen partiellen Fouriertransformation erhalten wir die Lösungsdarstellung

$$u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{1}{2}\Big(e^{it|\xi|} + e^{-it|\xi|}\Big)F(u_0)(\xi) + \frac{1}{2i|\xi|}\Big(e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}\Big)F(u_1)(\xi)\Big).$$

Da wir durch Energieuntersuchungen sofort $L^2 - L^2$ Abschätzungen herleiten können, müssen wir nur noch $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen der Modell-Fouriermultiplikatoren

$$F^{-1}_{\xi\to x}(\cos(t|\xi|)F(u_0)(\xi)),\ \ F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}F(u_1)(\xi)\Big)$$

herleiten. Dazu werden wir das know-how des Abschnittes 6.5 nutzen. Im folgenden Abschnitt werden wir noch einmal explizite Lösungsdarstellungen (vgl. auch mit den Aussagen der Sätze 2.6 und 2.7 der Abschnitte 2.1.7 und 2.1.8) zur Herleitung von $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen der Energie heranziehen.

6.3.1 Die Verwendung expliziter Lösungsdarstellungen

Nach Satz 2.2 und Folgerung 2.2 ist die eindeutig bestimmte Lösung des obigen Cauchy-Problems im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_1(y)d\sigma_y + \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} u_0(y)d\sigma_y\Big) \\ &= \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_1(x+t\omega)d\sigma_\omega + \partial_t\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_0(x+t\omega)d\sigma_\omega\Big). \end{aligned}$$

Damit konzentrieren wir uns zuerst auf $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen der Modelloperatoren

$$P_1 := u_1 \to \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_1(x+t\omega)d\sigma_\omega, \quad P_2 := u_1 \to \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_1(x+t\omega)d\sigma_\omega.$$

Wir setzen voraus, daß das Datum u_1 gerade die richtige Regularität für die nachfolgenden Umformungen besitzt. In jedem Fall können wir $u_1 \in S(\mathbb{R}^3)$ voraussetzen.

Satz 6.4 *Es gelten folgende $L^1 - L^\infty$ decay Abschätzungen:*

$$\begin{aligned} \|P_1u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\le C(1+t)^{-1}\|u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^3)}, \\ \|P_2u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\le C(1+t)^{-2}\|u_1(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Beweis: Wenden wir uns zuerst P_2 zu. Es sei $t \ge 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -\int_{|\omega|=1} u_1(x+t\omega)d\sigma_\omega &= \int_{|\omega|=1}\int_t^\infty \frac{d}{ds}u_1(x+s\omega)dsd\sigma_\omega \\ &= \int_{|\omega|=1}\int_t^\infty (\nabla u_1)(x+s\omega)\cdot\omega dsd\sigma_\omega = \int_{|\omega|=1}\int_t^\infty \frac{s^2}{s^3}(\nabla u_1)(x+s\omega)\cdot(s\omega)dsd\sigma_\omega \\ &= \int_{|y|>t}\frac{1}{|y|^3}(\nabla u_1)(x+y)\cdot ydy. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $y := s\omega$ gesetzt. Nutzen wir schließlich $\frac{1}{|y|} \le \frac{1}{t}$, dann erhalten wir aus der letzten Ungleichungskette sofort

$$\|P_2u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le \frac{C}{t^2}\int_{\mathbb{R}^3}|(\nabla u_1)(x+y)|dy \le \frac{C}{t^2}\|u_1\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^3)}.$$

Für P_1u_1 ergibt sich daraus für $t \ge 1$ die Abschätzung

$$\|P_1u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^3}|(\nabla u_1)(x+y)|dy \le \frac{C}{t}\|u_1\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^3)}.$$

Wenden wir uns jetzt P_2 für $t \in [0,1]$ zu. Es lassen sich die Ideen von den Abschätzungen für $t \geq 1$ nachvollziehen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&-\int_{|\omega|=1} u_1(x+t\omega)d\sigma_\omega = \int_{|\omega|=1}\int_t^\infty \frac{d}{ds}u_1(x+s\omega)dsd\sigma_\omega \\
&= -\int_{|\omega|=1}\int_t^\infty (s-t)\frac{d^2}{ds^2}u_1(x+s\omega)dsd\sigma_\omega = \int_{|\omega|=1}\int_t^\infty \frac{(s-t)^2}{2}\frac{d^3}{ds^3}u_1(x+s\omega)dsd\sigma_\omega \\
&= \int_{|y|>t} \frac{(|y|-t)^2}{2|y|^5} \sum_{i,j,k=1}^3 y_iy_jy_k\partial_i\partial_j\partial_k u_1(x+y)dy.
\end{aligned}$$

Wenn wir also die dritte Ableitung von u_1 kontrollieren, dann ist

$$\frac{(|y|-t)^2}{2|y|^5} \sum_{i,j,k=1}^3 y_iy_jy_k$$

beschränkt auf der Menge $\{y : |y| > t\}$ und wir erhalten für $t \in [0,1]$ die Abschätzung

$$\|P_2u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,k=1}^3 |\partial_i\partial_j\partial_k u_1(x+y)|dy \leq C\|u_1\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)}.$$

Analog gehen wir für P_1 und $t \in [0,1]$ vor. Da wir den Faktor t zusätzlich haben, müssen wir nur zwei Ableitungen kontrollieren, da jetzt schon der Term

$$\frac{(|y|-t)t}{2|y|^4} \sum_{i,j=1}^2 y_iy_j$$

auf der Menge $\{y : |y| > t\}$ beschränkt ist. Insgesamt bekommen wir damit für $t \in [0,1]$ die Abschätzung

$$\|P_1u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^2 |\partial_i\partial_j u_1(x+y)|dy \leq C\|u_1\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^3)}.$$

Fassen wir die Abschätzungen für P_2u_1 und P_1u_1 für $t \geq 1$ und $t \in [0,1]$ zusammen,

$$\begin{aligned}
&\|P_1u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{t}\|u_1\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^3)}, \quad \|P_2u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{t^2}\|u_1\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^3)} \text{ für } t \geq 1, \\
&\|P_1u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u_1\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^3)}, \quad \|P_2u_1(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u_1\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)} \text{ für } t \in [0,1],
\end{aligned}$$

dann erhalten wir die gewünschten Aussagen. □

Folgerung 6.5 *Es gelten folgende $L^1 - L^\infty$ decay Abschätzungen im $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned}
&\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-1}(\|u_0(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^3)}),\\
&\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-1}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^3)}),\\
&\|u_t(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-1}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^3)}).
\end{aligned}$$

Hier ist $u = u(t,x)$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

mit Daten u_0 und u_1 aus $S(\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Wir haben folgende Lösungsdarstellungen:

$$\begin{aligned}
&u(t,x) = P_1 u_1(t,x) + P_1(\nabla u_0 \cdot \omega)(t,x) + P_2 u_0(t,x),\\
&\nabla u(t,x) = P_1(\nabla u_1)(t,x) + P_1((\nabla(\nabla u_0 \cdot \omega))(t,x) + P_2(\nabla u_0),\\
&u_t(t,x) = P_2 u_1(t,x) + P_1(\nabla u_1 \cdot \omega)(t,x) + 2P_2(\nabla u_0 \cdot \omega) + P_1(\nabla(\nabla u_0 \cdot \omega)\cdot \omega)(t,x).
\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Satz 6.4 erhalten wir aus diesen Darstellungen sofort die gewünschten Abschätzungen. □

Nach der d'Alembertschen Lösungsdarstellung im $\mathbb{R}^1$ wissen wir, daß keine decay Abschätzungen für die Energie der Lösungen zu erwarten sind. Wenden wir deshalb nun dem Fall $n = 2$ zu. Nach Satz 2.5 haben wir folgende Lösungsdarstellung:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{K_t(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}dy + \partial_t\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{K_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}dy\Big).$$

Hier ist $u = u(t,x)$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

mit Daten u_0 und u_1 aus $S(\mathbb{R}^2)$. Die letzte Lösungsdarstellung können wir auch in der Form

$$u(t,x) = (P_1 u_0)(t,x) + t\Big(\partial_t (P_1 u_0)(t,x) + (P_1 u_1)(t,x)\Big)$$

mit

$$(P_1 u_0)(t,x) = \frac{1}{2\pi t}\int_0^t \int_{|\omega|=1} \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} u_0(x + r\omega)d\sigma_\omega dr.$$

Hier haben wir ausgenutzt

$$\begin{aligned}
\int_{K_t(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}dy &= \int_0^t \int_{|\omega|=1} \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} u_0(x + r\omega)d\sigma_\omega dr\\
&= t\int_0^1 \int_{|\omega|=1} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} u_0(x + st\omega)d\sigma_\omega ds,
\end{aligned}$$

im letzten Schritt haben wir $r =: st$ gesetzt.
Wir erinnern uns jetzt an die Umformung aus Abschnitt 2.1.6 (Abstiegsmethode)

$$\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x_1,x_2,x_3)} p(y_1,y_2)d\sigma_{(y_1,y_2,y_3)} = \frac{1}{2\pi}\int_{K_t(x_1,x_2)} \frac{p(y_1,y_2)}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\, d(y_1,y_2).$$

Demnach gilt auch

$$\begin{aligned}(P_1u_0)(t,x) &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S_t(x_1,x_2,x_3)} u_0(y_1,y_2)d\sigma_{(y_1,y_2,y_3)}\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_0(x_1+t\omega_1,x_2+t\omega_2)d\sigma_{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}.\end{aligned}$$

Die letzte Darstellung für P_1u_0 ist eine Form, in welcher Differentiationen sehr schön erklärt werden können. So erhalten wir ohne weitere Probleme

$$\begin{aligned}\partial_t(P_1u_0)(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} \partial_t u_0(x_1+t\omega_1,x_2+t\omega_2)d\sigma_{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1} (\nabla u_0)(x_1+t\omega_1,x_2+t\omega_2)\cdot\omega d\sigma_{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}.\end{aligned}$$

Wir wollen im folgenden verstehen wie wir eine L^1-L^∞ Abschätzung für den Modellausdruck P_1u_0 erhalten. Mit ähnlichen Überlegungen erhalten wir dann L^1-L^∞ Abschätzungen für $t\partial_tP_1u_0$, tP_1u_1, damit also auch für u selbst. Die Ableitungen u_t und ∇u lassen sich entsprechend behandeln, da wir sofort

$$\begin{aligned}&u_t(t,x) = 2\partial_t(P_1u_0)(t,x) + t\partial_t^2(P_1u_0)(t,x) + (P_1u_1)(t,x) + t\partial_t(P_1u_1)(t,x),\\ &(\nabla u)(t,x) = (\nabla P_1u_0)(t,x) + t\Big(\partial_t(\nabla P_1u_0)(t,x) + (\nabla P_1u_1)(t,x)\Big)\end{aligned}$$

bekommen. Wenden wir uns P_1u_0 zu. Für $t\in[0,1]$ schließen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2}|(P_1u_0)(t,x)| &= \sup_{(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2}\Big|\int_0^1\int_{|\omega|=1}\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}u_0(x+st\omega)d\sigma_\omega ds\Big|\\ &\le C\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C\|u_0\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

nach Anwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes. Damit wird die notwendige Regularität festgelegt.

Beachte: Man sollte diese $W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$-Regularität von u_0 auch erhalten, wenn man wie bei der Behandlung des 3-d Falls zwei Ableitungen in das Integral "mogelt". Diese Bemerkung ist wichtig, um die $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$-Regularität von u_1 in tP_1u_1 zu verstehen. Wie im 3-d Fall hilft der Faktor t, eine Regularitätsstufe für u_1 weniger vorauszusetzen als für u_0.

Für $t \geq 1$ schließen wir nach [42] wie folgt.
1. Fall: $\quad 0 \leq r \leq t-\varepsilon$ *mit* $\varepsilon > 0$ *ist klein.*
Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2\pi t}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{|\omega|=1}\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega dr\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{2\pi t}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{|\omega|=1}\frac{r}{\sqrt{(t-r)(t+r)}}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega dr\Big| \\
&\quad \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon t^3}}\Big|\int_0^{t-\varepsilon}\int_{|\omega|=1} r u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega dr\Big| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon t^3}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\quad t-\varepsilon \leq r \leq t$ *mit* $\varepsilon > 0$ *ist klein.*
Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2\pi t}\int_{t-\varepsilon}^{t}\int_{|\omega|=1}\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega dr\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{2\pi t}\int_{t-\varepsilon}^{t}\int_{|\omega|=1}\frac{r}{\sqrt{(t-r)(t+r)}}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega dr\Big| \\
&\quad \leq \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{t^3}}\sup_{(r,x)\in[t-\varepsilon,t]\times\mathbb{R}^2}\Big|r\int_{|\omega|=1}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega\Big|.
\end{aligned}$$

Bleibt das Supremum abzuschätzen. Durch das Hineinmogeln einer Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned}
r\int_{|\omega|=1}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega &= -r\int_{|\omega|=1}\int_r^\infty \partial_s u_0(x+s\omega)dsd\sigma_\omega \\
&= -r\int_{|\omega|=1}\int_r^\infty \nabla u_0(x+s\omega)\cdot\omega ds d\sigma_\omega \\
&= -\int_{|\omega|=1}\int_r^\infty \frac{r}{s}\nabla u_0(x+s\omega)\cdot s\omega ds d\sigma_\omega.
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\sup_{(r,x)\in[t-\varepsilon,t]\times\mathbb{R}^2}\Big|r\int_{|\omega|=1}u_0(x+r\omega)d\sigma_\omega\Big| \leq \int_{|y|>t/2}|\nabla u_0(y)|dy \leq C\|u_0\|_{W^{1,1}}.$$

Insgesamt können wir damit folgende $L^1 - L^\infty$ Abschätzung für $P_1 u_0$ schlußfolgern:

$$\|(P_1 u_0)(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}}\|u_0\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

Werten wir analog die obigen Modelloperatoren aus, dann erhalten wir im 2-d Fall folgende Aussagen:

Satz 6.5 *Es gelten folgende $L^1 - L^\infty$ decay Abschätzungen im $\mathbb{R}^2$:*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}),$$
$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_1(\cdot)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}),$$
$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)}).$$

Hier ist $u = u(t,x)$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

mit Daten u_0 und u_1 aus $S(\mathbb{R}^2)$.

Einige Erläuterungen zu Verallgemeinerungen:

In entsprechender Weise lassen sich $L^p - L^q$ decay Abschätzungen auch für Lösungen der Cauchy-Probleme für die Wellengleichung in Dimensionen $n > 3$ erzielen. Dazu verwenden wir die expliziten Lösungsdarstellungen der Sätze 2.6, 2.7 und die Ideen zur Herleitung der $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen für die Modelloperatoren P_1, $t\partial_t P_1$ und tP_1.

6.4 $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für Lösungen der Klein-Gordon Gleichung

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem für die Klein-Gordon Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x).$$

Wir können natürlich Lösungsdarstellungen in Form von Fouriermultiplikatoren herleiten. Nach Anwendung der partiellen Fouriertransformation, der Lösung von Cauchy-Problemen für gewöhnliche Differentialgleichungen mit dem Parameter $\langle\xi\rangle_m := (|\xi|^2 + m^2)^{1/2}$ und anschließender Anwendung der inversen partiellen Fouriertransformation erhalten wir die Lösungsdarstellung

$$u(t,x) = F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{1}{2}\Big(e^{it\langle\xi\rangle_m} + e^{-it\langle\xi\rangle_m}\Big)F(u_0)(\xi) + \frac{1}{2i\langle\xi\rangle_m}\Big(e^{it\langle\xi\rangle_m} - e^{-it\langle\xi\rangle_m}\Big)F(u_1)(\xi)\Big).$$

Da wir aus der Erhaltung der Klein-Gordon Energie sofort $L^2 - L^2$ Abschätzungen herleiten können, müssen wir nur noch $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen der Modell-Fouriermultiplikatoren

$$F^{-1}_{\xi\to x}(\cos(t\langle\xi\rangle_m)F(u_0)(\xi)),\quad F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{\sin(t\langle\xi\rangle_m)}{\langle\xi\rangle_m}F(u_1)(\xi)\Big)$$

herleiten. Dazu werden wir das know-how des Abschnittes 6.5 nutzen. Im folgenden Abschnitt werden wir noch einmal versuchen, explizite Lösungsdarstellungen zur Herleitung von $L^1 - L^\infty$ Abschätzungen der Energie heranziehen. Dazu können wir auf den Wellenfall zurückgreifen.

6.4.1 Die Verwendung expliziter Lösungsdarstellungen

Wenden wir uns dem Cauchy-Problem für die Klein-Gordon Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

zu. Wir interessieren uns jetzt für die Raumdimensionen $n = 1$ und $n = 2$. Dann können wir nach [42] folgende Transformationen strapazieren:

$$\begin{aligned} &\text{im Fall } n = 1: \qquad v(t,x,y) = \exp(-imy)u(t,x), \\ &\text{im Fall } n = 2: \qquad v(t,x,y,z) = \exp(-imz)u(t,x,y). \end{aligned}$$

Diese Transformationen überführen

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

in

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} = 0,\ v(0,x,y) = \exp(-imy)u_0(x),\ v_t(0,x,y) = \exp(-imy)u_1(x),$$

und

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + m^2 u = 0,\ u(0,x,y) = u_0(x,y),\ u_t(0,x) = u_1(x,y)$$

in

$$\begin{aligned} &v_{tt} - v_{xx} - v_{yy} - v_{zz} = 0, \\ &v(0,x,y,z) = \exp(-imz)u_0(x,y),\ v_t(0,x,y,z) = \exp(-imz)u_1(x,y). \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Cauchy-Probleme für die Wellengleichung in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ erhalten und können eigentlich die Resultate aus Abschnitt 6.3.1 strapazieren. Dort haben wir allerdings die Daten aus $S(\mathbb{R}^2)$ oder $S(\mathbb{R}^3)$ vorausgesetzt. Die Terme $\exp(-imy)$ und $\exp(-imz)$ in den Cauchy-Daten zerstören die Voraussetzungen $S(\mathbb{R}^2)$ oder $S(\mathbb{R}^3)$.

Wir folgen dabei der folgenden Strategie. Wir benutzen die Lösungsdarstellungen aus Abschnitt 6.3.1 und zeigen, daß sich die Terme $\exp(-imy)$ und $\exp(-imz)$ nicht negativ auf die Abschätzungen auswirken. Hierbei läßt sich die Analytizität dieser Terme benutzen. Speziell erhalten wir

für die Klein-Gordon Gleichung im Fall $n = 1$ die Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} v(t,x,y) = &\frac{1}{2\pi}\int_{K_t(x,y)} \frac{u_1(\xi)\exp(-im\eta)}{\sqrt{t^2 - ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}} d(\xi,\eta) \\ &+\partial_t\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{K_t(x,y)} \frac{u_0(\xi)\exp(-im\eta)}{\sqrt{t^2 - ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}} d(\xi,\eta)\Big), \end{aligned}$$

für die Klein-Gordon Gleichung im Fall $n = 2$ die Lösungsdarstellung

$$
\begin{aligned}
v(t,x,y,z) &= \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x,y,z)} u_1(\xi,\eta)\exp(-im\rho)d\sigma_{(\xi,\eta,\rho)} \\
&+ \partial_t\Big(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x,y,z)} u_0(\xi,\eta)\exp(-im\rho)d\sigma_{(\xi,\eta,\rho)}\Big) \\
&= \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_1(x+t\omega_1, y+t\omega_2)\exp(-im(z+t\omega_3))d\sigma_\omega \\
&\quad +\partial_t\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} u_0(x+t\omega_1, y+t\omega_2)\exp(-im(z+t\omega_3))d\sigma_\omega\Big).
\end{aligned}
$$

Durch eine genaue Analysis kann man entsprechende Abschätzungen zu denen der Abschnitte 6.3.1 herleiten. Man muß nur geschickt die Modelloperatoren aus Abschnitt 6.3.1 auswerten. Es sollten sich dann die folgenden Resultate zeigen lassen:

Satz 6.6 *Es gelten folgende $L^1 - L^\infty$ decay Abschätzungen für die Lösungen von*

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 u = 0,\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

im $\mathbb{R}^1$:

$$
\begin{aligned}
&\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^1)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^1)}), \\
&\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^1)} + \|\nabla u_1(\cdot)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^1)}), \\
&\|u_t(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \le C(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^1)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^1)})
\end{aligned}
$$

mit Daten u_0 und u_1 aus $S(\mathbb{R}^1)$.

Satz 6.7 *Es gelten folgende $L^1 - L^\infty$ decay Abschätzungen im $\mathbb{R}^2$:*

$$
\begin{aligned}
&\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-1}(\|u_0(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^2)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)}), \\
&\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-1}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u_1(\cdot)\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^2)}), \\
&\|u_t(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C(1+t)^{-1}(\|\nabla u_0(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^2)} + \|u_1(\cdot)\|_{W^{3,1}(\mathbb{R}^2)})
\end{aligned}
$$

mit Daten u_0 und u_1 aus $S(\mathbb{R}^2)$.

Bemerkungen:

- Der Masseterm erzeugt eine um 1/2 bessere decay-Ordnung im Vergleich zur Wellengleichung im Falle gleicher Raumdimension.
- In den obigen Aussagen benötigen wir eine um eine Ordnung höhere Regularität der Daten. Man kann aber zeigen, daß das nur im Fall $n = 1$ notwendig ist. Im Fall $n \ge 2$ erhält man die decay-Abschätzung unter der gleichen Regularität der Daten wie im gleichdimensionalen Wellenfall.

6.5 Oszillierende Integrale

6.5.1 Oszillierende Integrale in einer Variablen

Wesentliche Fragen aus der Theorie partieller Differentialgleichungen benötigen Kenntnisse über oszillierende Integrale. Das sind Integrale der Form

$$I(\lambda) := \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx,$$

wobei die *Phasenfunktion* $\phi = \phi(x)$ reellwertig und glatt ist, wobei die *Amplitudenfunktion* $\psi = \psi(x)$ komplexwertig und glatt ist und wobei λ eine große positive Zahl ist. Im allgemeinen interessiert uns das Verhalten solcher Integrale für große Werte von λ.

6.5.1.1 Lokalisierung

Falls ψ einen kompakten Träger im Intervall (a,b) besitzt, dann ist das asymptotische Verhalten von $I(\lambda)$ bestimmt durch die Nullstellen von ϕ'.

Lemma 6.1 *Vorgelegt seien glatte Phasen- und Amplitudenfunktionen φ und ψ, wobei ψ einen kompakten Träger in (a,b) und ϕ' keine Nullstellen auf $[a,b]$ besitzt. Dann gilt*

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-N}) \quad \textit{für} \quad \lambda \to \infty \quad \textit{und für alle} \quad N \geq 0.$$

Beweis: Mit L bezeichnen wir den Differentialoperator $L = (i\lambda\phi')^{-1}\frac{d}{dx}$. Dann ist der transponierte Operator L^T gegeben durch $L^T = -\frac{d}{dx}\,\frac{1}{i\lambda\phi'}$. Für jedes $N \geq 0$ haben wir $L^N(e^{i\lambda\phi}) = e^{i\lambda\phi}$. Partielle Integration und die Voraussetzungen bez. ψ und ϕ' sichern

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi}\psi dx = \int_a^b L^N(e^{i\lambda\phi})\psi dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi}(L^T)^N\psi dx.$$

Daraus folgt sofort

$$|I(\lambda)| = \Big|\int_a^b e^{i\lambda\phi}(L^T)^N\psi dx\Big| \leq C_N\lambda^{-N}.$$

□

Merke: Falls die Amplitudenfunktion ψ nicht kompakten Träger in (a,b) besitzt, dann entstehen im Prozess der partiellen Integration noch Terme in den Randpunkten a und b. Das beste, was man erwarten kann, ist $I(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ wie das Beispiel

$$\int_a^b e^{i\lambda x}dx = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}$$

zeigt. Das *Lokalisierungsprinzip* beschreibt das asymptotische Verhalten von $I(\lambda)$ durch das Verhalten von ϕ' auf $[a,b]$ und durch das Verhalten von ϕ und ψ in den Endpunkten a und b.

6.5.1.2 Skalierung

Vorgelegt sei jetzt $J(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx$. Wie verhält sich $J(\lambda)$ für $\lambda \to \infty$, falls $|d_x^k\phi(x)| \geq 1$ auf $[a,b]$ mit einem gewissen k erfüllt ist? Im Abschnitt 6.5.1.1 haben wir $|d_x\phi(x)| \geq C > 0$ auf $[a,b]$ vorausgesetzt. Die Variablentransformation $x \to \lambda^{-\frac{1}{k}}x'$ liefert als einzige mögliche Abschätzung $J(\lambda) = O(\lambda^{-\frac{1}{k}})$.

Lemma 6.2 (van der Corput)
Die Phasenfunktion ϕ sei reellwertig, glatt und $|\phi^{(k)}| \geq 1$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt unter den Voraussetzungen

- *$k \geq 2$,*
- *$k = 1$ und ϕ' ist monoton*

die Abschätzung

$$|J(\lambda)| \leq C_k\lambda^{-\frac{1}{k}},$$

wobei die Konstante C_k unabhängig von ϕ und λ ist.

Beweis: Wenden wir uns zuerst dem Fall $k = 1$ zu. Mit dem Operator L aus dem Beweis zu Lemma 6.1 erhalten wir

$$J(\lambda) = \int_a^b L(e^{i\lambda\phi})dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi}L^T 1dx + (i\lambda\phi')^{-1}e^{i\lambda\phi}\Big|_a^b.$$

Die Randterme können jeweils durch $1/\lambda$ abgeschätzt werden. Weiterhin gilt unter der Ausnutzung der Monotonie von ϕ'

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}L^T 1dx\right| = \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}(i\lambda)^{-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)dx\right|$$

$$\leq \lambda^{-1}\int_a^b \left|\frac{d}{dx}\ \frac{1}{\phi'}\right|dx = \lambda^{-1}\left|\int_a^b \frac{d}{dx}\ \frac{1}{\phi'}dx\right| = \lambda^{-1}\left|\frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)}\right|.$$

Damit ist die Aussage für $k = 1$ und mit $C_1 = 3$ bewiesen.
Wir beweisen die Aussage für $k \geq 2$ durch Induktion. Nach eventuellem Ersatz von ϕ zu $-\phi$ können wir voraussetzen $\phi^{(k+1)}(x) \geq 1$ auf $[a,b]$. Es sei $x = c$ der eindeutig bestimmte Punkt in $[a,b]$, in welchem $|\phi^{(k)}(x)|$ sein Minimum annimmt. Falls $\phi^{(k)}(c) = 0$, dann gilt außerhalb des Intervalls $(c-\delta, c+\delta)$ die Abschätzung

$|\phi^{(k)}(x)| \geq \delta$ (im Fall $k=1$ ist ϕ' monoton). Wir zerlegen $\int_a^b = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\Big| \int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\phi} dx \Big| \leq C_k (\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}, \ \Big| \int_{c+\delta}^{b} e^{i\lambda\phi} dx \Big| \leq C_k (\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}.$$

Nutzen wir schließlich $\left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\phi} dx \right| \leq 2\delta$, dann ergibt sich

$$|J(\lambda)| \leq \frac{2C_k}{(\lambda\delta)^{\frac{1}{k}}} + 2\delta.$$

Falls $\phi^{(k)}(c) \neq 0$ ist und somit c eines der Endpunkte a oder b ist, erhalten wir durch eine analoge Schlussweise

$$|J(\lambda)| \leq \frac{C_k}{(\lambda\delta)^{\frac{1}{k}}} + \delta.$$

Man wird jetzt $\delta = \delta(\lambda)$ so bestimmen, dass δ und $(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}$ einen gleichen Einfluss auf das asymptotische Verhalten von $J(\lambda)$ haben, somit $\delta = \lambda^{-\frac{1}{k+1}}$. Damit ist $|J(\lambda)| \leq C_{k+1}\lambda^{-\frac{1}{k+1}}$ und die Aussage für $k \geq 2$ bewiesen. □

Folgerung 6.6. *Unter den Voraussetzungen an ϕ aus Lemma 6.2 gilt*

$$\Big| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \Big| \leq C_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \Big(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \Big).$$

Aufgabe 51 Beweisen Sie diese Aussage.

6.5.1.3 Asymptotisches Verhalten

Wir sind jetzt an dem präzisen asymptotischen Verhalten von $I(\lambda)$ interessiert. Falls die Amplitudenfunktion $\psi = \psi(x)$ einen kompakten Träger in (a,b) besitzt, dann wird das Verhalten von $I(\lambda)$ im wesentlichen durch die kritischen Punkte der Phasenfunktion $\phi = \phi(x)$, d.h. durch die Nullstellen von ϕ', bestimmt. Wir setzen voraus, dass der Träger von ψ genau einen kritischen Punkt x_0 von ϕ besitzt. Der folgende Satz ist eines der Kernresultate der *Methode der stationären Phase.*

Satz 6.8. *Für $k \geq 2$ setzen wir voraus $\phi(x_0) = \cdots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$, aber $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$. Falls ψ einen Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 besitzt, dann gilt*

$$I(\lambda) \sim \lambda^{-\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-\frac{j}{k}} \qquad \textit{im folgenden Sinne:}$$

$$d_\lambda^r\Big(I(\lambda) - \lambda^{-\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{N} a_j \lambda^{-\frac{j}{k}}\Big) = O\Big(\lambda^{-r-\frac{N+2}{k}}\Big) \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty$$

und für alle nichtnegativen N und r.

Beweis: Wir liefern den Beweis für $k = 2$. Er wird in vier Schritte untergliedert.
1. Schritt: Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx \sim \lambda^{-\frac{l+1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(l)} \lambda^{-j}$$

für jedes nichtnegative ganze l. Falls l ungerade ist, verschwindet das Integral. Untersuchen wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx \ ,$$

dann liefert die Variablentransformation $z = (1-i\lambda)^{1/2}x$ und die Tatsache, dass das Fallen von e^{-z^2} den Ersatz der Integrationsgerade $(1-i\lambda)^{1/2}\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}$ gestattet, sofort

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx = (1-i\lambda)^{-\frac{l+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^l dx.$$

Wir nutzen den Hauptzweig von $z^{-\frac{l+1}{2}}$ in der komplexen Ebene, aufgeschnitten entlang der negativen rellen Halbachse. Dann gilt

$$(1-i\lambda)^{-\frac{l+1}{2}} = \lambda^{-\frac{l+1}{2}}(\lambda^{-1} - i)^{-\frac{l+1}{2}} \quad \text{für} \quad \lambda > 0.$$

Die Potenzreihenentwicklung von $(w-i)^{-\frac{l+1}{2}}$ in der Kreisscheibe $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ liefert die obige asymptotische Darstellung für $w = \lambda^{-1} \to 0$.

2. Schritt: Wir zeigen für eine Funktion $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l a(x) dx\Big| \leq C\lambda^{-\frac{l+1}{2}}.$$

Es sei $\chi = \chi(x)$ eine Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\chi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\chi(x) = 0$ für $|x| \geq 2$. Mit einem $\varepsilon > 0$ splitten wir obiges Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l a(x)\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l a(x)\Big(1 - \chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) dx.$$

Der Betrag des ersten Integrals der rechten Seite kann abgeschätzt werden durch $C\varepsilon^{l+1}$. Berücksichtigen wir den einzigen stationären Punkt 0 der Phasenfunktion $\phi(x) = x^2$, dann können wir wieder den Operator L aus dem Beweis zu Lemma 6.1 strapazieren. Damit erhalten wir nach N-maliger partieller Integration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l a(x)\Big(1-\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}(L^T)^N\Big(x^l a(x)\Big(1-\chi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big)dx.$$

Der Betrag der rechten Seite kann abgeschätzt werden durch

$$\frac{C_N}{\lambda^N}\int_{|x|\geq\varepsilon}|x|^{l-2N}dx = \tilde{C}_N\lambda^{-N}\varepsilon^{l-2N+1} \qquad \text{für } \; l-2N<-1.$$

Somit schlussfolgern wir

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}x^l a(x)dy\Big| \leq C_N\varepsilon^{l+1} + \lambda^{-N}\varepsilon^{l-2N+1}.$$

Jetzt wird $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ so gewählt, dass beide Summanden einen gleichen Einfluss auf die Abschätzung haben. Somit ist die obige Abschätzung gezeigt, sofern $N > \frac{l+1}{2}$ gewählt wird.

3. Schritt: Wir beweisen die Aussage des Satzes für $\phi(x) = x^2$. Dazu benutzen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}e^{-x^2}(e^{x^2}\psi(x))\chi(x)dx,$$

wobei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ gleich 1 ist auf dem Träger von ψ. Für jedes N wählen wir die Taylorsche Formel mit Restglied

$$e^{x^2}\psi(x) = \sum_{j=0}^N b_j x^j + x^{N+1}R_N(x) = P(x) + x^{N+1}R_N(x).$$

Einsetzen in obiges Integral liefert

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}\psi(x)dx &= \sum_{j=0}^N b_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}e^{-x^2}x^j dx \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}P(x)e^{-x^2}\Big(\chi(x)-1\Big)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2}x^{N+1}R_N(x)e^{-x^2}\chi(x)dx.\end{aligned}$$

Für die Summe der Integrale nutzen wir die Abschätzung aus dem 1. Schritt. Für das letzte Integral nutzen wir die Abschätzung aus dem 2. Schritt. Zur Abschätzung des vorletzten Integrals beachten wird, dass $P(x)e^{-x^2}(\chi(x)-1) = 0$ für $|x| \leq$

ε. Damit liefern partielle Integration und die Tatsache, dass $P(x)e^{-x^2}(\chi(x)-1)$ eine schnell fallende Funktion aus $S(\mathbb{R})$ ist, sofort das gewünschte asymptotische Verhalten aus Satz 6.8 für $\phi(x) = x^2$.

4. Schritt: Wir beweisen die Aussage des Satzes für $k = 2$ und für eine allgemeine Phasenfunktion $\phi = \phi(x)$. Da ψ einen hinreichend kleinen Träger in einer Umgebung von x_0 besitzt, brauchen wir nur dort das Verhalten der Phasenfunktion berücksichtigen und erhalten $\phi(x) = c(x-x_0)^2(1+\varepsilon(x))$, wobei $\varepsilon = \varepsilon(x)$ glatt ist mit $\varepsilon(x) = O(|x-x_0|)$ und damit $|\varepsilon(x)| < 1$ für x in der Nähe von x_0. Außerdem gilt $\phi'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Es sei U ein kleines Intervall um x_0 so, dass alle obigen Bedingungen erfüllt sind. Die Variablentransformation $y = (x-x_0)(1+\varepsilon(x))^{\frac{1}{2}}$ erzeugt einen Diffeomorphismus von U auf ein Intervall um $y = 0$ mit $cy^2 = \phi(x)$. Somit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda cy^2}\tilde{\psi}(y)dy$$

mit $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ falls der Träger von ψ in $U(x_0)$ liegt. Auf diese Weise ist der allgemeine Fall mit $k = 2$ auf den im dritten Schritt behandelten Fall zurückgeführt.
$\square$

Bemerkung: Der Beweis für $k \geq 3$ verläuft ähnlich und basiert auf der Identität

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x^k} e^{-x^k} x^l dx = C_{k,l}(1-i\lambda)^{-\frac{l+1}{k}}.$$

Jede Konstante a_j, die in der asymptotischen Entwicklung aus Satz 6.8 auftritt, hängt nur von endlich vielen Ableitungen von ϕ und ψ in x_0 ab. Für $k = 2$ ergibt sich z.B.

$$a_0 = \left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \psi(x_0).$$

Ebenfalls hängen die Fehlerterme $O\Big(\lambda^{-r-\frac{N+2}{k}}\Big)$ von endlich vielen Ableitungen von ϕ und ψ auf dem Träger von ψ, von dem Maß des Trägers von ψ und der unteren Grenze von $|\phi^{(k)}(x_0)|$ ab.

6.5.1.4 Beispiele

a) In Abschnitt 2.2.1 haben wir Lösungsdarstellungen für Wellengleichungen in Form von Fouriermultiplikatoren kennengelernt. Ein solcher Fouriermultiplikator hat im $1-d$ Fall die Gestalt $F^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{it\xi}a(\xi)\Big)$. Wir setzen jetzt voraus, dass die glatte

Funktion $a(\xi) = F(b(x))$ einen kompakten Träger im Intervall (a,b) besitzt. Dann gilt mit $x = ty$

$$F^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{it\xi}a(\xi)\Big)(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{i(x+t)\xi}a(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{it(y+1)\xi}a(\xi)d\xi.$$

Damit ist Folgerung 6.1 anwendbar. Für $y \neq -1$ gilt mit $\lambda = t$, mit $d_\xi\phi = y+1 \neq 0$ und somit für große Zeiten t

$$\Big|F^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{it\xi}a(\xi)\Big)\Big(t,ty\Big)\Big| \leq C_1 t^{-1}\int_a^b |a'(\xi)|d\xi.$$

Frage: Kann man noch ein stärkeres Fallen in t herausholen?

Für $y = -1$ bzw. $x = -t$ erhalten wir

$$F^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{it\xi}a(\xi)\Big)(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b a(\xi)d\xi = b(0).$$

Damit ist i. allg. entlang $\{(t,x) : x = -t\}$ kein Fallen des Fouriermultiplikators zu erwarten.

b) Die *Besselfunktionen* $J_m(r)$ ganzzahliger Ordnung m sind definiert durch

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta}e^{-im\theta}d\theta.$$

Uns interessiert das Verhalten von $J_m(r)$ für $r \to \infty$. Mit $\lambda = r$ und $\phi(\theta) = \sin\theta$ haben wir $\phi'(\theta) = 0$ für $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\theta = \frac{3\pi}{2}$. An diesen Stellen ist $\phi''(\theta) \neq 0$. Setzen wir die Zerlegung $1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$, dabei ist $\chi_1 = \chi_1(\theta)$ aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit $\chi_1 \equiv 1$ in einem kleinen Intervall um $\frac{\pi}{2}$, dabei ist $\chi_3 = \chi_3(\theta)$ aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ mit $\chi_3 \equiv 1$ in einem kleinen Intervall um $\frac{3\pi}{2}$, in das Integral für $J_m(r)$ ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} J_m(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta}\chi_1(\theta)e^{-im\theta}d\theta \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta}\chi_3(\theta)e^{-im\theta}d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta}\chi_2(\theta)e^{-im\theta}d\theta. \end{aligned}$$

Nach Anwendung von Folgerung 6.6 wissen wir, dass sich die ersten beiden Integrale wie $r^{-\frac{1}{2}}$ und das dritte Integral wie r^{-1} für $r \to \infty$ verhalten. Insgesamt schlussfolgern wir $J_m(r) = O(r^{-\frac{1}{2}})$ für $r \to \infty$.

Aufgabe 52 Leiten Sie die vollständige asymptotische Darstellung für $J_m(r)$ für $r \to \infty$ her.

6.5.2 Oszillierende Integrale in mehreren Variablen

In diesem Abschnitt interessiert uns das oszillierende Integral

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx.$$

Dann hat die Phasenfunktion $\phi = \phi(x)$ in x_0 einen *kritischen oder stationären Punkt*, falls $\nabla\phi(x_0) = 0$ gilt.

6.5.2.1 Anwendung partieller Integration

Als Verallgemeinerung von Lemma 6.1 haben wir folgende Aussage:

Lemma 6.3 *Vorgelegt seien glatte Phasen- und Amplitudenfunktionen ϕ und ψ, wobei ψ einen kompakten Träger besitzt. Falls die reellwertige Phasenfunktion ϕ keinen stationären Punkt auf dem Träger von ψ besitzt, dann gilt*

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-N}) \quad \textit{für} \;\; \lambda \to \infty \;\; \textit{und für alle} \;\; N \geq 0.$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog dem von Lemma 6.1, wenn wir den Operator $L = \frac{1}{i\lambda|\nabla\phi|^2}\nabla\phi \cdot \nabla$ wählen. □

6.5.2.2 Der Fall nicht entarteter kritischer Punkte

Die Phasenfunktion $\phi = \phi(x)$ habe in x_0 einen stationären Punkt. Falls die Hesse-Matrix

$$H_\phi(x_0) = (\partial^2_{x_k x_l}\phi)^n_{k,l=1}(x_0)$$

in x_0 invertierbar ist, dann heißt der *stationäre Punkt nicht entartet.* Als Verallgemeinerung von Satz 6.8 für $k = 2$ gilt folgende Aussage:

Satz 6.9 *Es sei $\phi(x_0) = 0$ und ϕ habe in x_0 einen nicht entarteten stationären Punkt. Falls die glatte Amplitudenfunktion $\psi = \psi(x)$ ihren Träger in einer kleinen Umgebung von x_0 besitzt, dann gilt*

$$I(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \sim \lambda^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-j} \quad \textit{für} \quad \lambda \to \infty.$$

Dabei ist das asymptotische Verhalten im gleichen Sinne wie in Satz 6.8 zu verstehen.

Beweis: Der Beweis verallgemeinert in vielen Schritten den von Satz 6.8 für $k = 2$. Es sei $Q(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 - \sum\limits_{k=m+1}^{n} x_k^2$ eine quadratische Form mit $0 \leq m \leq n$.

1. Schritt: Wie im Beweis zu Satz 6.8 zeigt man

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} e^{-|x|^2} x^\alpha dx \sim \lambda^{-\frac{n+|\alpha|}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(m,l)\lambda^{-j}$$

für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ und mit $x^\alpha = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$.

Aufgabe 53 Zeigen Sie diese asymptotisch Entwicklung.

2. Schritt: Wir zeigen für eine Funktion $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} x^\alpha a(x) dx \Big| \le C\lambda^{-\frac{n+|\alpha|}{2}}.$$

Dazu wählen wir Kegel $\Gamma_k = \{x : |x_k|^2 \ge |x|^2/2n\}$ und $\Gamma_k^0 = \{x : |x_k|^2 \ge |x|^2/n\}$, $k = 1, \cdots, n$.

Da $\bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k^0 = \mathbb{R}^n$ ist, können wir Funktionen $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$, die glatt für $x \neq 0$ und homogen vom Grad 0, d.h. $\Omega_k(x) = \Omega_k(\beta x)$ für $\beta \in \mathbb{R}$, sind finden, die der Bedingung $\sum_{k=1}^{n} \Omega_k(x) = 1$ für $x \neq 0$ (Zerlegung der 1) genügen. Dabei hat jedes Ω_k seinen Träger in Γ_k. Zu untersuchen haben wir somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} x^\alpha a(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} x^\alpha a(x)\Omega_k(x) dx.$$

Im Kegel Γ_k nutzen wir partielle Integration

$$L_k e^{i\lambda Q(x)} = e^{i\lambda Q(x)} \quad \text{mit} \quad L_k = \pm(2i\lambda x_k)^{-1}\partial_{x_k}.$$

Da außerdem $|x_k| \ge (2n)^{-\frac{1}{2}}|x|$ in Γ_k erfüllt ist, schlussfolgern wir

$$\big|(L_k^T)^N (x^\alpha a(x)\Omega_k(x))\big| \le C_N \lambda^{-N} |x|^{-2N}.$$

Ein analoges Vorgehen wie im 2.Schritt des Beweises zu Satz 6.8 liefert die gewünschte Aussage.

Die restlichen Schritte laufen analog. Damit ist die Aussage des Satzes für $Q(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 - \sum_{k=m+1}^{n} x_k^2$ bewiesen.

3. Schritt: Der Beweis für den allgemeinen Fall basiert auf dem sogenannten *Morse-Lemma.* Da $\phi(x_0) = 0, \nabla\phi(x_0) = 0$ und der stationäre Punkt x_0 nicht entartet ist, existiert ein Diffeomorphismus einer kleinen Umgebung von x_0 im x-Raum auf eine kleine Umgebung des Ursprungs im y-Raum so, dass $\phi = \phi(x)$

in $\sum\limits_{k=1}^{m} y_k^2 - \sum\limits_{k=m+1}^{n} y_k^2$ transformiert wird. Damit ist der allgemeine Fall auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt. Zeigen wir noch die Gültigkeit des Morse-Lemmas. Es reicht den Fall $x_0 = 0$ zu untersuchen. Nach Voraussetzung gilt $\phi(x) = \sum\limits_{k,l=1}^{n} x_k x_l \phi_{kl}(x)$ mit glatten Funktionen $\phi_{kl} = \phi_{kl}(x), \phi_{kl} = \phi_{lk}$. Weiterhin haben wir $\phi_{kl}(0) = \frac{1}{2}\partial^2_{x_k x_l}\phi(0)$.

Nach einer linearen Koordinatentransformation können wir in jedem Falle sichern $\phi_{11}(0) \neq 0$. Wir führen nun neue Variablen

$$y_1 = (\pm\phi_{11}(x))^{\frac{1}{2}} \left(x_1 + \sum_{k>1} \frac{x_k \phi_{k1}(x)}{\pm\phi_{11}(x)} \right), y_k = x_k, k \geq 2,$$

ein. Dabei ist $\pm$ das Vorzeichen von $\phi_{11}(0)$, das liefert $\pm\phi_{11}(x) = |\phi_{11}(x)|$. Diese nichtlineare Koordinatentransformation liefert

$$\phi(x) = \pm y_1^2 + \sum_{k,l \geq 2}^{n} y_k y_l \widetilde{\phi}_{kl}(y)$$

mit glatten Funktionen $\tilde{\phi}_{kl} = \tilde{\phi}_{kl}(y)$. Eine lineare Koordinatentransformation sichert $\phi_{22}(0) \neq 0$. Wir führen jetzt ein $y'_k = y_k$ für $k \neq 2$ und

$$y'_2 = (\pm\phi_{22}(y))^{1/2} \Big(y_2 + \sum_{k>2} \frac{y_k \phi_{k2}(y)}{\pm\phi_{22}(y)} \Big).$$

Diese Transformation liefert

$$\phi(x) = \pm y_1'^2 \pm y_2'^2 \pm \sum_{k,l \geq 3}^{n} y'_k y'_l \hat{\phi}_{kl}(y').$$

Schritt für Schritt erhalten wir die Aussage des Morse-Lemma. □

6.5.2.3 Beispiel

Im Zusammenhang mit der Herleitung von $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen sind Abschätzungen von

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big| F^{-1}_{\xi \to x} \Big(e^{it|\xi|} a(\xi) \Big) \Big|$$

von Interesse, wobei der sich der Träger der glatten Amplitudenfunktion $a = a(\xi)$ in der Kugelschale $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \in [1/2, 2]\}$ befindet. Setzen wir $x = ty$, dann kann obiger Ausdruck äquivalent umgeformt werden zu

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(y\cdot\xi + |\xi|)} a(\xi) d\xi \Big|.$$

Die Phasenfunktion $\phi = \phi(y, \xi) = y \cdot \xi + |\xi|$, der große Parameter λ ist in unserem Falle t. Die stationären oder kritischen Punkte ergeben sich durch

$$\nabla_\xi (y \cdot \xi + |\xi|) = y + \frac{\xi}{|\xi|} = 0.$$

Es sei $y \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben.

Aufgabe 54 Welche Abschätzung erhalten wir für obigen Ausdruck falls y nicht auf der Einheitssphäre liegt?

Es liege nun y auf der Einheitssphäre, d.h. $|y| = 1$. Dann liegen alle stationären Punkte $\xi \in \mathbb{R}^n$ auf dem Strahl durch den Ursprung, auf welchem der Vektor $-y$ liegt. Damit sind natürlich die *kritischen Punkte nicht isoliert*, da sie ja auf einem Strahl liegen. Als Hesse-Matrix $H_\phi(\xi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} H_\phi(\xi) &= \frac{1}{|\xi|^3} \begin{pmatrix} |\xi|^2 - \xi_1^2 & -\xi_1\xi_2 & \dots & -\xi_1\xi_n \\ \xi_2\xi_1 & |\xi|^2 - \xi_2^2 & \dots & -\xi_2\xi_n \\ -\xi_n\xi_1 & -\xi_n\xi_2 & \dots & |\xi|^2 - \xi_n^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\xi|} \begin{pmatrix} 1 - \eta_1^2 & -\eta_1\eta_2 & \dots & -\eta_1\eta_n \\ -\eta_2\eta_1 & 1 - \eta_2^2 & \dots & -\eta_2\eta_n \\ -\eta_n\eta_1 & -\eta_n\eta_2 & \dots & 1 - \eta_n^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\eta = \xi/|\xi|$ auf der Einheitssphäre liegt.

Aufgabe 55 Zeigen Sie, daß die Hesse-Matrix im stationären Punkt ξ nicht invertierbar ist.

Damit scheint die Anwendung von Satz 6.9 hoffnungslos. Mann kann jetzt folgendes zeigen:

• Zu vorgegebenem $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen kritischen Punkt $\eta = \eta(y)$ auf der Einheitssphäre, nach den obigen Ausführungen sollte das klar sein.

• Die Hesse-Matrix, gebildet in $\eta = \eta(y)$ nach den $n - 1$ Koordinaten, die die Kugeloberfläche in einer kleinen Umgebung von $\eta = \eta(y)$ aufspannen, ist invertierbar.

Somit gelingt es doch Satz 6.9 anzuwenden und wir erwarten auf Grund der Reduktion der Koordinaten um 1 eine Abschätzung der Form

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(y\cdot\xi + |\xi|)} a(\xi) d\xi \right| \le C t^{-\frac{n-1}{2}}$$

für große Werte von t.

Aufgabe 56 Versuchen Sie einige der Untersuchungen dieses Abschnittes für den Ausdruck

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(y\cdot\xi + \langle\xi\rangle_m)} a(\xi) d\xi \right|$$

nachzuvollziehen. Solche Ausdrücke sind im Zusammenhang mit $L^p - L^q$ decay-Abschätzungen für Lösungen von Klein-Gordon Gleichungen abzuschätzen.

6.5.2.4 Der Fall degenerierter kritischer Punkte

Dieser Fall ist i.allg. sehr schwierig zu behandeln. Wir haben aber eine zumindest eine abgeschwächte Form des Lemmas von van der Corput.

Satz 6.10 *Die Amplitudenfunktion $\psi = \psi(x)$ sei glatt und getragen in der Einheitskugel. Die Phasenfunktion $\phi = \phi(x)$ sei reellwertig und erfülle $|\partial_x^\alpha \phi| \geq 1$ auf dem Träger von ψ. Dann gilt*

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \Big| \leq C_k(\phi)\lambda^{-\frac{1}{k}}\Big(\|\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla\psi\|_{L^1}\Big)$$

mit $k = |\alpha|$. Die Konstante $C_k(\phi)$ ist unabhängig von λ und ψ und bleibt beschränkt, solange die C^{k+1}-Norm von ϕ beschränkt bleibt.

Bemerkung: Die obige Abschätzung ist in vielen Fällen nicht optimal, da die Dimension n auf der rechten Seite der Abschätzung nicht spürbar ist. Wählen wir z.B. im $\mathbb{R}^2$ die Phasenfunktion $\phi(x) = x_1 \cdot x_2$, dann erhalten wir $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ in der rechten Seite, da $\partial^2_{x_1x_2}\phi = 1$. Der Punkt (0,0) ist aber ein nicht entarteter stationärer Punkt. Somit liefert Satz 6.9 sogar λ^{-1}.

References

[1] F. Colombini, E. De Giorgi and S. Spagnolo, *Sur les equations hyperboliques avec des coefficients qui ne dependent que du temps*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **6** (1979) 3, 511-559.

[2] F. Colombini, D. Del Santo and T. Kinoshita, *Well-posedness of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with non- Lipschitz coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **1** (2002), 327-358.

[3] F. Colombini, D. Del Santo and M. Reissig, *On the optimal regularity of coefficients in hyperbolic Cauchy problems*, Bulletin des Sciences Mathematiques, **127** (2003) 4, 328-347.

[4] F. Colombini, E. Janelli and S. Spagnolo, *Hyperbolic equations and classes of infinitely differentiable functions*, Annali di Matematica pura ed applicata, **143** (1986), 187-195.

[5] F. Colombini and N. Lerner, *Hyperbolic operators with non-Lipschitz coefficients*, Duke Math. J., **77** (1995) 3, 657-698.

[6] F. Colombini and S. Spagnolo, *Second order hyperbolic equations with coefficients real analytic in space variables and discontinuous in time*, Journal D'Analyse Mathematique, **38** (1980), 1-33.

[7] F. Colombini and S. Spagnolo, *Hyperbolic equations with coefficients rapidly oscillating in time: a result on nonstability.* J. Differential Equations **52** (1984), 24-38.

[8] D. Del Santo, *Some results on the Cauchy problem for hyperbolic operators with non-regular coefficients*, Eds. F. Colombini and T. Nishitani, Hyperbolic problems and related topics, International Press, Somerville (2003), .

[9] M.S.P. Eastham, *The spectral theory of periodic differential equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1973.

[10] A. Galstian, $L_p - L_q$ *decay estimates for the wave equations with exponentially growing speed of propagation*, Applicable Analysis, **82** (2003) 3, 197-214.

[11] F. Hirosawa, *Energy decay for degenerate hyperbolic equations of Klein-Gordon type with dissipative term*, Funkcialaj Ekvacioj **43** (2000) 1, 163-191.

[12] F. Hirosawa, *On the Cauchy problem for second order strictly hyperbolic equations with non-regular coefficients*, Math. Nachr., **256** (2003), 29-47.

[13] F. Hirosawa, *On the asymptotic behavior of the energy for the wave equations with time depending coefficients*, preprint.

[14] F. Hirosawa and H. Nakazawa, *Rapid decay of the total energy for dissipative wave equations*, Tsukuba J. Math., **27** (2003) 2, 217-232.

[15] F. Hirosawa and M. Reissig, *About the optimality of oscillations in non-Lipschitz coefficients for strictly hyperbolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (5) (2004), 589-608.

[16] F. Hirosawa and M. Reissig M, *From wave- to Klein-Gordon type decay rates*, in: Schulze et.al, Nonlinear Hyperbolic Equations, Spectral Theory, and Wavelet Transformations, Advances in PDE, Operator Theory, Advances and Applications, Birkhäuser, vol. **145** (2003), 95-155.

[17] F. Hirosawa and M. Reissig, *Well-posedness in Sobolev spaces for second order strictly hyperbolic equations with non-differentiable oscillating coefficients*, Annals of Global Analysis and Geometry, **25** (2004), 99-119.

[18] V. Ivrii and V. Petkov, *Necessary conditions for well-posedness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations* (in Russian), Usp. Mat. Nauk, **29** (1974) 5, 3-70.

[19] A. Kubo and M. Reissig, *Construction of parametrix for hyperbolic equations with fast oscillations in non-Lipschitz coefficients*, Communications in PDE, **28** (2003) 7&8, 1471-1502.

[20] H. Kumano-go, *Pseudodifferential operators*, MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1981.

[21] W. Littman, *Fourier transformations of surface carried measures and differentiability of surface averages*, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 766-770.

[22] X. Lu and M. Reissig, *Does the loss really appear?*, 20 A4, submitted for publication.

[23] W. Magnus und St. Winkler, *Hill's equation*, Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1966.

[24] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **12** (1976), 169-189.

[25] T. Matsuyama and M. Reissig, *Stabilization and $L^p - L^q$ decay estimates*, Asymptotic Analysis, to appear.

[26] S. Mizohata, *The theory of partial differential equations*, University Press, Cambridge, 1973.

[27] K. Mochizuki and H. Nakazawa, *Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equations with linear dissipation*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **32** (1996), 401-414.

[28] T. Nishitani, *Sur les equations hyperboliques a coefficients Hölderiens en t et de classe de Gevrey en x*, Bull. Sc. math., **107** (1983), 113-138.

[29] R. Racke, *Lectures on Nonlinear Evolution Equations*, Aspects of Mathematics, vol. **19**, Vieweg (1992).

[30] M. Reissig, *A refined diagonalization procedure to handle fast oscillations in degenerate hyperbolic problems*, Eds. F. Colombini and T. Nishitani, Hyperbolic problems and related topics, International Press, Somerville (2003), 295-318.

[31] M. Reissig, *Klein-Gordon type decay rates for wave equations with a time-dependent dissipation*, Adv. Math. Sci. Appl., **11** (2001) 2, 859-891.

[32] M. Reissig, *On $L_p - L_q$ estimates for solutions of a special weakly hyperbolic equation*, Ed. Li Ta-Tsien, Nonlinear Evolution Equations and Infinite-Dimensional Dynamical Systems, 153-164, World Scientific (1997).

[33] M. Reissig and J. Smith, *$L_p - L_q$ estimate for wave equation with bounded time-dependent coefficient*, Hokkaido Mathematical Journal, **34** (2005) 3, 541-586.

[34] M. Reissig and J. Wirth, *Wave equations with monotone weak dissipation*, Fakultät für Mathematik und Informatik, TU Bergakademie Freiberg, Preprint 2003-02, 71 A4, ISSN 1433-9307.

[35] M. Reissig and K. Yagdjian, *About the influence of oscillations on Strichartz-type decay estimates*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **58** (2000) 3, 375-388.

[36] M. Reissig and K. Yagdjian, *Klein-Gordon type decay rates for wave equations with time-dependent coefficients*, Banach Center Publications, vol.**52** (2000), 189-212.

[37] M. Reissig and K. Yagdjian, *$L_p - L_q$ decay estimates for hyperbolic equations with oscillations in the coefficients*, Chin. Ann. of Math., Ser. B, **21** (2000) 2, 153-164.

[38] M. Reissig and K. Yagdjian, *$L_p - L_q$ estimates for the solutions of strictly hyperbolic equations of second order with increasing in time coefficients*, Math. Nachr., **214** (2000), 71-104.

[39] M. Reissig and K. Yagdjian, *One application of Floquet's theory to $L_p - L_q$ estimates for hyperbolic equations with very fast oscillations*, MMAS, **22** (1999), 937-951.

[40] R. Strichartz, *A priori estimates for the wave-equation and some applications*, J. Funct. Anal., **5** (1970), 218-235.

[41] S. Tarama, *On the second order hyperbolic equations degenerating in the infinite order-example-*, Math. Japonica, **42** (1995), 523-534.

[42] W. v.Wahl, *L^p-decay rates for homogeneous wave-equations*, Math. Zeitschrift, **120** (1971), 93-106.

[43] J. Wirth, *About the solvability behavior for special classes of non-linear hyperbolic equations*, Nonl. Anal., **52** (2003), 421-431.

[44] J. Wirth, *Solution representations for a wave equation with weak dissipation*, Math. Meth. Appl. Sci., **27** (2004), 101-124.

[45] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation I*, J. Differential Equations, **222** (2006), 487-514.

[46] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation II*, J. Differential Equations, **232** (2007), 74-103.

[47] K. Yagdjian, *Parametric resonance and nonexistence of global solution to nonlinear wave equations*, J. Math. Anal. Appl., **260** (2001) 1, 251-268.

[48] K. Yagdjian, *The Cauchy Problem for Hyperbolic Operators. Multiple Characteristics, Micro-Local Approach*, Akademie-Verlag, Berlin, 1997.