Seminar zu Pseudodifferentialoperatoren
gehalten von Prof. Reissig

1 Definition und einige Eigenschaften

Vorgelegt sei eine unendliche oft differenzierbare Funktion $p = p(x, \xi)$ auf der Menge $\Omega \times \mathbb{R}^n$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet sei.

Definition 1. *Der lineare Operator*

$$P(x, D)u = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) F(u)(\xi) d\xi$$

mit $u \in C_0^\infty(\Omega)$ heißt Pseudodifferentialoperator der Ordnung m, falls die vorgelegte Funktion $p = p(x, \xi)$, diese nennt man auch Symbol von P, der Abschätzung

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_{\beta,\alpha,K}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} \sim \tilde{C}_{\beta,\alpha,K} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}$$

für alle α, β und jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ erfüllt.

Bemerkung 1. *Die Menge der Symbole der Ordnung m bezeichnen wir mit $S^m(\Omega)$. Man kann auch allgemeinere Symbolklassen $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ mit $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ einführen. Diese bestehen aus allen auf $\Omega \times \mathbb{R}^n$ glatten Funktionen $p = p(x, \xi)$, die der Bedingung*

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_{\beta,\alpha,K} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

für alle α, β und jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ erfüllen. Falls die Symbole bezüglich x global definiert sind, d.h. für $x \in \mathbb{R}^n$, dann schreiben wir anstelle von $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ nur $S^m_{\rho,\delta}$. Häufig schreibt man für $S^m_{1,0}$ kurz S^m.

Bemerkung 2. *Falls man z.B. Cauchy-Probleme für Evolutionsmodelle untersucht, dann wird häufig die Bedingung*

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_{\beta,\alpha} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^n$ vorausgesetzt. Man studiert in diesem Fall das globale Verhalten von p und nicht das lokale auf beliebigen kompakten Mengen.

Satz 1. *Pseudodifferentialoperatoren sind stetige lineare Operatoren von $C_0^\infty(\Omega)$ in $C^\infty(\Omega)$.*

Beweis: Es sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Damit liegt u auch in $S(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformierte $F(u)$ liegt ebenfalls in $S(\mathbb{R}^n)$ und somit gilt

$$|F(u)(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N} \qquad \text{für jede natürliche Zahl aus } \mathbb{N}.$$

Damit ergibt sich sofort

$$|D_x^\beta(e^{ix\xi}p(x,\xi)F(u)(\xi))| \le C_{r,N}\langle\xi\rangle^{m+r-N}$$

für $|\beta| \le r$. Wählen wir $N > m+r+n$, dann ist $D_x^\beta P(x,D)u$ stetig. Da zu vorgelegtem r immer ein N entsprechend gewählt werden kann, ist $P(x,D)u \in C^\infty(\Omega)$. Entsprechend zeigt man, daß für jede, im $C_0^\infty(\Omega)$ gegen 0 konvergente Folge $\{u_k\}_k$ die Folge $\{Pu_k\}_k$ in $C^\infty(\Omega)$ gegen 0 konvergiert. Somit erhalten wir auch die stetige Abhängigkeit. $\square$

Den Pseudodifferentialoperator $P(x,D)u$ kann man formal auch in der Form

$$P(x,D_x)u = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,x-y)u(y)dy$$

schreiben, d.h. ohne Verwendung der Fouriertransformation, falls

$$K(x,z) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi z}p(x,\xi)d\xi$$

gesetzt wird. Dieses Integral konvergiert für $m < -n$. Falls $m \ge -n$, dann existiert dieses Integral im Distributionensinne, d.h. $K \in \mathcal{D}'(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. Dazu definieren wir für beliebige $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ die Wirkungen

$$K(\varphi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^n} e^{i\xi z}p(x,\xi)\varphi(x,z)d(x,z)d\xi.$$

Satz 2. *Die Distribution K fällt mit einer C^∞-Funktion außerhalb von $z=0$ zusammen.*

Beweis: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ und $\varphi = 0$ für $|z| < \delta$. Es gilt

$$e^{i\xi z} = |z|^{-2}(-\triangle_\xi)e^{i\xi z} = |z|^{-2N}(-\triangle_\xi)^N e^{i\xi z}$$

für beliebiges $N \in \mathbb{N}_0$. Wählen wir $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $h(\xi) = 1$ für $|\xi| \le 1$, dann folgt aus der Existenz von $K(\varphi)$ sofort

$$\begin{aligned}
K(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}^n} h(\varepsilon\xi)\left(\int_{\Omega\times\mathbb{R}^n} e^{i\xi z}p(x,\xi)\varphi(x,z)d(x,z)\right)d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(-\triangle_\xi)^N e^{i\xi z}|z|^{-2N}p(x,\xi)h(\varepsilon\xi)\varphi(x,z)d\xi\right)d(x,z) \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi z}(-\triangle_\xi)^N(p(x,\xi)h(\varepsilon\xi))d\xi\right)|z|^{-2N}\varphi(x,z)d(x,z).
\end{aligned}$$

Falls wir $2N > m + n$ wählen, dann existiert

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\triangle_\xi)^N p(x,\xi) d\xi$$

und man kann deshalb im obigen Integral den Grenzwert $\varepsilon \to +0$ bilden. Vorher haben wir aber abzuklären, daß das Verhalten jeder Ableitung $d_\xi^r h(\varepsilon\xi)$ vernachlässigt werden kann. Dabei benutzen wir die Trägereigenschaft von $d_s^r h(s)$. Wir erhalten

$$K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega\times\mathbb{R}^n} e^{i\xi z} (-\triangle_\xi)^N p(x,\xi) |z|^{-2N} \varphi(x,z) d(x,z) d\xi$$

und für $|z| > \delta$

$$K(x,z) = |z|^{-2N} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi z} (-\triangle_\xi)^N p(x,\xi) d\xi.$$

Falls nun $2N > m+n+r$ gewählt wird, dann gehört K zu $C^r(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{|z| < \delta\}))$. Die freie Wahl von N und $\delta > 0$ implizieren $K \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$. $\square$

Die nächste Aussage erklärt warum Pseudodifferentialoperatoren auch häufig als spezielle Integro-Differentialoperatoren bezeichnet werden.

Satz 3. *Ein Pseudodifferentialoperator ist die Komposition aus einem Differentialoperator und einem Integraloperator* $K : v \to \int_\Omega K(x,y)v(y)dy$ *mit stetigem Kern* $K = K(x,y)$*, der unendlich oft differenzierbar ist für* $x \neq y$*.*

Beweis: Es sei $2N > m + n$. Dann gilt

$$P(x,D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x,\xi) \, \frac{\langle\xi\rangle^{2N}}{\langle\xi\rangle^{2N}} \, F(u)(\xi) d\xi = K \langle D_x \rangle^{2N} u,$$

wobei

$$Kv(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi) \langle\xi\rangle^{-2N} \int_\Omega e^{i(x-y)\xi} v(y) dy \, d\xi$$

ein Integraloperator mit stetiger Kernfunktion

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} p(x,\xi) \langle\xi\rangle^{-2N} d\xi$$

ist. Wie im Beweis von Satz 2 zeigt man die Eigenschaft der unendlichen Differenzierbarkeit von K für $x \neq y$. $\square$

Differentialoperatoren, und nur diese, sind *lokal*, d.h. supp $P(x,D_x)u \subset$ supp u für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Damit sind Pseudodifferentialoperatoren i. allg. nicht lokal. Für viele Belange ist nicht der Träger, sondern der *singuläre Träger* sing supp u einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ von Interesse. Die kleinste abgeschlossene Menge $M \subset \Omega$ mit der Eigenschaft, daß $u \in C^\infty(\Omega \setminus M)$ ist, bildet den singulären Träger von u.

Definition 2. *Wir setzen voraus, daß ein vorgelegter linearer Operator P auf dem Distributionenraum $\mathcal{E}'(\Omega)$ definiert ist. Dann heißt der Operator P pseudolokal, falls*

singsupp $Pu \subset$ singsupp u für alle $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ gilt.

Satz 4. *Pseudodifferentialoperatoren sind pseudolokal.*

Beweis: Es sei $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $u \in C^\infty(\omega)$, wobei $\omega \subset \Omega$ ist. Es sei $h \in C_0^\infty(\omega)$ und $h(x) = 1$ auf einer Menge $\omega' \subset \omega$. Dann liegt hu in $C_0^\infty(\omega)$ und somit nach Satz 1 liegt $P(hu)$ in $C^\infty(\Omega)$. Wählen wir jetzt aber h_1 aus $C_0^\infty(\omega')$, dann können wir nach Satz 3 wie folgt schließen:

$$h_1(x)P((1-h)u) = h_1(x)K \circ \langle D_x \rangle^{2N}((1-h(x))u(x)).$$

Da sich die Träger von $h_1(x)$ und $1-h(y)$ nicht schneiden, und K unendlich oft differenzierbar ist für $x \neq y$ folgt $h_1(x)P((1-h)u) \in C^\infty(\omega)$. Insgesamt folgt wegen der freien Wählbarkeit von h_1, daß $P((1-h)u) + P(hu) \in C^\infty(\omega)$ erfüllt ist. Damit ist gezeigt $Pu \in C^\infty(\omega)$ für $u \in C^\infty(\omega)$, d.h. P ist pseudolokal. □

Wie wirken jetzt Pseudodifferentialoperatoren in Räumen von Distributionen?

Satz 5. *Es sei $p \in S^m(\Omega)$ vorgelegt. Dann besitzt die nach Satz 1 existierende stetige Abbildung*

$$P(x, D_x) : u \in C_0^\infty(\Omega) \to P(x, D_x)u \in C^\infty(\Omega)$$

eine stetige Fortsetzung

$$P(x, D_x) : u \in \mathcal{E}'(\Omega) \to P(x, D_x)u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Beweis: Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Dann wird durch

$$(P(x, D_x)u, \varphi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_\Omega p(x,\xi) F(u)(\xi) e^{ix\xi} \varphi(x) dx \right) d\xi$$

ein lineares und stetiges Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)$ erklärt. Dabei benutzen wir

- mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ liegt $F(\varphi)$ in $S(\mathbb{R}^n)$ und fällt damit für $|\xi| \to \infty$ schneller als jede Potenz,
- nach dem Satz von Paley-Wiener wächst für $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ die Fouriertransformierte $F(u)$ für $|\xi| \to \infty$ höchstens wie eine Potenz.

Somit ist $(P(x, D_x)u, \varphi)$ tatsächlich für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert und stellt ein lineares Funktional dar. Bleibt noch die Stetigkeit des Funktionals zu verstehen. Dazu zeigen wir, daß aus $\{u_k\}_k \to 0$ in $\mathcal{E}'(\Omega)$ sofort $\{P(x, D_x)u_k\}_k \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

folgt.
Falls $\{u_k\}_k \to 0$ in $\mathcal{E}'(\Omega)$ vorausgesetzt wird, dann folgt zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $k_0(\varepsilon)$ so, daß mit Paley-Wiener

$$|F(u_k)(\xi)| \le \varepsilon \langle \xi \rangle^p$$

mit einer von k unabhängigen Konstanten p erfüllt ist.
Damit gilt aber auch $(P(x, D_x)u_k, \varphi) \to 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Das liefert gerade die geforderte Stetigkeit. □

Schließlich stellen wir die Frage nach der Wirkung von Pseudodifferentialoperatoren in Skalen von Sobolevräumen. Was können wir überhaupt erwarten?
Bisher wissen wir, daß mit $p \in S^m(\Omega)$ der zugehörige Pseudodifferentialoperator $P(x, D_x)$ folgende Abbildungseigenschaften besitzt:

$$P(x, D_x) : u \in C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega);\ u \in \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega).$$

Damit ist es naheliegend, als Ausgangsraum wieder einen solchen mit kompakten Träger Funktionen zu wählen. Wir verwenden den Raum

$$H^s_{\text{comp}}(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \ \text{supp}\ u \subset K \subset\subset \Omega\}.$$

Als Bildraum kommt der Raum $H^s_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}$ in Frage. Es gilt $C^\infty(\Omega) = \cap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\text{loc}}(\Omega)$. Wir werden folgenden Satz beweisen.

Satz 6. *Vorgelegt sei $p \in S^m(\Omega)$. Dann ist $P(x, D_x)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung von $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ in $H^{s-m}_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Beweis: Nach Definition der Topologien auf $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ und $H^{s-m}_{\text{loc}}(\Omega)$ haben wir zu zeigen, daß zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ und allen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Konstante $C = C(s, m, K, \varphi)$ derart existiert, daß für alle $u \in H^s_{\text{comp}}(K)$ die a-priori Abschätzung

$$\|\varphi(x)P(x, D_x)u\|_{s-m} \le C\|u\|_s$$

erfüllt ist. Wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^s_{\text{comp}}(\Omega)$ reicht es folgende Beziehung zu zeigen:

$$\|\tilde{P}(x, D_x)u\|_{s-m} \le C\|u\|_s$$

für alle $u \in C_0^\infty(K)$, wobei $\tilde{P}(x, D_x)$ ein Symbol $\tilde{p} \in S^m(\Omega)$ besitzt, welches auf der Menge $(\Omega \setminus K') \times \mathbb{R}^n$ verschwindet. Hierbei wählen wir $K' = \text{supp}\ \varphi$. Mit

$u \in C_0^\infty(K) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört $\tilde{P}(x, D_x)u$ zu $S(\mathbb{R}^n)$. Mit $v \in S(\mathbb{R}^n)$ bilden wir $(\tilde{P}(x, D_x)u, v)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und erhalten nach dem Satz von Parseval-Plancherel

$$(\tilde{P}(x, D_x)u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}(x, D_x)u\overline{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{P}(x, D_x)u)(\xi)\overline{F(v)(\xi)}d\xi.$$

Benutzen wir $\tilde{p} = 0$ auf $(\Omega \setminus K') \times \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned} F(\tilde{P}(x, D_x)u)(\xi) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_\Omega e^{-ix(\xi-\eta)}\tilde{p}(x,\eta)F(u)(\eta)dx \right) d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{p})(\xi - \eta, \eta)F(u)(\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$(\tilde{P}(x, D_x)u, v) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{p})(\xi - \eta, \eta)F(u)(\eta)\overline{F(v)(\xi)}d\eta d\xi.$$

Für den Betrag der linken Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} |(\tilde{P}(x, D_x)u, v)| &\leq C(N, m) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-\frac{N}{2}}(1 + |\eta|^2)^{\frac{m}{2}}|F(u)(\eta)|F(v)(\xi)|d\eta d\xi \\ &\leq C(N, m) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{-\frac{N}{2}} \frac{(1 + |\eta|^2)^{\frac{m-s}{2}}}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{m-s}{2}}}(1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|F(u)(\eta)| \\ &\qquad \times (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-s}{2}}|F(v)(\xi)|d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Peetreschen Ungleichung

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^{|s|}\langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|}, \ \langle \xi \rangle^s \leq 2^{|s|}\langle \xi - \eta \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|} \text{ für alle } s \in \mathbb{R}$$

folgern wir nun

$$\begin{aligned} |(\tilde{P}(x, D_x)u, v)| \leq C(N, m, s) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{-N+|m-s|}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}|F(u)(\eta)| \\ \times (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-s}{2}}|F(v)(\xi)|d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Wählen wir $-N + |m - s| < -n$, dann ergibt sich sofort

$$|(\tilde{P}(x, D_x)u, v)| \leq C(N, m, s)\|u\|_s\|v\|_{m-s},$$

also auch

$$\|\tilde{P}(x, D_x)u\|_{s-m} \leq C\|u\|_s \text{ für alle } u \in C_0^\infty(K). \qquad \square$$

Wir haben uns sehr ausführlich mit Abbildungseigenschaften von $P(x, D_x)$ mit $p \in S^m(\Omega)$ auseinandergesetzt. Von Interesse ist die folgende Symbolklasse $S^{-\infty}(\Omega) := \bigcap_m S^m(\Omega)$. Pseudodifferentialoperatoren $P(x, D_x)$ mit dem Symbol $p \in S^{-\infty}(\Omega)$ sind *regularisierende Operatoren.* Sie bilden den $\mathcal{E}'(\Omega)$ in den $C^\infty(\Omega)$ ab. Dazu benutzen wir

$$(P(x, D_x)u, \varphi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_\Omega p(x, \xi) F(u)(\xi) e^{ix\xi} \varphi(x) dx \right) d\xi$$

aus dem Beweis von Satz 5.
Dann folgt die obige Beziehung aus der Tatsache, daß für jedes $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ die Fouriertransformierte $F(u)$ in einem $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ liegt und nach Bildung der Ableitung $\partial_x^\beta P(x, D_x)u$.

Man kann auch eine globale Version zu Satz 6 zeigen.

Satz 7. *Vorgelegt seien $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt die a-priori-Abschätzung*

$$\|h(x)P(x, D_x)u\|_{s-m} \le C\|u\|_s$$

für alle $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Am Ende wollen wir noch Abbildungseigenschaften von Pseudodifferentialoperatoren mit Symbolen $p \in S^m$, die der Bedingung

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \le C_{\beta,\alpha} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^n$ genügen.

Frage: Welche Abbildungseigenschaften erwarten wir?

Antwort: Wir erwarten die Abbildungseigenschaften

$$P(x, D_x) : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n), \quad S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \quad H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{R}^n).$$

Beweisen Sie diese Abbildungseigenschaften!

2 Symbolkalkül

Wir studieren jetzt Symbole mit kompaktem Träger bez. x. Diese Symbolklassen bezeichnen wir mit $S_0^m(\Omega)$.

Satz 8. *Es seien A und B Pseudodifferentialoperatoren mit den Symbolen $a \in S_0^m(\Omega)$ und $b \in S_0^k(\Omega)$. Dann ist $C = B \circ A$ ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $c \in S_0^{m+k}(\Omega)$. Außerdem gilt $c - c_N \in S_0^{m+k-N-1}(\Omega)$ für jedes N, wobei*

$$c_N(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(x,\xi) \partial_x^\alpha a(x,\xi)$$

gewählt wird.

Beweis: Formale Rechnungen ergeben

$$\begin{aligned} C(x,D_x)u &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\eta} b(x,\eta) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\eta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} a(y,\xi) F(u)(\xi) d\xi \right) dy \right) d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} c(x,\xi) F(u)(\xi) d\xi \end{aligned}$$

mit

$$c(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} b(x,\eta) a(y,\xi) e^{i(y-x)(\xi-\eta)} dy \right) d\eta.$$

Operatoren der rechten Seite werden im folgenden Satz behandelt.

Satz 9. *Vorgelegt sei die Funktion*

$$c(x,\xi) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} d(x,y,\xi,\eta) e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy \right) d\eta$$

mit einer Amplitudenfunktion $d = d(x,y,\xi,\eta)$, die folgenden Eigenschaften genügt:

- $d \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{2n}), \quad d \equiv 0 \quad$ *für* $\quad y \in \Omega \setminus K_1, \ K_1 \subset\subset \Omega,$
- $|D_\xi^\alpha D_\eta^{\alpha'} D_x^\beta D_y^{\beta'} d(x,y,\xi,\eta)| \le C_{\alpha,\alpha',\beta,\beta',K_2} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} \langle\eta\rangle^{k-|\alpha'|}$ *für jedes* $K_2 \subset\subset \Omega.$

Dann gehört die Funktion c zum Raum $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta c(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,K_2} \langle\xi\rangle^{m+k-|\alpha|} \quad \textit{für alle } \alpha, \beta, K_2 \subset\subset \Omega.$$

Falls wir definieren

$$c_N(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\le N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha D_\eta^\alpha d(x,y,\xi,\eta) \,|_{y=x,\eta=\xi}, \quad \textit{dann gilt } c - c_N \in S^{m+k-N-1}(\Omega).$$

Beweis: Wir definieren

$$\tilde{c}_N(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\eta^\alpha d)(x,y,\xi,\xi)(\eta-\xi)^\alpha e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy \right) d\eta.$$

Dann schlußfolgern wir

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_N(x,\xi) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\eta^\alpha d)(x,y,\xi,\xi)(-D_y)^\alpha e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy \right) d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_y^\alpha D_\eta^\alpha d)(x,y,\xi,\xi) e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy \right) d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_y^\alpha D_\eta^\alpha d)(x,y,\xi,\xi) e^{i(x-y)\eta} dy \right) d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_y^\alpha D_\eta^\alpha d)(x,y,\xi,\xi) e^{-iy\eta} dy \right) e^{ix\eta} d\eta\ .
\end{aligned}$$

Die Funktion $(D_y^\alpha D_\eta^\alpha d)(x,y,\xi,\xi)$ hat kompakten Träger in y und ist glatt, deshalb ist die Fouriersche Umkehrformel anwendbar. Wir erhalten

$$\tilde{c}_N(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_y^\alpha D_\eta^\alpha d)(x,x,\xi,\xi) = c_N(x,\xi).$$

Nutzen wir die Voraussetzungen, so ergibt sich sofort

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta c_N(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K_2} \langle\xi\rangle^{m+k-|\alpha|} \text{ für jedes } K_2 \subset\subset \Omega.$$

Es bleibt nur noch

$$(c-c_N)(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} r_N(x,y,\xi,\eta) e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy \right) d\eta$$

zu studieren, wobei

$$r_N(x,y,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(N+1)i^{N+1}}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^N D_\eta^\alpha d(x,y,\xi,\xi+t(\eta-\xi)) dt (\eta-\xi)^\alpha$$

gesetzt wird. Nutzen wir wiederum

$$(\eta-\xi)^\alpha e^{i(x-y)(\eta-\xi)} = (-D_y)^\alpha e^{i(x-y)(\eta-\xi)},$$

dann liefert partielle Integration bez. y

$$\begin{aligned}(c-c_N)(x,\xi) &= (2\pi)^{-n}\sum_{|\alpha|=N+1}\frac{(N+1)i^{N+1}}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n}\\ &\left(\int_0^1(1-t)^N\left(\int_{\mathbb{R}^n}D_y^\alpha D_\eta^\alpha d(x,y,\xi,\xi+t(\eta-\xi))e^{i(x-y)(\eta-\xi)}dy\right)dt\right)d\eta.\end{aligned}$$

Mit

$$e^{i(x-y)(\eta-\xi)} = (1-\triangle_y)^l e^{i(x-y)(\eta-\xi)}(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}$$

erhalten wir

$$(c-c_N)(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\sum_{|\alpha|=N+1}\frac{(N+1)i^{N+1}}{\alpha!}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}$$
$$\left(\int_0^1(1-t)^N\Big(\int_{\mathbb{R}^n}(1-\triangle_y)^l D_y^\alpha D_\eta^\alpha d(x,y,\xi,\xi+t(\eta-\xi))e^{i(x-y)(\eta-\xi)}dy\Big)dt\right)d\eta.$$

Nutzen wir die kompakte Träger-Eigenschaft von d bez. y, dann können wir wie folgt abschätzen:

$$|(c-c_N)(x,\xi)| \le C_{K_2}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^m(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{k-N-1}(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}d\eta dt.$$

Wir wählen $2l > k-N-1+n$, $2l > n$, und unterteilen das Integrationsgebiet in zwei Teile,

$$\Omega_1 = \Big\{(t,\eta) : |t(\eta-\xi)| \le \frac{|\xi|}{2}\Big\}, \qquad \Omega_2 = \Big\{(t,\eta) : |t(\eta-\xi)| \ge \frac{|\xi|}{2}\Big\}.$$

In Ω_1 gilt $|\xi| \le 2|\xi+t(\eta-\xi)| \le 3|\xi|$, also

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_1}\langle\xi\rangle^m(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{k-N-1}(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}d\eta\,dt\\ &\quad\le C\langle\xi\rangle^{m+k-N-1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{-l}d\eta \le C\langle\xi\rangle^{m+k-N-1}.\end{aligned}$$

Die Konstante C wird als universelle Konstante benutzt.
In Ω_2 gilt $|\xi| \le 2|\eta-\xi|$ und somit auch $1+|\xi+t(\eta-\xi)| \le 1+3|\eta-\xi|$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_2}\langle\xi\rangle^m(1+|\xi+t(\eta-\xi)|)^{k-N-1}(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}d\eta\,dt\\ &\le C\langle\xi\rangle^{m+k-N-1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta-\xi|^2)^{-l+|(k-N-1)/2|}d(\eta-\xi) \le C\langle\xi\rangle^{m+k-N-1}\end{aligned}$$

sofern wir $2l > |(k-N-1)/2|+n$ wählen. Hierbei sollten wir die Fälle $k > N$ und $k \leq N$ unterscheiden. Insgesamt haben wir somit

$$|(c-c_N)(x,\xi)| \leq C_{K_2} \langle\xi\rangle^{m+k-N-1}$$

gezeigt. Analog zeigt man

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta (c-c_N)(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K_2} \langle\xi\rangle^{m+k-N-1-|\alpha|}. \qquad \square$$

Mit der Aussage von Satz 9 folgt auch unmittelbar die Aussage von Satz 8, da

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha D_\eta^\alpha d(x,y,\xi,\eta)|_{y=x,\eta=\xi} &= \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha D_\eta^\alpha b(x,\eta) a(y,\xi)|_{y=x,\eta=\xi} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(x,\xi) \partial_x^\alpha a(x,\xi). \qquad \square \end{aligned}$$

Die Aussage von Satz 8 kann man als Verallgemeinerung der Leibnizschen Regel ansehen.

Frage: Wie wird eine entsprechende Aussage von Satz 8 aussehen, falls A und B Pseudodifferentialoperatoren mit den Symbolen $a \in S^m$, $b \in S^k$, die den Bedingungen

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}, \quad |D_x^\beta D_\xi^\alpha b(x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha} \langle\xi\rangle^{k-|\alpha|}$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^n$ genügen?

Folgerung. *Der Operator $B \circ A - C_0$ ist ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $m+k-1$, falls das Symbol $\sigma(C_0) := c_0(x,\xi) = a(x,\xi)b(x,\xi)$ ist.*
Wählen wir insbesondere $C_0 := A \circ B$, dann hat der Kommutator $[B,A] := B \circ A - A \circ B$ die Ordnung $m+k-1$.

Folgerung. *Der Operator $[B,A] - C_1$ hat die Ordnung $m+k-2$, falls das Symbol $\sigma(C_1) := c_1(x,\xi)$ in folgender Form gewählt wird:*

$$c_1(x,\xi) = \frac{1}{i}\{b,a\} := \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \Big(\frac{\partial b}{\partial \xi_k} \frac{\partial a}{\partial x_k} - \frac{\partial b}{\partial x_k} \frac{\partial a}{\partial \xi_k} \Big).$$

Der Ausdruck $\{b,a\}$ heißt Poisson-Klammer der Funktionen b und a.

Folgerung. *Falls einer der Pseudodifferentialoperatoren A oder B regularisierend ist und der andere ein Symbol aus $S_0^m(\Omega)$ besitzt, dann sind $A \circ B$ und $B \circ A$ auch regularisierend.*

Als Folgerung aus Satz 9 erhalten wir sofort die folgende Aussage:

Satz 10. *Vorgelegt sei der Operator*

$$Au(x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\eta} d(x,y,\eta) u(y) dy d\eta$$

mit einer Amplitudenfunktion $d = d(x,y,\eta)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- $d \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n), \quad d \equiv 0 \quad$ *für* $\quad y \in \Omega \setminus K_1,\ K_1 \subset\subset \Omega,$
- $|D_\eta^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma d(x,y,\eta)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma,K_2} \langle \eta \rangle^{m-|\alpha|}$ *für alle* $K_2 \subset\subset \Omega.$

Dann ist A ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $\sigma(A) := a(x,\xi) \in S^m(\Omega)$ und $a - a_N \in S^{m-N-1}(\Omega)$ falls wir

$$a_N(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha D_\xi^\alpha a(x,y,\xi) \Big|_{y=x}$$

definieren.

Beweis: Formale Rechnungen ergeben für $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} Au(x) &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\eta} d(x,y,\eta) \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi} F(u)(\xi) d\xi dy d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi) F(u)(\xi) d\xi \end{aligned}$$

mit

$$a(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} d(x,y,\eta) e^{i(y-x)(\xi-\eta)} dy d\eta.$$

Die Anwendung von Satz 9 liefert sofort die gewünschte Aussage. $\square$

In Satz 8 haben wir die Komposition von zwei Pseudodifferentialoperatoren kennengelernt. Wir wollen uns jetzt dem adjungierten Operator A^* zu einem vorgelegten Pseudodifferentialoperator A zuwenden.

Satz 11. *Vorgelegt sei ein Pseudodifferentialoperator A mit dem Symbol $\sigma(A) := a(x,\xi) \in S_0^m(\Omega)$. Wir definieren*

$$b_N(x,\xi) := \sum_{|\alpha| \le N} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a(x,\xi)}.$$

Dann ist der adjungierte Operator A^* ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $\sigma(A^*) := b(x,\xi) \in S_0^m(\Omega)$. Dabei gilt $b - b_N \in S_0^{m-N-1}(\Omega)$.

Beweis: Formale Rechnungen ergeben für $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Au(x)\overline{v(x)}dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{v(x)} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} u(y)dy \Big) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\overline{A^*v}(y)dy$$

mit

$$A^*v(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y-x)\xi} \overline{a(x,\xi)} v(x)dxd\xi$$

bzw. nach Variablentausch

$$A^*v(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\eta} \overline{a(y,\eta)} v(y)dyd\eta.$$

Die Anwendung von Satz 10 liefert sofort die gewünschte Aussage. □

Frage: Wie wird eine entsprechende Aussage von Satz 11 aussehen, falls A ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $a \in S^m$, das den Bedingungen

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le C_{\beta,\alpha} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|},$$

gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}^n$ genügt?

3 Elliptizität

Definition 3. *Ein vorgelegter Pseudodifferentialoperator A mit dem Symbol $a = a(x,\xi)$ heißt elliptisch in einem Gebiet Ω, falls für jede kompakte Menge $K \subset\subset \Omega$ Konstanten $C_0 = C_0(K)$ und $C_1 = C_1(K)$ mit $|a(x,\xi)| \ge C_0|\xi|^m - C_1$ für alle $x \in K$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ existieren.*

Der Begriff der *Elliptizität* steht in engem Zusammenhang mit dem der *Parametrix*. Es sei dazu Ω' ein Teilgebiet von Ω mit $\overline{\Omega'} \subset\subset \Omega$. Weiterhin sei $h \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $h \equiv 1$ in einer Umgebung von $\overline{\Omega'}$.

Definition 4. *Ein Pseudodifferentialoperator B_r der Ordnung $-m$ heißt rechte Parametrix zum vorgelegten Pseudodifferentialoperator A der Ordnung m im Gebiet Ω', falls für alle $u \in C_0^\infty(\Omega')$ die Beziehung $AhB_ru = u + T_ru$ erfüllt ist. Dabei ist der Pseudodifferentialoperator T_r regularisierend. Auf die gleiche Weise läßt sich eine linke Parametrix B_l definieren. Diese erfüllt $B_lhAu = u + T_lu$ mit einem regularisierenden Operator T_l.*

Fragen: Sind linke oder rechte Parametrix eindeutig bestimmt? Worin besteht der Unterschied zu einem links- oder rechts-inversen Operator?

Nach Satz 8 wissen wir $a(x,\xi)b(x,\xi) - 1 \in S^{-1}(\Omega')$, falls $b = b(x,\xi)$ das Symbol einer linken oder rechten Parametrix ist. Damit gilt $|a(x,\xi)b(x,\xi)| \geq 1/2$ für große $|\xi|$. Da B_r oder B_l die Ordnung $-m$ besitzen, folgt sofort $|a(x,\xi)| \geq C\langle\xi\rangle^m$ für große $|\xi|$. Somit ist A elliptisch mit der Ordnung m. Genauso beweist man die Elliptizität von B_r oder B_l.

Satz 12. *Es sei A ein elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung m in einem Gebiet Ω. Dann existiert in jedem Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subset\subset \Omega$ ein elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung $-m$, der sowohl eine linke als auch rechte Parametrix zu A ist. Mann nennt dann B Parametrix zu A.*

Für den Beweis von Satz 12 benutzen wir das folgende Resultat, das uns gestattet, aus einer Folge $\{a_j\}_j$ von Symbolen ein Symbol a zu konstruieren.

Satz 13. *Vorgelegt sei eine Folge $\{a_j\}_{j\in N}$ mit $a_j \in S^{m-j}(\Omega)$ für alle $j \geq 0$. Dann existiert ein Symbol $a \in S^m(\Omega)$ mit $a - \sum_{j=0}^{N} a_j \in S^{m-N-1}(\Omega)$ für alle N. Man schreibt dann formal $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$.*

Beweis: Es sei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq 1$ und $\chi(\xi) = 1$ für $|\xi| \geq 2$. Es sei $\{V_j\}_{j\in N}$ eine Folge kompakter Teilmengen aus Ω mit $V_j \subset V_{j+1}$ und $\lim_{j\to\infty} V_j = \Omega$. Wir wählen schließlich eine Nullfolge $\{\varepsilon_j\}_{j\in N}$ so, dass

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha(\chi(\varepsilon_j\xi)a_j(x,\xi))| \leq 2^{-j}\langle\xi\rangle^{m-j-|\alpha|+1}$$

für alle $x \in V_k$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $|\alpha+\beta| + k \leq j$ erfüllt ist.

Gelingt eine solche Konstruktion? Wir wissen nach Voraussetzung, dass

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a_j(x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha,V_k}\langle\xi\rangle^{m-j-|\alpha|}$$

gilt. Durch Wahl von ε_j haben wir nur $|\xi| \geq \frac{1}{\varepsilon_j}$ zu beachten.

Durch die $+1$ im Exponenten schlussfolgern wir wie folgt:

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha(\chi(\varepsilon_j\xi)a_j(x,\xi))| \leq C_{\beta,\alpha,V_k}\langle\xi\rangle^{m-j-|\alpha|+1}\langle\xi\rangle^{-1} \leq \varepsilon_j C_{\beta,\alpha,V_k}\langle\xi\rangle^{m-j-|\alpha|+1}.$$

Wählen wir nun ε_j so, dass zu den vorgegebenen Koeffizienten C_{β,α,V_k} gilt $\varepsilon_j C_{\beta,\alpha,V_k} \leq 2^{-j}$ für $|\alpha+\beta|+k \leq j$ gilt, dann ist die gewünschte Ungleichung gezeigt. Setzen wir

$$a(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j\xi)a_j(x,\xi),$$

dann werden wir im Folgendem zeigen, dass a die gewünschten Eigenschaften aus Satz 13 erfüllt. Es seien $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt.

Laut Konstruktion existiert ein $j_0 = j_0(\xi)$ mit $\varepsilon_{j_0} < |\xi|^{-1}$. Somit ergibt sich

$$a(x,\xi) := \sum_{j=0}^{j_0-1} \chi(\varepsilon_j \xi) a_j(x,\xi).$$

Damit konvergiert die Reihe für jedes $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt auch sofort die Eigenschaft $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Es sei jetzt eine beliebige kompakte Menge $K \subset \Omega$ vorgegeben. Dann existiert ein $k_0(K)$ mit $K \subset V_k$ für alle $k \geq k_0(K)$. Es seien jetzt $x \in K$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt. Weiterhin seien α, β und k_0 fest gewählt. Mit obigem $j_0(\xi)$ haben wir dann

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha,V_{k_0}} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} + \sum_{j=|\alpha+\beta|+k_0}^{j_0-1} 2^{-j} \langle\xi\rangle^{m-j-|\alpha|+1} \leq C'_{\beta,\alpha,V_{k_0}} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}$$

für alle $|\alpha+\beta|+k \leq j$. Damit liegt a in $S^m(\Omega)$. Es bleibt noch $a - \sum_{j=0}^{N} a_j \in S^{m-N-1}(\Omega)$ zu zeigen. Das schlussfolgern wir aus der Darstellung

$$a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N} a_j(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N} (\chi(\varepsilon_j \xi) - 1) a_j(x,\xi) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) a_j(x,\xi).$$

Die endliche Summe hat einen kompakten Träger in ξ und liegt somit in $S^{-\infty}(\Omega)$. Zur Abschätzung der Reihe gehen wir wie oben vor und zeigen

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) a_j(x,\xi) \in S^{m-N-1}(\Omega).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Beweis von Satz 12: Die Voraussetzung der Elliptizität sichert $|a(x,\xi)| \geq \frac{C_0}{2}(|\xi|^m + 1)$ für $|\xi| \geq C$. Es sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(\xi) = 0$ für $|\xi| \leq C$ und $\psi(\xi) = 1$ für $|\xi| \geq C + 1$. Weiterhin sei $h \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $h(x) \equiv 1$ in einer Umgebung der kompakten Menge $\overline{\Omega'}$. Wir definieren den Pseudodifferentialoperator B_0 mit dem Symbol $\sigma(B_0) = b_0(x,\xi) = \psi(\xi)\frac{1}{a(x,\xi)}$. Dann liegt b_0 in $S^{-m}(\Omega)$. Nach Anwendung von Satz 8 verstehen wir, dass die Ordnung von $C_1 := Ah(x)B_0 - h(x)I$ gerade -1 ist, d.h. $\sigma(C_1) = c_1(x,\xi) \in S^{-1}(\Omega)$. Wir definieren den Pseudodifferentialoperator B_1 mit dem Symbol $\sigma(B_1) = b_1(x,\xi) = -c_1(x,\xi)\psi(\xi)\frac{1}{a(x,\xi)} \in S^{-m-1}(\Omega)$. Die Ordnung von $C_2 := Ah(x)B_1 + h(x)C_1$ ist gerade -2, also $\sigma(C_2) = c_2(x,\xi) \in S^{-2}(\Omega)$. Durch Fortsetzung dieses Konstruktionsverfahrens, wir definieren

$$\sigma(B_k)(x,\xi) =: b_k(x,\xi) = -c_k(x,\xi)\psi(\xi)\frac{1}{a(x,\xi)}, \quad C_{k+1} := Ah(x)B_k + h(x)C_k,$$

erhalten wir eine Folge von Pseudodifferentialoperatoren $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ der Ordnung $m-k$ und eine Folge $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ der Ordnung $-k$. Nach Satz 13 existiert ein Pseudodifferentialoperator B der Ordnung $-m$ mit $B - \sum\limits_{j=0}^{k-1} B_j$ hat die Ordnung $-m-k$. Nach Satz 13 existiert ein Pseudodifferentialoperator C der Ordnung -1 mit $C - \sum\limits_{j=0}^{k-1} C_j$ hat die Ordnung $-1-k$. Diese konstruierten Pseudodifferentialoperatoren B und C erfüllen die Beziehung $Ah(x)B - h(x)I + h(x)C = C + T_r$ mit einem regularisierenden Pseudodifferentialoperator T_r. Wegen $h(x) \equiv 1$ auf Ω', ist B auf dieser Menge eine rechte Parametrix zu A.

Auf gleiche Weise definieren wir Pseudodifferentialoperatoren $B_0', B_1', B_2', \cdots$, $C_1', C_2', \cdots$, indem wir mit B_0' als Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $\sigma(B_0') = \psi(\xi)\frac{1}{a(x,\xi)}, C_1' = B_0'h(x)A - h(x)I, \sigma(C_1') = c_1'(x,\xi) \in S^{-1}(\Omega)$ starten. Auf diese Weise erhalten wir $B'h(x)A - h(x)I + h(x)C' = C' + T_l$ mit einem regularisierenden Pseudodifferentialoperator T_l. Wegen $h(x) \equiv 1$ auf Ω', ist B' auf dieser Menge eine linke Parametrix zu A.

Wir zeigen $(B - B')h$ ist regularisierend, d.h. $\sigma(B) = \sigma(B')$ modulo $S^{-\infty}(\Omega')$. Das folgt aus

$$\begin{aligned} B'hAhB &= B'h(hI + (1-h)C + T_r) = B'h^2 + T_r, \\ B'hAhB &= (hI + (1-h)C' + T_l)hB = h^2B + T_l, \end{aligned}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega')$ mit anderen regularisierenden Pseudodifferentialoperatoren T_r und T_l. Daraus erhalten wir $B'h^2 - h^2B$ ist regularisierend, also $\sigma(B) = \sigma(B')$ modulo $S^{-\infty}(\Omega')$. $\square$

4 Nicht standardmäßige Symbolklassen

Interessieren wir uns für schwach hyperbolische Cauchy-Probleme bzw. für entartete Cauchy-Probleme für P-Evolutionsgleichungen oder für strikt hyperbolische Cauchy-Probleme bzw. für Cauchy-Probleme für P-Evolutionsgleichungen mit Koeffizienten niederer Regularität, dann sind wir gezwungen, die *Methode der Zonen* im Fall rein zeitabhängiger Koeffizienten zu strapazieren. Hängen die Koeffizienten auch von den Ortsvariablen ab, dann versagt die Methode der partiellen Fouriertransformation und man muß Elemente der *mikrolokalen Analysis* nutzen. Natürlich darf man den Zonengedanken nicht vergessen. Dieser spiegelt sich in der Festlegung *nicht standardmäßiger Symbolklassen* wieder.

Wir wollen den Symbolapparat anhand von strikt hyperbolischen Cauchy-Problemen mit Koeffizienten niederer Regularität erklären.

Im erweiterten Phasenraum $\{(t,x,\xi) \in [0,T]\times\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}\}$, man beachte, daß jetzt die Zeitvariable in den Phasenraum eingeschlossen wird, definieren wir die Funktion $t = t_\xi$ durch die Beziehung $t_\xi\langle\xi\rangle = N\log\langle\xi\rangle_e$ mit $\langle\xi\rangle_e = \sqrt{e+|\xi|^2}$. Die Konstante N wird im allgemeinen als große Konstante gewählt und tritt im Diagonalisierungsprozeß auf.

Definition 5. *Die pseudodifferentielle Zone $Z_{pd}(N)$ ist definiert durch*

$$Z_{pd}(N) := \{(t,x,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{2n}_{x,\xi} : t \leq t_\xi\}.$$

Die hyperbolische Zone $Z_{hyp}(N)$ ist definiert durch

$$Z_{hyp}(N) := \{(t,x,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{2n}_{x,\xi} : t \geq t_\xi\}.$$

In jeder Zone hat man jetzt unterschiedliche Symbolklassen zu wählen.

Definition 6. *Durch T_{2N} bezeichnen wir die Klasse aller Symbole $a = a(t,x,\xi) \in L^\infty((0,T), C^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}))$, die folgenden Bedingungen genügen:*

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(t,x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha}\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|} \text{ für alle } (t,x,\xi) \in Z_{pd}(N) \text{ und alle } \beta,\alpha.$$

Definition 7. *Durch $S_N\{m_1,m_2\}$ bezeichnen wir die Klasse aller Symbole $a = a(t,x,\xi) \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$, die folgenden Bedingungen genügen:*

$$|\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(t,x,\xi)| \leq C_{k,\beta,\alpha}\langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|}\Big(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\Big)^{m_2+k} \text{ für alle } (t,x,\xi) \in Z_{hyp}(N) \text{ und alle } k,\beta,\alpha.$$

Frage: Wodurch unterscheiden sich die beiden Symbolklassen?

Zu allen eingeführten Symbolklassen kann man Pseudodifferentialoperatoren mit genau diesen Symbolklassen definieren. Sehr hilfreich ist folgender Satz, der eine Beziehung zu parameterabhängigen Standard-Symbolen garantiert.

Satz 14. *Falls ein vorgelegtes Symbol $a \in T_{2N}$ außerhalb von $Z_{pd}(2N)$ verschwindet, dann gehört a zum Raum $L^\infty((0,T), S^1(\mathbb{R}^n))$.*
Falls ein vorgelegtes Symbol $a \in S_N\{m_1,m_2\}$ konstant in $Z_{pd}(N)$ ist, dann gehört a zum Raum $L^\infty((0,T), S^{\max\{0,m_1+m_2\}}(\mathbb{R}^n))$. Außerdem gilt $\partial_t^k a \in L^\infty((0,T), S^{m_1+m_2+k}(\mathbb{R}^n))$ für $k \geq 1$.

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich unmittelbar aus Definition 6. Zum Beweis der zweiten Aussage beachten wir

$$|a(t,x,\xi)| \leq C \text{ in } Z_{pd}(N) \text{ und } |a(t,x,\xi)| \leq C_{0,0,0}\langle\xi\rangle^{m_1}\Big(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\Big)^{m_2} \text{ in } Z_{hyp}(N).$$

Nutzen wir die Definition von $Z_{hyp}(N)$, dann schlußfolgern wir wegen $m_2 \geq 0$

$$\langle\xi\rangle^{m_1}\Big(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\Big)^{m_2} \leq \langle\xi\rangle^{m_1}\Big(\frac{1}{t_\xi}\log\frac{1}{t_\xi}\Big)^{m_2} \leq C\langle\xi\rangle^{m_1+m_2}.$$

Zusammenfassend haben wir $|a(t,x,\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{\max\{0,m_1+m_2\}}$. Jede Ableitung des Symbols verschwindet in $Z_{pd}(N)$, deshalb erhalten wir sofort $|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(t,x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha}\langle\xi\rangle^{m_1+m_2-|\alpha|}$. Somit haben wir die Behauptung $a \in L^\infty((0,T),S^{\max\{0,m_1+m_2\}}(\mathbb{R}^n))$ bewiesen. In gleicher Weise zeigt man die Aussage für $\partial_t^k a$. □

Was liefert uns die Aussage von Satz 14? Wir können die Komposition von Pseudodifferentialoperatoren mit nicht Standard Symbolen zurückführen auf die Komposition von parameterabhängigen Standard Symbolen. Für solche gelten selbstverständlich Aussagen vom Typ des Satzes 8. Wir wollen diese nur für global definierte Symbole formulieren.

Satz 15. *Es seien $A = A(t)$ und $B = B(t)$ parameterabhänige (hier ist die Zeit t der Parameter) Pseudodifferentialoperatoren mit den Symbolen $\sigma(A(t)) := a(t) \in L^\infty((0,T),S^m(\mathbb{R}^n))$ und $\sigma(B(t)) := b(t) \in L^\infty((0,T),S^k(\mathbb{R}^n))$. Dabei sind die Symbole und ihre Ableitungen gleichmäßig beschränkt bez. $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $C(t) = B(t)\circ A(t)$ ein parameterabhängiger Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $\sigma(C(t)) := c(t) \in L^\infty((0,T),S^{m+k}(\mathbb{R}^n))$. Außerdem gilt $c(t) - c_N(t) \in L^\infty((0,T),S^{m+k-N-1}(\mathbb{R}^n))$ für jedes N, wobei*

$$c_N(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq N}\frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha b(t,x,\xi)\partial_x^\alpha a(t,x,\xi)$$

gewählt wird.

Beweis: Der Beweis ist eine parameterabhängige Variante des Beweises zu Satz 8. □

Hat man dieses Resultat zur Hand, dann können wir die Komposition von Pseudodifferentialoperatoren mit nicht Standard Symbolen verstehen.

Satz 16. *Es seien A und B Pseudodifferentialoperatoren mit den Symbolen $\sigma(A) := a \in S_N\{m_1,m_2\}$ und $\sigma(B) := b \in S_N\{k_1,k_2\}$. Wir setzen weiterhin voraus, daß beide Symbole in $Z_{pd}(N)$ konstant sind und daß ein Symbol dort sogar verschwindet.*

Dann ist $C = B \circ A$ ein Pseudodifferentialoperator mit dem Symbol $\sigma(C) := c \in S_N\{m_1 + k_1, m_2 + k_2\}$. Außerdem gilt

$$c(t,x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(t,x,\xi) \partial_x^\alpha a(t,x,\xi) \ \textit{modulo} \ C^\infty([0,T], S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)),$$

d.h, $c - c_M \in S_N\{m_1 + k_1 - M - 1, m_2 + k_2\}$ für jedes $M \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Nach Satz 14 können wir die Komposition zurückführen auf die Komposition von parameterabhängigen Standard Symbolklassen. Deshalb können wir Satz 15 anwenden und erhalten sofort die folgenden Aussagen:

$$c - \sum_{|\alpha| \le N} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(t,x,\xi) \partial_x^\alpha a(t,x,\xi) \in L^\infty((0,T), S^{m_1+m_2+k_1+k_2-N-1}(\mathbb{R}^n)),$$
$$\partial_t^l \Big(c - \sum_{|\alpha| \le N} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(t,x,\xi) \partial_x^\alpha a(t,x,\xi) \Big) \in L^\infty((0,T), S^{m_1+m_2+k_1+k_2+l-N-1}(\mathbb{R}^n)), \ l \ge 1.$$

Falls wir die Behauptung $c(t,x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(t,x,\xi) \partial_x^\alpha a(t,x,\xi)$ zeigen können, dann gilt diese natürlich modulo $C^\infty([0,T], S^{-\infty}(\mathbb{R}^n))$. Um die Äquivalenz zeigen zu können, benötigen wir eine Aussage vom Typ des Satzes 13, aber jetzt in Hierarchien von nicht Standard Symbolklassen.

Satz 17. *Vorgelegt sei eine Folge von Symbolen $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_j \in S_N\{m_1 - j, m_2\}$. Alle Symbole verschwinden in der pseudodifferentiellen Zone $Z_{pd}(N)$. Dann existiert ein Symbol $a \in S_N\{m_1, m_2\}$ mit $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$.*

Beweis: Wie im Beweis zu Satz 13 definieren wir

$$a(t,x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) a_j(t,x,\xi).$$

Dann gelten für $j \ge 0$ in der hyperbolischen Zone $Z_{hyp}(N)$ die Beziehungen

$$|\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (\chi(\varepsilon_j \xi) a_j(t,x,\xi))| \le 2^{-j} \langle \xi \rangle^{m_1 - j - |\alpha| + 1} \left(\frac{1}{t} \log \frac{1}{t} \right)^{m_2 + k}$$

für $k + |\alpha + \beta| \le j$. Folglich gilt

$$a(t,x,\xi) - \sum_{j=0}^{M} a_j(t,x,\xi) = \sum_{j=0}^{M} (\chi(\varepsilon_j \xi) - 1) a_j(t,x,\xi) + \sum_{l=M+1}^{\infty} \chi(\varepsilon_l \xi) a_l(t,x,\xi).$$

Die endliche Summe hat einen kompakten Träger in ξ. Deshalb kann man schlußfolgern, daß die Summe in $C^\infty([0,T], S^{-\infty}(\mathbb{R}^n))$ liegt. Wenden wir uns der unendlichen Summe zu. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sum_{l=M+1}^{\infty} \chi(\varepsilon_l \xi) a_l(t,x,\xi))\right| &\le \sum_{l=k+|\alpha+\beta|}^{\infty} 2^{-l} \langle\xi\rangle^{m_1-l-|\alpha|+1} \left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)^{m_2+k} \\ &+ \sum_{l=M+1}^{k+|\alpha+\beta|} |\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha (\chi(\varepsilon_l\xi) a_l(t,x,\xi))|.\end{aligned}$$

Nach Anwendung der Leibniz-Regel auf die endliche Summe und der obigen Voraussetzung auf die Reihe erhalten wir

$$\left|\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sum_{l=M+1}^{\infty} \chi(\varepsilon_l \xi) a_l(t,x,\xi)\right| \le C_{k\beta\alpha} \langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|-M-1} \left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)^{m_2+k}.$$

Somit liegt $a - \sum\limits_{j=0}^{M} a_j$ in $S_N\{m_1-M-1, m_2\}$, d.h. $a \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$.
Das sollte bewiesen werden. □

Der Beweis von Satz 17 ist vollständig, falls $D_\xi^\alpha b \partial_x^\alpha a \in S_N\{m_1+k_1-|\alpha|, m_2+k_2\}$ gezeigt werden kann. Das folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen, $a = b \equiv 0$ in $Z_{\mathrm{pd}}(N)$ und der Ungleichung

$$|\partial_t^k \partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta D_\xi^\alpha b \partial_x^\alpha a| \le C_{k\gamma\delta\alpha} \langle\xi\rangle^{m_1+k_1-|\alpha|-|\delta|} \left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)^{m_2+k_2+k}.$$

Damit ist die Aussage von Satz 17 vollständig bewiesen. □

Die Aussagen von Satz 17 zusammen mit Satz 16 zeigen wie die Hierarchie der Symbolklassen $S_N\{m_1-j, m_2\}$, $j \ge 0$, zum Studium der Komposition von Pseudodifferentialoperatoren mit Symbolen in $S_N\{m_1, m_2\}$ verwendet wird. Es gibt jedoch auch andere Hierarchien, z.B. die Hierarchie $S_N\{m_1-j, m_2+j\}, j \ge 0$. Der folgende Satz enthält eine entsprechende Aussage zu Satz 17 bez. dieser Hierarchie.

Satz 18. *Vorgelegt sei eine Folge von Symbolen* $\{a_j\}_{j\in N_0}$ *mit* $a_j \in S_N\{m_1-j, m_2+j\}, j \ge 0$. *Alle Symbole verschwinden in der pseudodifferentiellen Zone* $Z_{pd}(N)$. *Dann existiert ein Symbol* $a \in S_N\{m_1, m_2\}$ *mit* $a \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$. *Letzteres bedeutet:*

$$a - \sum_{j=0}^{M} a_j \in S_N\{m_1-M-1, m_2+M+1\} \quad \textit{für alle } M.$$

Das Symbol $a \in S_N\{m_1, m_2\}$ *ist eindeutig bestimmt modulo* $\bigcap\limits_{l\ge 0} S_N\{m_1-l, m_2+l\}$.

Beweis: Wir können den Beweis zu Satz 17 formal übertragen. Dazu definieren wir

$$a(t,x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi\left(\varepsilon_j \, \frac{t\langle\xi\rangle}{N\log\langle\xi\rangle}\right) a_j(t,x,\xi)$$

und berücksichtigen die Beziehungen

$$\left|\partial_t^k \partial_\xi^\alpha \chi\left(\varepsilon_j \, \frac{t\langle\xi\rangle}{N\log\langle\xi\rangle}\right)\right| \leq C_{k\alpha}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} t^{-k}$$

für alle k und α.

Frage: Was bedeutet $\bigcap\limits_{l\geq 0} S_N\{m_1 - l, m_2 + l\}$?

Einige Rechenregeln für die Menge der Symbolklassen $S_N\{m_1, m_2\}$:

- $S_N\{m_1 - k, m_2 + k\} \subset S_N\{m_1, m_2\}$ für $k \geq 0$;
- $S_N\{m_1, m_2\} \cdot S_N\{k_1, k_2\} \subset S_N\{m_1 + k_1, m_2 + k_2\}$;
- $\partial_\xi^\alpha S_N\{m_1, m_2\} \subset S_N\{m_1 - |\alpha|, m_2\}$;
- $\partial_t^k S_N\{m_1, m_2\} \subset S_N\{m_1, m_2 + k\}$;
- $\partial_x^\beta S_N\{m_1, m_2\} \subset S_N\{m_1, m_2\}$.

Am Ende des Einführungsseminars in die Theorie von Pseudodifferentialoperatoren wollen wir uns der Existenz von Parametrizes zuwenden.

Satz 19. *Wir setzen voraus, daß das Symbol $a := \sigma(A)$ eines vorgelegten Pseudodifferentialoperators A zu $S_N\{0,0\}$ gehört und konstant in der pseudodifferentiellen Zone $Z_{pd}(N)$ ist. Weiterhin sei A elliptisch, d.h. $|a(t,x,\xi)| \geq C > 0$ für $(t,x,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}$. Dann existiert eine Parametrix B mit $\sigma(B) =: b \in S_N\{0,0\}$ und b ist konstant in $Z_{pd}(N)$.*

Beweis: Wir setzen $b_0(t,x,\xi) := a(t,x,\xi)^{-1}$. Nach Satz 14 können wir rekursiv die Symbole $b_\beta = b_\beta(t,x,\xi)$ definieren. Dazu setzen wir

$$\sum_{|\alpha|=1}^{|\beta|} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha a(t,x,\xi) \partial_x^\alpha b_{\beta-\alpha}(t,x,\xi) =: -a(t,x,\xi) b_\beta(t,x,\xi).$$

Für $|\beta| \geq 1$ verschwindet b_β in der pseudodifferentiellen Zone $Z_{pd}(N)$. Weiterhin liegt b_β in $S_N\{-|\beta|, 0\}$. Nach Satz 17 existiert ein Symbol $b_R \in S_N\{0,0\}$ mit

$$b_R - \sum_{|\beta|\leq k-1} b_\beta \in S_N\{-k, 0\}, \; b_R = b_0 \text{ in } Z_{pd}(N).$$

Verwenden wir die Konstruktionsvorschrift der b_β und die Aussage von Satz 15, dann ergibt sich $AB_R \sim I$ modulo $C^\infty([0,T], S^{-\infty})$ für $\sigma(AB_R)$. In gleicher Weise konstruieren wir eine linke Parametrix B_L. Es gilt wieder $b_R = b_L$ modulo $C^\infty([0,T], S^{-\infty})$.
$\square$