

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Wintersemester 2018/2019

Vorlesender: Prof. Michael Reissig (Institut für Angewandte Analysis)

Vorlesungstermine: Donnerstags: 14.00-15.30 im Raum WIN-1005

Übungsleiter: Dr. Conrad Mädler (Institut für Angewandte Analysis)

Übungstermine: Freitags in ungeraden Wochen: 07.30-09.00 im Raum WIN-2258

Klausur: 20.03.2019, 09.00-11.00 in der Alten Mensa

Viele Prozesse der Natur und Technik werden durch Bilanzgleichungen oder Erhaltungssätze beschrieben. Damit kommt man zu Modellen, die mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich i.allg. partielle Differentialgleichungen noch schwerer exakt lösen. Wie geht der Techniker bei der Behandlung von Modellen aus Natur und Technik vor?

- Modell aufstellen, Nebenbedingungen für Prozeßgrößen vorgeben,
- analytische Untersuchungen durchführen, d.h. zu entscheiden, ob das aufgestellte Modell vernünftig ist, hat das Modell überhaupt eine Lösung, welche Eigenschaften haben die Lösungen, d.h. man ist an der Gesamtheit aller Lösungen interessiert, ← solche Fragen diskutieren wir in dieser Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure und Naturwissenschaftler",
- numerische Simulation durchführen, näherungsweise Berechnung der zu bestimmenden Prozeßgrößen ← Hilfsmittel erhält man in der Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen",
- schließlich muß abgeklärt werden, ob die erhaltenen Resultate mit den praktischen Erwartungen übereinstimmen.

1 Grundbegriffe der Theorie partieller Differentialgleichungen

Wir beschäftigen uns nur mit partiellen Differentialgleichungen in den Anschauungsräumen $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

1.1 Stationäre Prozesse

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form

$$\mathbb{R}^2 : F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0,$$

$$\mathbb{R}^3 : F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, u_{yy}, u_{zz}, \dots) = 0.$$

Merke:

- Die Lösung $u = u(x, y)$ im \mathbb{R}^2 bzw. $u = u(x, y, z)$ im \mathbb{R}^3 hängt von den Ortsvariablen x, y bzw. x, y, z ab. Die Lösung ist aber unabhängig von der Zeitvariablen t . Deshalb werden durch obige partielle Differentialgleichungen *stationäre Prozesse* beschrieben.
- Hängt die Lösung $u = u(x)$ nur von einer Raumvariablen x ab und nicht von der Zeitvariablen t , dann erhält man die Beziehung

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots\right) = 0.$$

Das ist keine partielle Differentialgleichung, sondern eine gewöhnliche Differentialgleichung (vgl. Vorlesung Höhere Mathematik II). Man unterscheidet streng zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

1.2 Instationäre Prozesse

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form

$$\mathbb{R}^1 : F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0,$$

$$\mathbb{R}^2 : F(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xt}, u_{yt}, u_{tt}, \dots) = 0,$$

$$\mathbb{R}^3 : F(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, \dots) = 0.$$

Merke:

- Die Lösung hängt jetzt von der Zeitvariablen t und von Ortsvariablen ab. Deshalb werden durch obige partielle Differentialgleichungen *instationäre Prozesse* beschrieben.

Die vorkommende partielle Ableitung mit der höchsten Ableitungsordnung bestimmt die *Ordnung der partiellen Differentialgleichung*. Eine *partielle Differentialgleichung heißt linear*, falls die gesuchte Lösung u , als auch alle vorkommenden partiellen Ableitungen von u linear auftreten, d.h. F hängt von u und allen auftretenden Ableitungen von u linear ab. Die Abhängigkeit von F bez. der Zeitvariablen t und bez. der Ortsvariablen braucht dagegen nicht notwendig linear zu sein.

Ziel: Gesucht sind alle Funktionen u , die eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erfüllen.

Machen wir uns die neuen Begriffe an folgenden Beispielen klar:

1. $u_t + u u_{xx} = 0$,
2. $u_{tt} - u_x + \sin u = 0$,
3. $u_t - \sin(x^2 t) u_{xx} = 0$,
4. $u_t + 3x u_x - tx^2 = 0$.

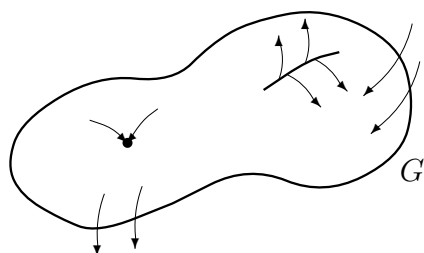
2 Modelle in Natur und Technik

2.1 Erhaltungssätze

Ein Erhaltungssatz ist eine mathematische Formulierung folgender Beobachtung, die in Natur und Technik immer auftritt:

Vorgelegt sei ein beliebiges Gebiet G und eine Quantität u in G . Dann ist die Rate der zeitlichen Änderung $\frac{\partial u}{\partial t}$ der Quantität u gleich der Rate des Flusses ϕ der Quantität u durch den Rand ∂G des Gebietes

G und der Rate f des Entstehens oder Versiegens der Quantität u im Gebiet selbst.



Die Quantität sei $u = u(t, x)$, oder $u = u(t, x, y)$, oder $u = u(t, x, y, z)$. Wendet man den Gaußschen Integralsatz an, dann ergibt sich aus obiger Beschreibung die folgende (lineare oder auch nichtlineare) partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Gebiet G :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^1 : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = f(t, x), \\ \mathbb{R}^2 : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \phi = f(t, x, y), \\ \mathbb{R}^3 : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \phi = f(t, x, y, z). \end{aligned}$$

Die *Divergenz* von ϕ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^1 : \quad & \operatorname{div} \phi = \operatorname{div} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \mathbb{R}^2 : \quad & \operatorname{div} \phi = \operatorname{div} (\phi_1, \phi_2) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \\ \mathbb{R}^3 : \quad & \operatorname{div} \phi = \operatorname{div} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z}. \end{aligned}$$

Mit ϕ bezeichnen wir den Fluß der Quantität durch den Rand des Gebietes. Mit $f = f(t, \dots)$ bezeichnen wir die *Quellen oder Senken*, die zum Entstehen oder Versiegen der Größe u führen.

Transport oder Konvektion

Lineare Konvektion:

Der Zusammenhang zwischen Fluß ϕ und Quantität u wird in homogenen Medien beschrieben durch $\phi = \vec{c}u$, das heißt, jede Komponente ϕ_k des Flusses ist proportional zu u , \vec{c} ist ein konstanter Vektor. Man erhält dann die *Transport- oder Konvektionsgleichung*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^1 : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \quad \phi = cu, \\ \mathbb{R}^2 : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(t, x, y), \quad \phi_1 = c_1 u, \quad \phi_2 = c_2 u, \\ \mathbb{R}^3 : \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_3 \frac{\partial u}{\partial z} = f(t, x, y, z), \quad \phi_1 = c_1 u, \quad \phi_2 = c_2 u, \quad \phi_3 = c_3 u.\end{aligned}$$

Nichtlineare Konvektion:

Der Zusammenhang zwischen Fluß ϕ und Quantität u wird beschrieben durch $\phi = \phi(u) = (\phi_1(u), \phi_2(u), \phi_3(u))$, das heißt, jede Komponente des Flusses hängt nichtlinear von u ab. Dann ergibt sich im \mathbb{R}^3 die *nichtlineare Konvektionsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \phi(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1(u) + \frac{\partial}{\partial y} \phi_2(u) + \frac{\partial}{\partial z} \phi_3(u) = 0,$$

falls keine Quellen oder Senken im Gebiet G vorliegen.

Beachte: Die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \phi(u) = 0$ ist schon sehr kompliziert. In der Literatur kann man unter *Burgers-Gleichung* Informationen zu dieser partiellen Differentialgleichung erhalten.

Lineare Konvektion in heterogenen Materialien:

In heterogenen Materialien gilt $\phi = \vec{c}(x, y, z)u$, wobei jetzt der Vektor \vec{c} nicht mehr als konstant vorausgesetzt wird, sondern von den Punkten (x, y, z) des Gebietes G abhängen darf. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + c_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + c_2(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + c_3(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \left(\frac{\partial c_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial c_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial c_3(x, y, z)}{\partial z} \right) u = 0,\end{aligned}$$

wenn wir auch jetzt auf Quellen oder Senken verzichten.

Versuchen wir im \mathbb{R}^3 die spezielle Konvektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

zu lösen. Diese können wir auch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{c} \cdot \text{grad } u = 0, \quad \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

schreiben.

Wir wählen den Lösungsansatz: $u(t, x, y, z) = F(\vec{k} \cdot (x, y, z) - t) = F(k_1x + k_2y + k_3z - t)$, wobei F eine auf dem \mathbb{R}^1 definierte, differenzierbare Funktion ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{dF}{d\tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = k_1 \frac{dF}{d\tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = k_2 \frac{dF}{d\tau}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= k_3 \frac{dF}{d\tau} \quad \text{mit } \tau = k_1x + k_2y + k_3z - t. \end{aligned}$$

Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{c} \cdot \text{grad } u &= -\frac{dF}{d\tau} + c_1k_1 \frac{dF}{d\tau} + c_2k_2 \frac{dF}{d\tau} + c_3k_3 \frac{dF}{d\tau} \\ &= \frac{dF}{d\tau} (c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 - 1) = \frac{dF}{d\tau} (\vec{c} \cdot \vec{k} - 1). \end{aligned}$$

Fazit: Falls $\vec{c} \cdot \vec{k} = 1$, dann ist $u(t, x, y, z) = F(\vec{k} \cdot (x, y, z) - t)$ eine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{c} \cdot \text{grad } u = 0$ für jede differenzierbare Funktion F . Man nennt diese Lösungen *ebene Wellen* oder *sich fortpflanzende Wellen* (*travelling waves*).

2.2 Diffusion

Wir wenden uns wieder im \mathbb{R}^3 unserem Erhaltungssatz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \phi = f(t, x, y, z)$$

zu. Jetzt ist ϕ nicht proportional zu u , sondern $\phi = -D \operatorname{grad} u$, wobei D die *Diffusionskonstante* ist. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(-D \operatorname{grad} u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(t, x, y, z).$$

Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(t, x, y, z)$$

heißt *Diffusionsgleichung* und beschreibt Diffusionsvorgänge. Die allgemeine Differentialgleichung zur Beschreibung der Teilchendiffusion in einem Stoff ist aber

$$\rho(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left(D(x, y, z) \operatorname{grad} u \right) + q(x, y, z)u = f(t, x, y, z),$$

wobei

- $\rho = \rho(x, y, z)$ die Porosität, $D = D(x, y, z)$ den Diffusionskoeffizienten und $q = q(x, y, z)$ die Absorption durch den Stoff bezeichnen,
- $u = u(t, x, y, z)$ die Teilchendichte im Punkt (x, y, z) zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Mit Hilfe der Diffusionsgleichung werden aber auch Wärmeleitprozesse beschrieben. Deshalb heißt diese Gleichung auch *Wärmeleitungsgleichung*. Nach dem Fourierschen Gesetz ist der Wärmefluß

$$\phi = -K \operatorname{grad} T,$$

wobei $T = T(t, x, y, z)$ die Temperatur zum Zeitpunkt t im Ortspunkt (x, y, z) bezeichnet. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \phi = \frac{\partial T}{\partial t} - K \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial t} - K\Delta T = f(t, x, y, z).$$

Die *Wärmeleitfähigkeit* K kann in heterogenen Medien vom Ortspunkt (x, y, z) oder bei vorhandenen großen Temperaturunterschieden auch

von der Temperatur T abhängen. Dann gilt nach dem Fourierschen Gesetz

$$\phi = -K(x, y, z, T) \operatorname{grad} T.$$

Man erhält die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} \left(K(x, y, z, T) \operatorname{grad} T \right) = f(t, x, y, z).$$

2.3 Stationäre Modelle

Mitunter sind Techniker an stationären (zeitunabhängigen) Zuständen (Lösungen) interessiert. Läuft ein Prozeß sehr lang in der Zeit, dann sollte sich ein *von der Zeit unabhängiger stationärer Zustand* einstellen. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Quellen oder Senken nicht von der Zeit abhängen. Andernfalls ist nicht an Stationarität zu denken. Als stationärer Grenzfall der Modelle aus Abschnitt 2.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} -D\Delta u &= f(x, y, z), & -K\Delta T &= f(x, y, z), \\ -\operatorname{div} \left(D(x, y, z) \operatorname{grad} u \right) + q(x, y, z)u &= f(x, y, z), \\ -\operatorname{div} \left(K(x, y, z, T) \operatorname{grad} T \right) &= f(x, y, z). \end{aligned}$$

Die partielle Differentialgleichung $\Delta u = f(x, y, z)$ heißt *Poisson-Gleichung*. Falls keine Quellen oder Senken vorliegen ergibt sich daraus die *Laplace-Gleichung* $\Delta u = 0$. Diese ist die grundlegende Differentialgleichung der *Potentialtheorie* und beschreibt Potentiale (Gravitationspotentiale, Einfachschicht-, Doppelschichtpotentiale) außerhalb von Quellen oder Senken.

2.4 Schwingungen und Akustik

Akustik ist die Wissenschaft des Schalls und erklärt wie sich Signale in einem Medium ausbreiten.

Wir sind interessiert an Schallwellen in einer Röhre mit kreisförmigen Querschnitt, die mit Gas gefüllt ist. In einem festen Querschnitt sollen die Zustandsgrößen konstant sein, damit hängen diese nur von der Variablen x (Längenparameter in der Röhre) und der Zeitvariablen t ab. Somit gelangen wir zu eindimensionalen (1-d) Modellen. Die Zustandsvariablen sind die Massendichte $\rho = \rho(x, t)$, die Geschwindigkeit $v = v(x, t)$ und der Druck $p = p(x, t)$. Um die Gleichungen der Akustik herleiten zu können, starten wir mit der schon bekannten *Bilanzgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = f.$$

Zuerst muß die *Massebilanz* gesichert sein. Dazu wählen wir $u = \rho$ und $\phi = \rho v$, das ist der sogenannte *Massefluß*. Es sollen keine Quellen oder Senken für die Masse vorhanden sein, damit ist $f = 0$. Somit erhalten wir die *Massebilanz*

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.$$

Merke: Man nennt diese partielle Differentialgleichung *Kontinuitätsgleichung*. Im 2-d oder im 3-d Fall nimmt sie die Form

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

an. Für *inkompressible Fluide* gilt $\rho = \text{const.}$, und somit nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ an.

Nun müssen wir uns der *Impulsbilanz* zuwenden. Es sind $u = \rho v$ die *Impulsdichte* und $\phi = (\rho v)v$ der *Impulsstrom*. Jetzt tritt eine Quelle f auf, die durch den Druckgradienten entlang der Röhre hervorgerufen wird, $f = -\frac{\partial p}{\partial x}$. Damit erhalten wir die *Impulsbilanz*

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2) = -\partial_x p.$$

Neben diesen beiden Bilanzen muß noch eine *Zustandsgleichung* der Form $p = F(\rho)$ vorgeschrieben werden. Wir setzen voraus $F'(\rho) > 0$,

der Druck wächst damit mit wachsender Dichte. Ein typisches Beispiel einer solchen Zustandsgleichung ist $p = k\rho^\gamma$ mit $k > 0$ und $\gamma > 1$.

Wir setzen konstante Temperatur während des Prozesses voraus, andernfalls muß noch eine *Energiebilanz* aufgestellt werden.

Die Theorie des Schalls beschäftigt sich mit kleinen Störungen eines homogenen Gases. Wir setzen voraus, daß das Gas in Ruhe ist, $\rho = \rho_0$, $v = 0$, $p_0 = F(\rho_0)$. An einem Ende der Röhre soll eine kleine Störung auftreten, $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t)$, $v = \tilde{v}(x, t)$, $\tilde{\rho}$ und \tilde{v} beschreiben kleine Störungen. Dann gilt nach der Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} p &= F(\rho) = F(\rho_0 + \tilde{\rho}) = F(\rho_0) + F'(\rho_0)\tilde{\rho} + \frac{F''(\rho_0)}{2!}\tilde{\rho}^2 + \dots \\ &= p_0 + c^2\tilde{\rho} + \dots, \end{aligned}$$

wobei $c = \sqrt{F'(\rho_0)}$ die *Schallgeschwindigkeit* ist. Die Terme mit $\tilde{\rho}^2$ sind sehr klein und vernachlässigbar im Vergleich zu Termen, die von der Größenordnung $\tilde{\rho}$ sind. Setzen wir diese Ausdrücke in die Massebilanz ein, dann erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{v}) = 0.$$

Setzen wir die Kontinuitätsgleichung in die allgemeine Impulsbilanz ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} (\rho v)_t + (\rho v^2)_x &= \rho_t v + \rho v_t + \rho_x v^2 + \rho 2vv_x \\ &= -\rho_x v^2 - \rho vv_x + \rho v_t + \rho_x v^2 + 2\rho vv_x \\ &= \rho v_t + \rho vv_x = -p_x. \end{aligned}$$

Zusammenfassend schlußfolgern wir aus der Impuls- und Massebilanz die Beziehung

$$\rho v_t + \rho vv_x + p_x = 0.$$

Setzen wir nun die obigen Ausdrücke für ρ , v und p in diese Beziehung ein, dann erhalten wir

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + (\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(p_0 + c^2\tilde{\rho} + \dots) = 0. \quad (*)$$

Aus der Massebilanz erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\rho} \tilde{v}) = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \underbrace{\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}} = 0.$$

dieser Term wird als klein angesehen,
da $\tilde{\rho}$ und \tilde{v} klein sind.

Aus der Folgerung aus Masse- und Impulsbilanz (*) erhalten wir

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \begin{array}{l} \text{kleine und damit} \\ \text{vernachlässigbare Terme} \end{array} = 0,$$

da in den kleinen vernachlässigbaren Termen immer mindestens eine Potenz von den kleinen Größen \tilde{v} oder $\tilde{\rho}$ auftritt. Damit erhalten wir die lineare Approximation

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0.$$

↓

Differentiation nach t

↓

Differentiation nach x

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t \partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} = 0.$$

Setzen voraus, daß $\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t}$ gilt, dann ergibt

sich

↓

↓

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} = 0$$

erhält man auf entsprechende Weise.

Man nennt allgemein $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ *Wellengleichung*. Im $2-d$ oder $3-d$ Fall nimmt die Wellengleichung die Gestalt

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} \quad (2-d),$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad (3-d)$$

an.

Merke: Durch die Wellengleichung werden auch *transversale Schwingungen einer elastischen Saite oder einer Membran* beschrieben. Beobachtet man die Schwingungen einer elastischen Saite in einem schweren Öl, dann tritt eine zusätzliche *Dämpfung* auf. Man beschreibt diesen Vorgang durch die *gedämpfte Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k u_t = 0$$

↑

dieser Term beschreibt die Dämpfung.

In $(2-d)$ oder $(3-d)$ nimmt die gedämpfte Wellengleichung die Gestalt

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + k u_t = 0$$

an.

Versuchen wir wieder Lösungen von $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ in Form von *ebenen Wellen oder sich fortpflanzenden Wellen (travelling waves)* zu erhalten.

Dazu wählen wir den Lösungsansatz

$$u(t, x, y, z) = F(k_1 x + k_2 y + k_3 z - t), \quad u_{tt} = F''(\tau), \quad c^2 u_{xx} = c^2 k_1^2 F''(\tau),$$

$$c^2 u_{yy} = c^2 k_2^2 F''(\tau), \quad c^2 u_{zz} = c^2 k_3^2 F''(\tau) \quad \text{mit } \tau = k_1 x + k_2 y + k_3 z - t.$$

Falls also $c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 1$ erfüllt ist, dann ist u eine Lösung von $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ für jede zweimal differenzierbare Funktion F . Für die gedämpfte Wellengleichung ist der Lösungsansatz nicht geeignet. Warum?

Die Wellengleichung kommt auch in anderen Modellierungsebenen zur Anwendung. So werden kleine Verschiebungen eines elastischen Stabes beschrieben durch

$$\rho(x)S(x)\partial_t^2 u - \partial_x \left(E(x)S(x)\partial_x u \right) = F(x, t),$$

wobei $S(x)$ den Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes und $E(x)$ den Youngsche Modul bezeichnen.

2.5 Quantenmechanik

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m , das sich auf der x -Achse unter Einwirkung einer Kraft $F = F(x)$ bewegt. Uns interessiert die Position $x = x(t)$, die sich nach dem zweiten Newtonschen Grundgesetz aus der Beziehung $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$ ergibt.

In der atomaren Skale gilt wegen der Heisenbergschen Unschärfebeziehung diese deterministische Gleichung nicht mehr. Der Zustand eines Teilchens wird durch die sogenannte *Wellenfunktion* $\psi = \psi(t, x)$ beschrieben (eine 1 - d Betrachtungsweise wird hierbei vorausgesetzt). Die Funktion $|\psi(t, x)|^2$ ist die *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Die Wellenfunktion $\psi = \psi(t, x)$ ist komplexwertig, damit ist $|\psi(t, x)|^2 = \psi(t, x)\overline{\psi(t, x)}$, durch $\int_a^b |\psi(t, x)|^2 dx$ wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, mit welcher sich ein Teilchen zum Zeitpunkt t im Intervall $[a, b]$ befindet. Die Wellenfunktion ψ ergibt sich als Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$i \tilde{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\tilde{\hbar}^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei $V = V(x)$ die *potentielle Energie*, m die *Masse* und $\tilde{h} = h/(2\pi)$ das *Plancksche Wirkungsquantum* beschreiben. Als freie Schrödinger-Gleichung bezeichnet man

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Im $2 - d$ oder $3 - d$ Fall nimmt diese die Gestalt

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi$$

an.

Merke: Die freie Schrödinger-Gleichung $\frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi$ und die Diffusionsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ unterscheiden sich nur durch den Koeffizienten $\frac{1}{i}$. Trotzdem haben die Lösungen ganz unterschiedliche Eigenschaften.

2.6 Die Gleichungen der Gas- und Hydrodynamik

Wir sind interessiert an der Beschreibung der Bewegung einer idealen Flüssigkeit (eines idealen Gases) mit *vernachlässigbarer Zähflüssigkeit oder Viskosität*.

Im Anschauungsraum \mathbb{R}^3 seien $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)(t, x, y, z)$ der Geschwindigkeitsvektor, $\rho = \rho(t, x, y, z)$ die Dichte, $p = p(t, x, y, z)$ der Druck, $f = f(t, x, y, z)$ die Intensität der Quelle und $\vec{G}(t, x, y, z) = (G_1(t, x, y, z), G_2(t, x, y, z), G_3(t, x, y, z))$ die Gewichtskräfte.

Dann ergeben sich die *Grundgleichungen der Hydro- bzw. Gasdynamik* zu

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = f \quad (\text{Massebilanz}),$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \vec{G} \quad (\text{Impulsbilanz}),$$

dazu gibt man sich noch eine Zustandsgleichung der Form $\Phi(p, \rho) = 0$ vor (vgl. mit der Modellierung aus Abschnitt 2.4).

Frage: Wie ist der Term $(\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v}$ zu verstehen?

$$\text{Antwort:} \quad (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v} = \left((v_1, v_2, v_3) \cdot (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \right) (v_1, v_2, v_3)$$

$$= (v_1 \partial_x v_1 + v_2 \partial_y v_1 + v_3 \partial_z v_1, v_1 \partial_x v_2 + v_2 \partial_y v_2 + v_3 \partial_z v_2, v_1 \partial_x v_3 + v_2 \partial_y v_3 + v_3 \partial_z v_3).$$

2.7 Die Navier-Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen stellen die Bewegungsgleichungen für ein Newtonsches Fluid dar. Falls die Dichte als konstant gesetzt wird, d.h. falls das Fluid inkompressibel ist, ergeben sich diese zu

$$\rho \partial_t \vec{v} + \rho(\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} - \mu \Delta_x \vec{v} + \text{grad } p = G, \quad \text{div } \vec{v} = 0.$$

Mit μ bezeichnen wir die *Zähflüssigkeit oder Viskosität*, die als konstant vorausgesetzt wird. Die erste Gleichung ergibt sich aus der Impulsbilanz, die zweite aus der Massebilanz. Falls die Strömung sehr langsam ist ($|\vec{v}|$ ist klein) oder der Geschwindigkeitsgradient sehr klein ist ($(|\partial_x \vec{v}|, |\partial_y \vec{v}|, |\partial_z \vec{v}|)$ klein, im laminaren Bereich (keine Turbulenzen)), dann kann man $\rho(\vec{v}, \text{grad}) \vec{v}$ vernachlässigen, und wir erhalten die *Stokesschen Gleichungen*

$$\rho \partial_t \vec{v} - \mu \Delta_x \vec{v} + \nabla p = G, \quad \text{div } \vec{v} = 0.$$

Bei nichtnewtonschen Fluiden ist die Zähflüssigkeit nicht konstant (Schlacken, flüssiger Estrich). Für *nichtnewtonsche Fluide ohne elastischem Verhalten* gilt

$$\rho \partial_t \vec{v} + \rho(\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} - \text{div} \left(2\mu(\sqrt{2 \text{tr } D^2}) D \right) + \text{grad } p = G, \quad \text{div } \vec{v} = 0,$$

wobei jetzt die Zähflüssigkeit $\mu = \mu(\sqrt{2 \text{tr } D^2})$ von $\sqrt{2 \text{tr } D^2}$ abhängt.

Wir bezeichnen mit $D = \frac{1}{2}(L + L^T)$ den symmetrischen Anteil des *Geschwindigkeitsgradiententensors* L mit

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad L^T \text{ ist die transponierte Matrix zu } L,$$

$\text{tr } D^2 = \text{spur } D^2 =$ ist die Summe der Elemente der Hauptdiagonale von D^2 .

Hat das nichtnewtonsche Fluid noch ein *elastisches Verhalten*, das heißt, das Fluid hat ein *Gedächtnis für seine früheren Deformationszustände*, dann kann im Fall von rheologisch einfachen Stoffen (Rheologie: Wissenschaft, die sich mit dem Verformungs- und Fließverhalten von Materie beschäftigt) die Beschreibung

$$\rho \partial_t \vec{v} + \rho(\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} - \text{div} \left(2 \int_{-\infty}^t G(t-t') D(t', x, y, z) dt' \right) + \text{grad } p = G,$$

$$\text{div } \vec{v} = 0,$$

gewählt werden mit der sogenannten *Relaxationsfunktion* $G = G(t)$ für *isotrope Fluide*.

Zusammenfassung von Kapitel 2:

In diesem Kapitel haben wir verschiedene Situationen aus Natur und Technik vorgestellt, in welchen bei Modellierungen auf ganz natürliche Weise partielle Differentialgleichungen bzw. Systeme partieller Differentialgleichungen ins Spiel kommen.

3 Kenngrößen für ein Differentialgleichungsmodell

In diesem Kapitel werden wir lernen, welche zusätzlichen Informationen man vor dem Beginn der Lösung partieller Differentialgleichungen benötigt oder auf welche Informationen man achten sollte.

3.1 Geometrie des Gebietes

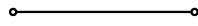
Es gibt verschiedene Geometrien für Gebiete, in welchen ein Prozeß berechnet werden soll.

a) *Beschränkte Gebiete oder Innengebiete*

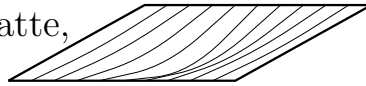
Der Prozeß läuft in einem Gebiet (2-d, 3-d) ab, wobei das Gebiet in eine hinreichend große Kugel passt. Im 1-d Fall läuft der Prozeß in einem beschränkten Intervall ab.

Beispiele:

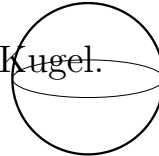
1-d: Transversalschwingungen einer fest eingespannten Saite,



2-d: Durchbiegung einer Platte,



3-d: Erwärmung oder Abkühlung einer Kugel.



b) *Außengebiete*

Im 2-d oder 3-d Fall spricht man von einem Außengebiet, wenn das Komplementgebiet bez. dem gesamten Raum \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 ein beschränktes Gebiet ist.

Beispiel:

2-d: Umströmen eines Zylinders kann als 2-d Problem aufgefaßt werden, falls die Strömung eine verschwindende Komponente in Richtung der Zylinderachse besitzt.

c) *Der gesamte Raum*

Es gibt Prozesse, die auf der gesamten reellen Achse (1-d) oder im gesamten Raum (2-d, 3-d) verstanden werden müssen.

Beispiel:

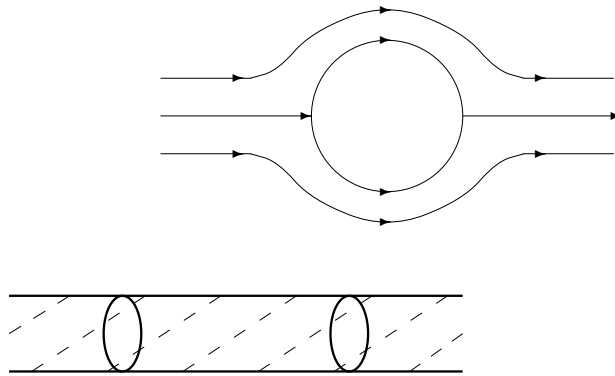
3-d: Gravitationspotential eines Massepunktes oder einer mit Masse belegten Schicht,

Ausbreitung von Schallwellen.

d) *Streifengebiete* (wave guides)

Beispiel:

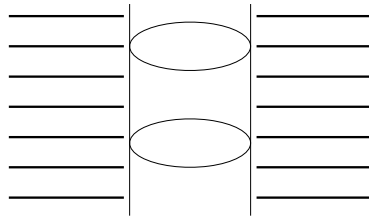
Schallausbreitung in einer unendlichen Röhre.



e) "Außengebiete zu Streifengebieten"

Beispiel:

3-d: Beugung elektromagnetischer Wellen am unendlichen Zylinder.

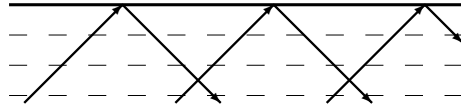


f) *Halbraum*

Mitunter laufen Prozesse in halbunendlichen Intervallen oder im Halbraum ab.

Beispiele:

1-d: Schwingungen der halbunendlichen Saite, 3-d: Wellenausbreitung mit Hindernis.



3.2 Instationäre Prozesse

Im vorigen Abschnitt haben wir Geometrien G beschrieben, in denen ein stationärer Prozeß abläuft. Falls der *Prozeß instationär* ist, dann kommt noch die Zeitvariable t hinzu.

Ist man an der Beschreibung des Prozesses in einem Zeitintervall $[0, T]$ interessiert, dann läuft der Prozeß in einem *Zylinder* $G \times [0, T]$ ab.

Ist man an der Modellierung über einen langen Zeitraum interessiert, dann beobachtet man den Prozeß in einem unendlichen Zylinder $G \times [0, \infty)$, wobei auch jetzt $t = 0$ als der Zeitpunkt gewählt wird, zu welchem man beginnt, den Prozeß zu beobachten. Läuft ein Prozeß ab und man beginnt während des Laufens diesen zu beobachten, dann ist man auch an der Vorgeschichte der Prozeßbeobachtung interessiert. In diesem Fall läuft der Prozeß in einem Zylinder $G \times [-T_1, T_2]$ oder $G \times (-\infty, T]$ oder $G \times [-T, +\infty)$ oder $G \times (-\infty, +\infty)$ ab. Das Zeitintervall $(-\infty, +\infty)$ bedeutet, daß man an einer langen Vorgeschichte und an einer langen Prozeßbeobachtung interessiert ist.

3.3 Anfangsbedingungen und Randbedingungen

Neben partiellen Differentialgleichungen treten in Modellen auch Anfangsbedingungen oder Randbedingungen an die gesuchten Lösungen auf.

Stationäre Prozesse:

Bei *stationären Prozessen treten nur Randbedingungen* auf. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. *Randbedingung 1.Art oder vom Dirichlet-Typ*, dabei wird die gesuchte Lösung u auf dem Rand ∂G der Geometrie G vorgegeben, $u|_{\partial G} = g(x)$ ← gegebene Funktion auf dem Rand ∂G .
2. *Randbedingung 2.Art oder vom Neumann-Typ*, dabei wird die Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ der gesuchten Lösung u auf dem Rand

∂G der Geometrie G vorgegeben,

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = g(x) \quad \leftarrow$ gegebene Funktion auf dem Rand ∂G .

3. *Randbedingung 3. Art oder vom Robin-Typ*, das ist eine Art Linearkombination aus Randbedingungen 1. und 2. Art,

$$(h_1(x)u + h_2(x) \frac{\partial u}{\partial n})|_{\partial G} = g(x),$$

dabei sind g , h_1 und h_2 auf dem Rand ∂G der Geometrie G vorgegebene Funktionen.

a) **Innengebiete**

- $\Delta u = 0$: es darf genau eine Randbedingung 1. Art oder 2. Art oder 3. Art auf ∂G vorgeschrieben werden.
- Plattengleichung $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$: setzen wir $\Delta u = w$, dann läßt sich $\Delta^2 u = 0$ in der Form $\Delta w = 0, \quad \Delta u = w$ schreiben. Wir dürfen genau zwei Randbedingungen vorgeben. Ein typisches Beispiel ist

$$\begin{aligned} u|_{\partial G} &= g_1(x, y, z), \quad w|_{\partial G} = g_2(x, y, z), \quad \text{das heißt,} \\ u|_{\partial G} &= g_1(x, y, z), \quad (\Delta u)|_{\partial G} = g_2(x, y, z). \end{aligned}$$

Praktische Relevanz haben aber auch die Randbedingungen

$$u|_{\partial G} = g_1(x, y, z), \quad \partial_n u|_{\partial G} = g_2(x, y, z).$$

b) **Außengebiete**

- $\Delta u = 0$: es darf genau eine Randbedingung 1. Art oder 2. Art oder 3. Art auf ∂G vorgeschrieben werden. Das reicht aber i.allg. noch nicht aus, die technisch relevante Lösung eindeutig zu identifizieren. Dazu muß man noch *Abklingbedingungen* an die Lösung für $|x| \rightarrow \infty$ vorschreiben. Im \mathbb{R}^3 lautet diese Abklingbedingung $|u(x, y, z)| = O(\frac{1}{r})$ für $r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dabei bezeichnet $O(\frac{1}{r})$ das Landau-Symbol. Es bedeutet $|u(x, y, z)| \leq \frac{C}{r}$ mit einer geeigneten Konstanten C .

Beispiel:

- Massenpunkt, das Gravitationspotential verhält sich wie $\frac{1}{r}$.

Im \mathbb{R}^2 verwendet man anstelle der Abklingbedingung die Bedingung $|u(x, y)| = O(\ln \frac{1}{r})$ für $r \rightarrow \infty$.

Beachte: Mitunter reichen Randbedingungen und Abklingbedingungen noch nicht aus, Lösungen eindeutig zu charakterisieren.

Beispiel: Helmholtz-Gleichung aus der Streutheorie: $\Delta u + k^2 u = 0$, $k^2 > 0$ ist eine Konstante. Wir können genau eine Randbedingung auf ∂G , die Abklingbedingung für $r \rightarrow \infty$ und die sogenannte *Sommerfeldsche Strahlungsbedingung aus der Streutheorie vorschreiben*.

Betrachten wir mit $k = 2\pi$, $x \in \mathbb{R}^3$ und $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$, die Familie von Funktionen $u(x) = -C \sin(k|x|)/(4\pi|x|)$ mit einer beliebigen reellen Konstanten C . Wir sehen sofort, daß $u(x) = 0$ auf $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ und die Abklingbedingung $|u(x)| = O(\frac{1}{r}) = O(\frac{1}{|x|})$ erfüllt sind. Außerdem stellt $u = u(x)$ eine radialsymmetrische Lösung der Helmholtz-Gleichung dar. Das ergibt sich nach *Umrechnung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten*,

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta u) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 u.$$

Die radialsymmetrische Abhängigkeit von $u = u(x)$ impliziert das Prüfen der gewöhnlichen Differentialgleichung 2.Ordnung

$$d_r^2 u + \frac{2}{r} d_r u + k^2 u = 0.$$

Es ist leicht zu prüfen, daß obige Familie von Funktionen dieser Differentialgleichung genügt. Somit haben wir eine Familie von $u \equiv 0$ verschiedener Lösungen der Helmholtz-Gleichung im Außengebiet $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > 1\}$ gefunden, die der homogenen Dirichlet-Bedingung und der Abklingbedingung genügt. Stellen wir aber genau eine der beiden Sommerfeldschen Strahlungsbedingungen

$$r \partial_r u - i k r u \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty, \quad r \partial_r u + i k r u \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty,$$

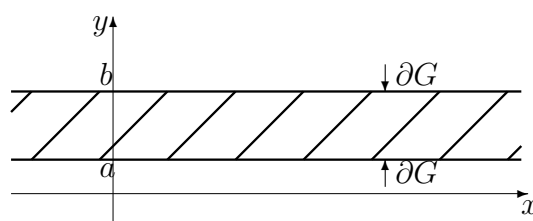
dann ergibt sich nur die Lösung $u \equiv 0$ aus obiger Familie von Lösungen.

Frage: Was ergibt die Sommerfeldsche Strahlungsbedingung im Fall $k = 0$?

c) **Der gesamte Raum**

Es treten keine Nebenbedingungen an die Lösung auf.

d) **Streifengebiete**



$$G = \mathbb{R}_x \times [a, b]$$

$$\begin{array}{ccc} \in & & \in \\ x & & y \end{array}$$

Bezüglich x besteht das Streifengebiet aus der gesamten reellen Achse, also aus dem gesamten reellen Raum \mathbb{R}_x . Bezüglich y besteht es nur aus dem beschränkten Intervall (a, b) , also aus einem “Innengebiet” bez. y . Damit dürfen Bedingungen auf dem Rand ∂G , der unteren und oberen Streifengrenze vorgeschrieben werden.

Fazit: Stationäre Prozesse werden durch partielle Differentialgleichungen und Randbedingungen an die gesuchte Lösung modelliert. Man spricht dann auch von *Randwertproblemen*.

Instationäre Prozesse:

Bei instationären Prozessen treten Anfangsbedingungen und Randbedingungen auf. Anfangsbedingungen sind Bedingungen an die Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) **Innengebiete**

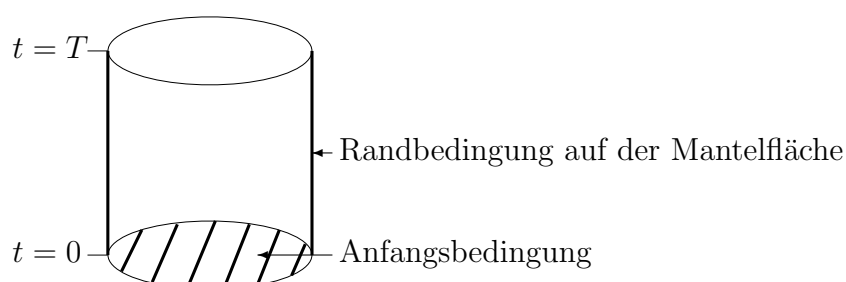
- $\partial_t u - \Delta u = f(t, x, y, z)$: es dürfen genau eine Randbedingung auf

$\partial G \times (0, T)$ und genau eine Anfangsbedingung $u(0, x, y, z) = g(x, y, z)$ auf $G \times \{t = 0\}$ vorgegeben werden. Dabei beschreibt $\partial G \times (0, T)$ die Mantelfläche des Zylinders $Z = G \times (0, T)$. Mögliche Randbedingungen sind z.B.

$$u|_{\partial G \times (0, T)} = g(t, x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial G, \quad t \in (0, T), \quad \text{1. Art,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G \times (0, T)} = g(t, x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial G, \quad t \in (0, T), \quad \text{2. Art,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(t, x, y, z)u \Big|_{\partial G \times (0, T)} = g(t, x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial G, \quad t \in (0, T), \quad \text{3. Art.}$$



- $\partial_t^2 u - \Delta u = f(t, x, y, z)$: es dürfen genau eine Randbedingung auf $\partial G \times (0, T)$ und genau zwei Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$, $u(0, x, y, z) = g_0(x, y, z)$, $\partial_t u(0, x, y, z) = g_1(x, y, z)$ vorgegeschrieben werden.

Frage: Wir untersuchen die instationäre Plattengleichung $\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0$ im Zylinder $Z = G \times (0, \infty)$. Welche Nebenbedingungen dürfen an die Lösung u vorgeschrieben werden?

b) Außengebiete

- $\partial_t u - \Delta u = 0$:
es dürfen genau eine Randbedingung auf $\partial G \times (0, \infty)$, "eventuell eine Abklingbedingung"

$$|u(t, x, y, z)| = O\left(\frac{1}{r}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad \text{für } r \rightarrow \infty,$$

und eine Anfangsbedingung

$$u(0, x, y, z) = g(x, y, z) \quad \text{auf } G \times \{t = 0\}$$

vorgeschrieben werden.

- $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$:

zusätzlich zu den vorher genannten Nebenbedingungen darf noch die Anfangsbedingung

$$u_t(0, x, y, z) = g_1(x, y, z) \quad \text{auf } G \times \{t = 0\}$$

vorgeschrieben werden.

Frage: Wie sehen die Nebenbedingungen für die instationäre Plattengleichung $\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0$ aus? Scheint nicht so einfach zu sein, warum?

c) **Der gesamte Raum**

- $\partial_t u - \Delta u = f(t, x, y, z)$:
es darf genau eine Anfangsbedingung

$$u(0, x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

formuliert werden.

- $\partial_t^2 u - \Delta u = f(t, x, y, z)$:
es dürfen genau zwei Anfangsbedingungen

$$u(0, x, y, z) = g_0(x, y, z), \quad u_t(0, x, y, z) = g_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

formuliert werden.

Frage: Wie sehen die Nebenbedingungen für die instationäre Plattengleichung $\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0$ aus?

d) **Streifengebiete**

Es darf genau eine Randbedingung auf

$$\{(t, x, y = a) \cup (t, x, y = b), t \in (0, T), x \in \mathbb{R}\},$$

und genau eine Anfangsbedingung

$$u(0, x, y) = g(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}_x \times (a, b)$$

für Lösungen von $\partial_t u - \Delta u = f(t, x, y)$, und genau zwei Anfangsbedingungen

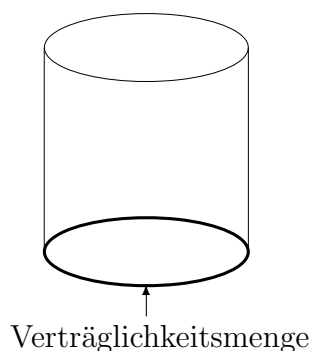
$$u(0, x, y) = g_0(x, y), u_t(0, x, y) = g_1(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}_x \times (a, b)$$

für Lösungen von $\partial_t^2 u - \Delta u = f(t, x, y)$ vorgeschrieben werden.

Verträglichkeit zwischen Nebenbedingungen

1. Häufig ist die Anfangsbedingung $u(0, x, y, z) = g(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in \bar{G}$, das heißt, für alle (x, y, z) aus dem Abschluß \bar{G} des Gebietes G definiert.

Die Randbedingung vom Dirichlet-Typ $u(t, x, y, z) = h(t, x, y, z)$ ist auf $\partial G \times [0, T]$ vorgelegt. Die Mengen $\bar{G} \times \{t = 0\}$ und $\partial G \times [0, T]$ haben den Durchschnitt $\partial G \times \{t = 0\}$. Deshalb ist es vernünftig, auf $\partial G \times \{t = 0\}$ die *Verträglichkeitsbedingung* zwischen der Anfangsbedingung und der Randbedingung in der Form $h(0, x, y, z) = g(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in \partial G$ vorzuschreiben.



2. Betrachten wir das Dirichletsche Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

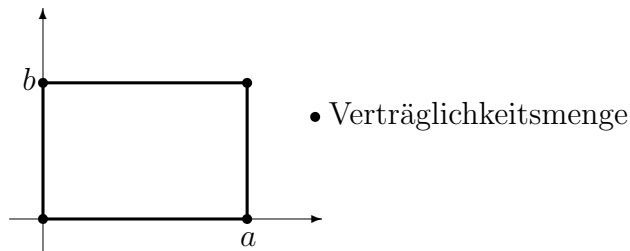
im Rechteck $R = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$. Dann darf die Dirichlet-Bedingung auf dem Rand ∂R vorgeschrieben werden:

- $u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, b) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq a,$
- $u(0, y) = g_1(y), \quad u(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y < b.$

Sind die Funktionen $g_1(y), g_2(y)$ auf $[0, b]$ definiert, dann müssen in den Eckpunkten die Verträglichkeitsbedingungen

- $f_1(0) = g_1(0), \quad g_1(b) = f_2(0), \quad f_2(a) = g_2(b), \quad f_1(a) = g_2(0)$

erfüllt sein.



3.4 Interpretation von Randbedingungen und Anfangsbedingungen

Modell a) *Vorgelegt sei ein wärmeleitender Körper K . An der Oberfläche des wärmeleitenden Körpers treten Wärmeübergänge mit der Umgebung auf, die zu Randbedingungen führen. Der Wärmestrom, der durch die vorhandene Temperaturdifferenz entsteht, kann mit dem Newtonschen Abkühlungsgesetz beschrieben werden. Hat der Außenraum die konstante Temperatur T_1 , das Flächenelement $d\sigma$ der Oberfläche ∂K des Körpers K die Temperatur T , so beträgt die übertragene Wärmemenge $dQ = \alpha(T - T_1)d\sigma dt$, α ist dabei die Wärmeübertragungszahl. Andererseits muß dQ aus dem*

Körperinneren an die Oberfläche durch Wärmeleitung gebracht werden, so daß sich

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt$$

ergibt. Durch Gleichsetzen beider Wärmemengen folgt für jeden Randpunkt des Körpers K die Beziehung

$$\frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_1) = 0 \quad \text{auf} \quad \partial K \times (0, \infty)$$

als Randbedingung bei freiem Wärmeübergang, $h := \frac{\alpha}{\lambda}$ ist die relative Wärmeübergangszahl. Das ist eine *Randbedingung 3. Art oder vom Robin-Typ*.

Falls man den Rand ∂K des wärmeleitenden Körpers K vollständig isoliert, dann gibt es keinen Wärmestrom nach Außen, das heißt,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial K \times (0, \infty)} = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{Randbedingung 2. Art oder vom Neumann-Typ.}$$

Falls man durch Erwärmung oder Abkühlung eine Oberflächentemperatur erzeugt, dann gilt

$$T(t, x, y, z)|_{\partial K \times (0, \infty)} = g(t, x, y, z) \quad \text{für} \quad (x, y, z, t) \in \partial K \times (0, \infty).$$

Mit $g(t, x, y, z)$ wird die erzeugte Oberflächentemperaturverteilung bezeichnet. Das ist eine *Randbedingung 1. Art oder vom Dirichlet-Typ*.

Die Anfangsbedingung

$$T(0, x, y, z) = T_0(x, y, z) \quad \text{für} \quad (x, y, z) \in K$$

beschreibt die Anfangstemperaturverteilung im Körper K zum Zeitpunkt $t = 0$.

Verträglichkeitsbedingungen zwischen Anfangs- und Randbedingungen:

1. mit Randbedingung 1. Art: $T_0(x, y, z) = g(t = 0, x, y, z)$ für alle Punkte $(x, y, z) \in \partial K$,

2. mit Randbedingung 2.Art: $\frac{\partial T_0(x,y,z)}{\partial n} = 0$ für alle Punkte $(x, y, z) \in \partial K$,
3. mit Randbedingung 3.Art: $\frac{\partial T_0(x,y,z)}{\partial n} + h(T_0(x, y, z) - T_1) = 0$ für alle Punkte $(x, y, z) \in \partial K$.

Modell b) Wir betrachten die Transversalschwingungen einer in den Punkten $x = 0$ und $x = L$ fest eingespannten schwingenden Saite der Länge L . Stellen wir das entsprechende Modell auf.

Partielle Differentialgleichung: $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$.

Anfangsbedingungen:

$u(0, x) = u_0(x)$, Anfangsauslenkung der Saite wird beschrieben,
 $u_t(0, x) = u_1(x)$, Anfangsgeschwindigkeit der Saite wird beschrieben,

Randbedingung: $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, Saite ist fest eingespannt, das ist eine Randbedingung 1.Art oder vom Dirichlet-Typ.

Verträglichkeitsbedingungen zwischen Anfangs- und Randbedingungen: $u_0(0) = u_0(L) = 0$, $u_1(0) = u_1(L) = 0$.

Betrachten wir jetzt eine Saite, die in $x = 0$ fest eingespannt ist und in $x = L$ frei schwingt. Dann bleiben die Anfangsbedingungen unverändert. Die Randbedingung $u(t, 0) = 0$ ist von *erster Art oder vom Dirichlet-Typ* und kennzeichnet das feste Einspannen in $x = 0$. In $x = L$ wird das freie Schwingen dadurch charakterisiert, daß der Anstieg der Tangente an die Saite in $x = L$ verschwindet. Damit ist $\frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$. Diese Randbedingung ist von *zweiter Art oder vom Neumann-Typ*.

Verträglichkeitsbedingungen zwischen Anfangs- und Randbedingungen: $u_0(0) = 0$, $u_0'(L) = 0$, $u_1(0) = 0$, $u_1'(L) = 0$.

3.5 Spezielle Geometrien - angepaßte Koordinaten

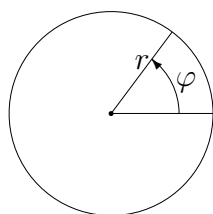
Falls man einen Prozeß in einem Zylinder, in einer Kugel, oder in einer Kreisscheibe untersucht, dann sollte dem Techniker klar sein, daß

anstelle von kartesischen Koordinaten Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten oder Polarkoordinaten verwendet werden. Man nennt solche Koordinaten *der Geometrie angepasste Koordinaten*. Durch den Wechsel zu angepassten Koordinaten wird das Problem mitunter erheblich komplizierter.

Beispiel 1: *Schwingungen einer kreisförmigen Membran mit Radius R , die am Rand fest eingespannt ist.* Stellen wir das zugehörige Modell auf.

Partielle Differentialgleichung: $u_{tt} - \Delta u = 0$, das heißt, $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Die Einführung von Polarkoordinaten bietet sich an: $x = r \cos \varphi$, $y =$



$r \sin \varphi$. Mit diesen neuen, *den angepassten Koordinaten*, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_r u \partial_x r + \partial_\varphi u \partial_x \varphi, & \partial_y u &= \partial_r u \partial_y r + \partial_\varphi u \partial_y \varphi, \\ \partial_x^2 u &= \partial_r^2 u (\partial_x r)^2 + \partial_r u \partial_x^2 r + \partial_{r\varphi}^2 u \partial_x r \partial_x \varphi + \partial_\varphi u \partial_x^2 \varphi \\ &\quad + \partial_{r\varphi}^2 u \partial_x \varphi \partial_x r + \partial_\varphi^2 u (\partial_x \varphi)^2, \\ \partial_y^2 u &= \partial_r^2 u (\partial_y r)^2 + \partial_r u \partial_y^2 r + \partial_{r\varphi}^2 u \partial_y r \partial_y \varphi + \partial_\varphi u \partial_y^2 \varphi \\ &\quad + \partial_{r\varphi}^2 u \partial_y \varphi \partial_y r + \partial_\varphi^2 u (\partial_y \varphi)^2. \end{aligned}$$

Es gilt mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\varphi = \arccos \frac{x}{r}$, $\varphi = \arcsin \frac{y}{r}$ sofort

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{r^3}, & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{r^4}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -\frac{2xy}{r^4}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der transformierten Ausdrücke für $\partial_x^2 u$ und für $\partial_y^2 u$ in die Ausgangsgleichung sehen wir, daß die Ableitungen $\partial_{r\varphi}^2 u$ und $\partial_\varphi u$ herausfallen. Wir erhalten in Konsequenz

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 u.$$

Damit bekommen wir als transformierte partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Anfangsbedingungen: $u(0, r, \varphi) = u_0(r, \varphi)$, $u_t(0, r, \varphi) = u_1(r, \varphi)$,

Randbedingung: $u(t, R, \varphi) = 0$.

Verträglichkeitsbedingung zwischen Anfangs- und Randbedingungen:
 $u_0(R, \varphi) = u_1(R, \varphi) = 0$.

Beachte: Bei der mathematischen Lösung dieses *Rand-Anfangswertproblems*, man nennt dieses auch *gemischtes Problem*, da beide Arten von Nebenbedingungen auftreten, benötigt man noch die offensichtliche Bedingung, daß der Betrag der Auslenkung der Membran im Ursprung $|u(t, 0, \varphi)|$ für alle Zeiten $t > 0$ beschränkt bleibt.

Beispiel 2: *Wärmeleitung in einem kreisförmigen Draht.* Stellen wir das zugehörige Modell auf.

Partielle Differentialgleichung: Natürlich verwenden wir Polarkoordinaten, $r = R$, $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, die Temperatur $T = T(t, \varphi)$ hängt nur vom Polarwinkel φ und der Zeit t ab. Als transformierte partielle Differentialgleichung bekommen wir

$$T_t - \frac{1}{R^2} T_{\varphi\varphi} = 0.$$

Anfangsbedingung: $T(0, \varphi) = T_0(\varphi)$.

Randbedingung: Es gibt ja eigentlich keinen Rand. Es gilt aber, daß T 2π -periodisch in φ ist. Damit erhalten wir *anstelle der Randbedingung die Periodizitätsbedingung*

$$T(t, \varphi) = T(t, \varphi + 2\pi).$$

Verträglichkeitsbedingung zwischen Anfangs- und Randbedingung:
 $T_0(\varphi) = T_0(\varphi + 2\pi)$.

Dieses gemischte Problem oder Rand-Anfangswertproblem wird später untersucht.

3.6 Lösungsbegriff

In einfach gelagerten Fällen kann die Lösung eines Differentialgleichungsproblems durch eine explizite Lösungsdarstellung, das heißt, durch einen Funktionsausdruck, ein Integral oder eine Reihe gegeben werden. Häufig gewinnt man Lösungen in Form von Reihen, man spricht dann von *formalen Lösungen*. Es muß immer eine Konvergenzuntersuchung der formalen Lösung durchgeführt werden. Hat die Reihe die erwarteten Differenzierbarkeitseigenschaften, dann kann die formale Lösung zu einer *klassischen Lösung* werden. Wir erklären den Begriff der klassischen Lösung an zwei Beispielen.

Beispiel 1 $\Delta u = f$:

Die Quelle $f = f(x, y, z)$ sei eine stetige Funktion im \mathbb{R}^3 , die außerhalb einer großen Kugel gleich 0 ist. Dann ist $u = u(x, y, z)$ eine klassische Lösung von $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u = f(x, y, z)$, falls erstens die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_x^2 u$, $\partial_y^2 u$, $\partial_z^2 u$ so existieren wie das im Grundkurs eingeführt wurde, und falls andererseits die Summe dieser partiellen Ableitungen gerade $f = f(x, y, z)$ ergibt in jedem Punkt des \mathbb{R}^3 .

Gegeben sei eine Punktmasse der Masse 1 im Koordinatenursprung im \mathbb{R}^3 . Dann ergibt sich das von dieser Punktmasse erzeugte Gravitationspotential als Lösung von

$$\Delta u = \delta_0 \longleftarrow \text{Diracsche } \delta\text{-Distribution im Punkt } 0.$$

Dieses Potential ist keine klassische Lösung, da andernfalls Δu eine Funktion ergeben müßte. Die Distribution δ_0 ist aber keine Funktion. Das Gravitationspotential ist eine sogenannte *distributionelle Lösung*, das ist ein *erweiterter Lösungsbegriff zu dem der klassischen Lösung*.

Beispiel 2 Wenden wir uns dem Modell b) aus Abschnitt 3.4 zu. Wir betrachten also die beidseitig fest eingespannte schwingende Saite:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \text{ in } \{(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)\},$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Dann ist die Auslenkung $u = u(t, x)$ eine klassische Lösung von $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$, falls u zweimal partiell differenzierbar nach t und x ist und natürlich der Differentialgleichung genügt.

Besitzt die Anfangsauslenkung der Saite einen Knick, dann pflanzt sich dieser für $t > 0$ fort. Die Lösung ist dann nicht mehr zweimal partiell differenzierbar nach x . Um solche Phänomene beschreiben zu können, benötigen wir den Begriff der *distributionellen Lösung*.

3.7 Der Korrektheitsbegriff

Wir haben bisher eine Reihe möglicher Modelle kennengelernt, die aus partiellen Differentialgleichungen und Nebenbedingungen an die Lösung (Rand- oder Anfangsbedingungen) bestehen. Sowohl vom mathematischen Standpunkt als auch vom technischen Standpunkt aus sind die folgenden drei Fragen von Interesse:

- (F1) Besitzt das Modell überhaupt eine Lösung?
Das ist die Frage nach der *Existenz einer Lösung*.
- (F2) Existiert höchstens eine Lösung oder können auch mehrere Lösungen existieren?
Das ist die Frage nach der *Eindeutigkeit einer Lösung*.

Falls die Fragen (F1) und (F2) positiv beantwortet werden, dann ist die folgende Frage interessant.

- (F3) *Hängt die Lösung stetig von den Daten ab?*

Als Daten bezeichnen wir die Vorgaben aus den Anfangs- und Randbedingungen, die Quellen und die Koeffizienten der partiellen Differentialgleichungen. Die Frage drückt aus, ob kleine Änderungen der Daten zu einer kleinen Änderung der Lösung führen.

Falls für ein vorgelegtes Modell die Fragen (F1) bis (F3) positiv beantwortet werden, dann heißt das Modell (das vorgelegte mathematische Modell) *korrekt gestellt*.

Beachte: Die Beantwortung der Frage (F3) hat einen praktischen Hintergrund. Vorgelegt sei z.B. das Cauchy-Problem für die Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned}\rho(x)\partial_t^2 u - \operatorname{div}(h(x) \operatorname{grad} u) &= f(t, x), \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x).\end{aligned}$$

Dabei sind $\rho(x)$ und $h(x)$ Materialgrößen, die durch Messungen bestimmt werden. Messungen unterliegen Meßfehlern. Falls (F3) für dieses Modell positiv beantwortet werden kann, dann bedeutet das, daß sich bei kleiner Änderung von $\rho(x)$, $h(x)$, $f(t, x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ auch die Lösung $u = u(t, x)$ nur wenig ändert, das heißt, *Meßfehler in den Daten bestimmen nicht wesentlich die Lösung*. Die Korrektheitseigenschaft ist eine *wesentliche Eigenschaft*, *Simulationen* durchzuführen.

Es gibt natürlich auch Modelle, die nicht korrekt gestellt sind.

Beispiel 1 Wir untersuchen für ein Innengebiet G das Neumann-Problem

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G} = g.$$

Falls v eine Lösung ist, dann ist auch $v + c$, c ist eine beliebige Konstante, eine Lösung. Es gibt unendlich viele Lösungen, damit muß (F2) verneint werden. Eine Lösung existiert nur, falls $\int_{\partial G} g(\vec{x}) d\sigma = 0$ ist.

Das bedeutet: Nur wenn der Fluß von u durch ∂G gleich 0 ist, existiert eine Lösung. Da in G keine Quellen oder Senken existieren bedeutet das:

”Es kann nur das reinfließen nach G was auch gleichzeitig rausfließt.”

Beispiel 2 Zu *nicht korrekt gestellten Modellen* führen häufig *inverse Probleme der Natur und Technik*. Gegeben sei in einem Innengebiet G das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u + a(x)u = 0, \quad u|_{\partial G} = g(x).$$

Inverses Problem der Parameteridentifikation:

Welche Informationen über die Lösung $u = u(x)$ benötigen wir, um den Koeffizienten $a = a(x)$ eindeutig identifizieren zu können?

4 Erste Lösungsprinzipien

4.1 Die Methode des Separationsansatzes

Der Grundgedanke der Methode des Separationsansatzes besteht darin, *Lösungen in Form von Produkten von Funktionen* zu konstruieren, wobei jede der vorkommenden Variablen in genau einer Funktion auftritt.

Beispiele:

1. Wenden wir uns der Wellengleichung mit Quelle $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u - \partial_z^2 u = f(x, y, z, t)$ zu.

Annahme: Die Quelle f ist periodisch in t , das heißt, $f(x, y, z, t) = -g(x, y, z)e^{iat}$ mit einer Konstanten a . Wir suchen Lösungen $u = u(x, y, z, t)$, die bez. t gleiches periodisches Verhalten haben, das heißt, $u(x, y, z, t) = w(x, y, z)e^{iat}$.

Nach Einsetzen dieses Ansatzes in die vorgelegte partielle Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} (-a^2 w(x, y, z) - \partial_x^2 w(x, y, z) - \partial_y^2 w(x, y, z) - \partial_z^2 w(x, y, z)) e^{iat} \\ = -g(x, y, z)e^{iat}. \end{aligned}$$

Nun ist $e^{iat} \neq 0$, damit erfüllt $w = w(x, y, z)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2 w + \partial_y^2 w + \partial_z^2 w + a^2 w = g, \quad \text{bzw.} \quad \Delta w + a^2 w = g.$$

Das ist eine inhomogene Helmholtz-Gleichung.

2. Wenden wir uns der Schrödinger-Gleichung $i\tilde{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\tilde{h}^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$ mit $\tilde{h} = h/(2\pi)$ aus Abschnitt 2.5 zu. Falls die

Energie E des Teilchens mit der Masse m einen bestimmten Wert besitzt, dann können wir für die Wellenfunktion $\psi = \psi(x, t)$ den Ansatz $\psi(x, t) = w(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ wählen. Nach Einsetzen erhalten wir für $w(x)$ die Bestimmungsgleichung

$$-\frac{\tilde{\hbar}^2}{2m} \frac{d^2 w}{dx^2} + V(x)w = Ew.$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, die sich leichter behandeln läßt als die vorgelegte Schrödinger-Gleichung.

Beachte: Ein Vorteil des Separationsansatzes liegt darin, daß mitunter die Lösung partieller Differentialgleichungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert wird. Letztere sind häufig einfacher zu behandeln.

3. Wenden wir uns der Laplace-Gleichung in einem Rechteck \mathcal{R} zu, das heißt,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in einem Rechteck} \quad \mathcal{R} = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}.$$

Wir wählen den Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Einsetzen dieses Ansatzes in die Laplace-Gleichung liefert

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad X''(x)Y(y) = -Y''(y)X(x).$$

Division durch $X(x)Y(y)$ ergibt schließlich

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{ist nur eine Funktion in } x} = - \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{ist nur eine Funktion in } y} = \lambda,$$

ist nur eine Funktion in x ist nur eine Funktion in y

wobei λ eine reelle Konstante ist, diese heißt *Separationskonstante*.

Fazit: Produktlösungen $u(x, y) = X(x)Y(y)$ von $u_{xx} + u_{yy} = 0$ erhalten wir, indem wir zu einer beliebigen reellen Konstanten λ die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0$$

lösen (siehe Grundkurs Höhere Mathematik).

4. Untersuchen wir die Schwingungen einer fest eingespannten kreisförmigen Membran aus Abschnitt 3.5. Dann erhalten wir

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Wir wählen den Separationsansatz $u(t, r, \varphi) = T(t)w(r, \varphi)$.

Einsetzen dieses Ansatzes in die Schwingungsgleichung in Polarkoordinaten liefert

$$T''w - Tw_{rr} - \frac{1}{r} Tw_r - \frac{1}{r^2} Tw_{\varphi\varphi} = 0$$

bzw. nach Umstellen

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi}}{w(r, \varphi)} = \lambda.$$

Somit erhalten wir Produktlösungen $u(t, r, \varphi) = T(t)w(r, \varphi)$, in dem wir die gewöhnliche Differentialgleichung $T'' - \lambda T = 0$ und die partielle Differentialgleichung

$$w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} - \lambda w = 0 \quad \text{lösen.}$$

Idee: Man sollte *noch einmal die Idee des Separationsansatzes ausnutzen*.

Dazu setzen wir $w(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Einsetzen ergibt

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) - \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Nach Division durch $R(r)\Phi(\varphi)$ und Multiplikation von r^2 erhalten wir

$$\underbrace{\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} - \lambda r^2}_{\text{Funktion in } r} = \underbrace{-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{\text{Funktion in } \varphi} = \underbrace{\mu.}_{\text{reelle Konstante}}$$

Fazit: Durch zweimalige Anwendung des Separationsansatzes reduzieren wir die Frage nach Produktlösungen $u(t, r, \varphi) = T(t)R(r)\Phi(\varphi)$ der

partiellen Differentialgleichungen $u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$ auf die Lösung der drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \quad \Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0$$

und

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - (\lambda r^2 + \mu) R(r) = 0.$$

Dabei sind μ und λ beliebig vorgegebene reelle Zahlen. Für spezielle Werte $\mu = k^2$, k ist eine nichtnegative ganze Zahl, heißt die letzte Differentialgleichung *Besselsche Differentialgleichung*.

4.2 Eigenwerte - Eigenzustände (Eigenfunktionen)

In Abschnitt 4.1 haben wir die Methode des Separationsansatzes zur Konstruktion von Produktlösungen kennengelernt. In diesem Abschnitt nutzen wir die Randbedingungen an die Lösung, um zu sogenannten *Eigenwerten und Eigenfunktionen (Eigenzustände)* zu kommen.

Modell 1: Vorgelegt sei das Modell der fest eingespannten schwingenden Saite (siehe Abschnitt 3.6):

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \{(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)\},$$

Randbedingung: $u(t, 0) = u(t, L) = 0$.

Wir wählen den Separationsansatz $u(t, x) = T(t)X(x)$. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$T''(t)X(x) - X''(x)T(t) = 0, \quad \text{daraus folgt} \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Wir verbinden nun den Separationsansatz mit der Randbedingung $u(t, 0) = u(t, L) = 0$. Danach muß gelten $T(t)X(0) = T(t)X(L) = 0$. Es ist nicht sinnvoll $T(t) = 0$ zu setzen, da dann $u(t, x) \equiv 0$ folgt. Damit spiegelt sich die Randbedingung $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ in der

Bedingung $X(0) = X(L) = 0$ wieder. Somit erhalten wir für die gesuchte Funktion $X(x)$ das Modell

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0.$$

Ziel: Bestimme alle reellen Zahlen λ so, daß dieses Randwertproblem eine von $X(x) \equiv 0$ verschiedene Lösung besitzt. Dazu führen wir folgende Fallunterscheidung durch:

a) $\lambda = 0$: $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b, X(0) = 0 \Rightarrow b = 0, X(L) = 0 \Rightarrow a = 0.$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$.

b) $\lambda > 0$: $X'' - \lambda X = 0$, aus der Vorlesung Höhere Mathematik kennen wir die allgemeine Lösungsdarstellung

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, \\ X(L) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0.$$

Da $L > 0$ ist, hat dieses lineare Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0,$$

nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = 0$.

Für $\lambda > 0$ ergibt sich nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$.

c) $\lambda < 0$: $X'' - \lambda X = 0$, aus der Vorlesung Höhere Mathematik kennen wir die allgemeine Lösungsdarstellung

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), \quad X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \\ X(L) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Da $c_2 \neq 0$ gewählt wird (andernfalls erhalten wir wieder $X(x) \equiv 0$), ergibt sich die Bedingung $\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, also $\sqrt{-\lambda}L = k\pi$ bzw. $-\lambda_k = \left(\frac{k}{L}\pi\right)^2$ bzw. $\lambda_k = -\left(\frac{k}{L}\pi\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$.

Fazit: Es gibt eine Folge $\{\lambda_k\}_k$ negativer reeller Werte mit $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ so, daß das Randwertproblem

$$X'' - \lambda_k X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$

eine von $X_k(x) \equiv 0$ verschiedene Lösung $X_k(x) = \sin(\sqrt{-\lambda_k}x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ (setzen dabei $c_2 = 1$) besitzt.

Man nennt λ_k *Eigenwert* und $X_k(x)$ die zugehörige Eigenfunktion (den zugehörigen Eigenzustand).

Frage: Was ändert sich, wenn wir die Saite nur in $x = 0$ fest einspannen und in $x = L$ frei schwingen lassen?

Randbedingung: $u(t, 0) = 0, \partial_x u(t, L) = 0, u(t, 0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ wie gehabt, $\partial_x u(t, L) = 0 \Rightarrow \partial_x(T(t)X(x))(t, L) = 0 \Rightarrow X'(L) = 0$. Zu lösen ist nun das Randwertproblem

$$X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0, X'(L) = 0.$$

Durch gleiches Vorgehen zeigt man, daß $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$ nur die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$ liefert. Es sei jetzt $\lambda < 0$. Dann gilt wieder

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x), X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, X'(L) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Rightarrow \cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0, \text{ also } \sqrt{-\lambda}L = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ bzw.}$$

$$\lambda_k = -\left(\frac{1}{L}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)^2, k = 0, 1, 2, \dots$$

Fazit: Es gibt eine Folge $\{\lambda_k\}_k$ negativer reeller Werte mit $\lambda_k = -\left(\frac{1}{L}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)^2$ so, daß das Randwertproblem

$$X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0, X'(L) = 0,$$

eine von $X_k(x) \equiv 0$ verschiedene Lösung $X_k(x) = \sin\left(\frac{1}{L}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x\right)$ besitzt.

Beachte: Man nennt Randwertprobleme der Form

$$X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0, X(L) = 0 \text{ oder}$$

$$X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0, X'(L) = 0$$

Sturm-Liouville Probleme.

Es gibt eine Theorie von Sturm-Liouville Problemen, die es gestattet, die Existenz einer Folge von Eigenwerten $\{\lambda_k\}_k$ und zugehörigen

Eigenfunktionen $\{X_k = X_k(x)\}_k$ zu zeigen, wobei sich die Sturm-Liouvilleschen-Randwertprobleme aus dem Separationsansatz und den Randbedingungen ergeben.

Modell 2: Wir untersuchen die Wärmeleitung in einem kreisförmigen Draht (siehe Abschnitt 3.5):

$u_t - \frac{1}{R^2} u_{\varphi\varphi} = 0$, u bezeichne jetzt die Temperatur. Anstelle der Randbedingung tritt die Periodizitätsbedingung $u(t, \varphi) = u(t, \varphi + 2\pi)$ auf. Wir wählen den Separationsansatz $u(t, \varphi) = T(t)\Phi(\varphi)$. Nach Einsetzen in die partielle Differentialgleichung bekommen wir

$$T'(t)\Phi(\varphi) - \frac{1}{R^2} \Phi''(\varphi)T(t) = 0, \quad \frac{R^2 T'(t)}{T(t)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda,$$

mit der Periodizitätsbedingung $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$.

Zu lösen haben wir das Sturm-Liouvillesche Randwertproblem

$$\Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Für $\lambda > 0$ erhalten wir als 2π -periodische Lösung nur die triviale Lösung $\Phi(\varphi) \equiv 0$. Für $\lambda = 0$ erhalten wir die nichttriviale 2π -periodische Lösung $\Phi(\varphi) \equiv 1$. Für $\lambda < 0$ bekommen wir

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\varphi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\varphi).$$

Nun muß die Funktion Φ natürlich 2π -periodisch in φ sein, das heißt,

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi + 2\pi) &= c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}(\varphi + 2\pi)) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}(\varphi + 2\pi)) \\ &= c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\varphi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\varphi) = \Phi(\varphi). \end{aligned}$$

Aus der 2π -Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion folgt

$$\sqrt{-\lambda_k} 2\pi = 2k\pi \Rightarrow \lambda_k = -k^2.$$

Fazit: Es gibt eine Folge $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ nicht-positiver reeller Werte mit $\lambda_k = -k^2$ so, daß

$$\Phi'' - \lambda_k \Phi = 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

eine von $\Phi_k(\varphi) \equiv 0$ verschiedene Lösung

$$\Phi_k(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

besitzt.

Modell 3: (Vergleich von Geometrien)

Modell 3.1: Schwingungen einer kreisförmigen Membran mit dem Radius 1, die am Rand fest eingespannt ist (siehe Abschnitte 3.5 und 4.1).

Nach Separationsansatz erhalten wir für die von den Polarkoordinaten (angepaßte Koordinaten) r und φ abhängigen Funktionen $R(r)$ und $\Phi(\varphi)$ die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0, \quad r^2 R''(r) + rR'(r) - (\lambda r^2 + \mu)R(r) = 0.$$

Als Randbedingung haben wir $u(t, r = 1, \varphi) = T(t)R(r = 1)\Phi(\varphi) = 0$, also $R(1) = 0$. Für $\Phi(\varphi)$ haben wir die 2π -Periodizitätseigenschaft

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Nach den Untersuchungen zu Modell 2 haben wir die Eigenwerte $\mu_k = k^2$ und die Eigenfunktionen $\Phi_k(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Zu jedem $\mu_k = k^2$ haben wir das Problem

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - (\lambda r^2 + k^2)R(r) = 0, \quad R(1) = 0$$

zu lösen. Wie schon in Abschnitt 4.1 erwähnt, ist das die *Besselsche Differentialgleichung*. Dabei durchläuft r das Intervall $(0, 1)$. In $r = 1$ haben wir eine Randbedingung $R(1) = 0$. Damit ergeben sich zu jedem k

- eine Folge von nicht-positiven reellen Eigenwerten $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$,
- zwei Familien von Lösungen $R_{lk}^{(1)} = R_{lk}^{(1)}(r)$ und $R_{lk}^{(2)} = R_{lk}^{(2)}(r)$, wobei alle Funktionen $R_{lk}^{(2)}(r)$ in $r = 0$ unendlich werden. Deshalb fordert man die offensichtlich erfüllte Bedingung $|u(t, r = 0, \varphi)| <$

∞ für jede Zeit t , das heißt, daß die Auslenkung der Membran im Mittelpunkt zu jedem Zeitpunkt t endlich bleibt (vgl. mit Modell 1 aus Abschnitt 3.5). Das entspricht für die gesuchte Funktion $R = R(r)$ der Bedingung $|R(0)| < \infty$. Damit scheidet die Familie $R_{lk}^{(2)}(r)$ aus und man erhält nur $R_{lk}^{(1)}(r)$.

Beachte: Die Besselsche Differentialgleichung ist nicht einfach zu lösen. Die Funktionen $R_{lk}^{(1)}(r)$ heißen Besselfunktionen 1. Art (vgl. mit der Tafel spezieller Funktionen “Atlas of functions”).

Fazit: Das Randwertproblem

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - (\lambda r^2 + k^2) R(r) = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0$$

besitzt zu jeder natürlichen Zahl $k \in N_0$ eine Folge $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$ reeller Eigenwerte und reeller Eigenfunktionen $\{R_{lk}^{(1)}(r)\}_{l \geq 0}$.

Fazit: Die Modellierung der Schwingungen der kreisförmigen Membran wird zurückgeführt auf die Lösung von

$$T'' - \lambda T = 0, \quad \Phi'' + \mu \Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \\ r^2 R''(r) + r R'(r) - (\lambda r^2 + k^2) R(r) = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0.$$

Die 2. Differentialgleichung mit der Periodizitätsbedingung hat die Eigenwerte $\mu_k = k^2$ mit den Eigenfunktionen $\Phi_k(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Die 3. Differentialgleichung hat mit der Randbedingung $R(1) = 0$ und der Beschränktheitsbedingung $|R(0)| < \infty$ die reellen Eigenwerte $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen (Besselfunktionen 1. Art) $\{R_{lk}^{(1)}(r)\}_{l \geq 0}$.

Modell 3.2: Schwingungen einer rechteckigen Membran, die fest eingespannt ist.

Die partielle Differentialgleichung lautet $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$.

Die Randbedingung stellt sich in folgender Form dar:

$$0 = u(t, x, 0) = u(t, x, b), \quad x \in [0, a], \\ 0 = u(t, 0, y) = u(t, a, y), \quad y \in [0, b].$$

Wir wählen den Separationsansatz $u(t, x, y) = T(t)w(x, y)$.

Damit ergibt sich $T''w - T \partial_x^2 w - T \partial_y^2 w = 0$. Daraus folgt

$$\frac{T''}{T} = \frac{\partial_x^2 w + \partial_y^2 w}{w} = \lambda \text{ mit der ersten Separationskonstanten } \lambda.$$

Zu lösen sind $T'' - \lambda T = 0$ und $\partial_x^2 w + \partial_y^2 w - \lambda w = 0$.

Wählen nun den Separationsansatz $w(x, y) = X(x)Y(y)$ und setzen diesen in obige Differentialgleichung ein. Wir erhalten

$$X''Y + Y''X - \lambda XY = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{X''}{X} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \text{ mit der zweiten Separationskonstanten } \mu.$$

Zu lösen haben wir somit $Y'' + \mu Y = 0$, $X'' - (\lambda + \mu)X = 0$.

Verarbeiten der Randbedingung:

$u(t, x, 0) = T(t)X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$, entsprechend zeigt man $Y(b) = X(0) = X(a) = 0$. Somit sind die beiden Sturm-Liouville Probleme

$$\begin{aligned} Y'' + \mu Y &= 0, & Y(0) &= Y(b) = 0, \\ X'' - (\lambda + \mu)X &= 0, & X(0) &= X(a) = 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Entsprechend dem Vorgehen bei der Behandlung von Modell 1 erhalten wir die Eigenwerte $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ mit den Eigenfunktionen $Y_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Für jedes μ_k haben wir das Sturm-Liouville Problem $X'' - (\lambda + \mu_k)X = 0$, $X(0) = X(a) = 0$ zu lösen. Es ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_{lk} = -\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ und die Eigenfunktionen $X_l(x) = \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)$.

Fazit: Die Modellierung der rechteckigen Membran wird zurückgeführt auf die Lösung von $T'' - \lambda T = 0$ und $\partial_x^2 w + \partial_y^2 w - \lambda w = 0$. Die 2. Differentialgleichung mit der Randbedingung $w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0$ hat die Eigenwerte $\lambda_{lk} = -\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ mit den Eigenfunktionen $w_{lk}(x, y) = \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$.

Beachte: Die Konstruktion von Produktlösungen läßt sich im Fall der rechteckigen Membran viel einfacher durchziehen als für die kreisförmige Membran.

4.3 Eigenschaften der Systeme von Eigenfunktionen

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir verschiedene Sturm-Liouvillesche Probleme gelöst:

z.B. bei der Modellierung der beidseitig fest eingespannten schwingenden Saite ergab sich

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$

mit den Eigenwerten $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$

und den Eigenfunktionen $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right);$

bei der Modellierung der einseitig fest eingespannten schwingenden Saite ergab sich

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0,$$

mit den Eigenwerten $\lambda_k = -\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{L}\right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$

und den Eigenfunktionen $X_k(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{x}{L}\right);$

bei der Modellierung der Wärmeleitung in einem kreisförmigen Draht ergab sich

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

mit den Eigenwerten $\mu_k = k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$

und den Eigenfunktionen $\Phi_k(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi).$

Merke: Die Menge der Eigenfunktionen $\{X_k = X_k(x)\}_{k>0}$ oder $\{\Phi_k = \Phi_k(\varphi)\}_{k\geq 0}$ hat eine bemerkenswerte Eigenschaft, und zwar erfüllt diese sogenannte *Orthogonalitätsrelationen*. Wählen wir zwei Eigenfunktionen X_k und X_l zu verschiedenen Eigenwerten λ_k und λ_l , bilden das Produkt beider Eigenfunktionen, und integrieren das Produkt über $(0, L)$ oder $(0, 2\pi)$ so ergibt sich Null.

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^L X_k(x)X_l(x)dx = 0 \quad \text{für } k \neq l,$$
$$\int_0^{2\pi} \Phi_k(\varphi)\Phi_l(\varphi)d\varphi = 0 \quad \text{für } k \neq l.$$

Frage: Welche Bedeutung haben diese Orthogonalitätsrelationen?

Antwort: Man kann *Vergleichsfunktionen* in Reihen nach den Eigenfunktionen entwickeln. Dabei sind *Vergleichsfunktionen* zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $[0, L]$ oder $[0, 2\pi]$, die der entsprechenden homogenen Randbedingung, aber nicht notwendig der vorgelegten Differentialgleichung genügen.

Also ist in unseren Beispielen $u = u(x)$ oder $u = u(\varphi)$ eine Vergleichsfunktion, wenn

- $u(0) = u(L) = 0$ und u zweimal stetig differenzierbar auf $[0, L]$ ist,
- $u(0) = 0, \quad u'(L) = 0$ und u zweimal stetig differenzierbar auf $[0, L]$ ist,
- $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$ und u zweimal stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi]$ ist.

Entwicklungssatz: Jede Vergleichsfunktion $u = u(x)$ (oder $u = u(\varphi)$) kann auf $[0, L]$ (oder auf $[0, 2\pi]$) als gleichmäßig konvergente Reihe $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ (oder $u(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi)$) dargestellt werden. Falls die gewählte Funktion $u(x)$ der homogenen Randbedingung genügt und nur auf dem offenen Intervall $(0, L)$ (oder auf $(0, 2\pi)$) zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ auf $(0, L)$ (oder $u(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi)$ auf $(0, 2\pi)$) und die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem Teilintervall $[a, b]$ mit $0 < a < b < L$ (oder $0 < a < b < 2\pi$).

Die Koeffizienten c_k, c_{1k} und c_{2k} sind reelle Zahlen. Diese berechnen

sich durch

$$c_k = \frac{\int_0^L u(x) X_k(x) dx}{\int_0^L X_k(x)^2 dx},$$

$$c_{1k} = \frac{\int_0^{2\pi} u(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \cos^2(k\varphi) d\varphi},$$

$$c_{2k} = \frac{\int_0^{2\pi} u(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \sin^2(k\varphi) d\varphi}.$$

Man nennt diese reellen Zahlen Fourierkoeffizienten und die obigen Reihen Fourierreihen.

Machen wir uns zum Schluß dieses Abschnittes die Formeln zur Berechnung der Fourierkoeffizienten c_k plausibel. Wir setzen die Entwicklung $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ voraus. Dann multiplizieren wir diese Gleichung mit $X_l(x)$, integrieren über $(0, L)$ und erhalten

$$\int_0^L u(x) X_l(x) dx = \int_0^L \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x) \right) X_l(x) dx.$$

Nehmen wir jetzt an, daß wir \int_0^L und $\sum_{k=1}^{\infty}$ vertauschen dürfen (gleichmäßige Konvergenz der Reihe vorausgesetzt), dann gilt

$$\int_0^L u(x) X_l(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \underbrace{\int_0^L X_k(x) X_l(x) dx}_{= 0 \text{ für } k \neq l}$$

Orthogonalitätsrelationen

Damit bleibt

$$c_k = \frac{\int_0^L u(x) X_k(x) dx}{\int_0^L X_k(x)^2 dx}.$$

Entsprechend zeigt man

$$c_{1k} = \frac{\int_0^{2\pi} u(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \cos^2(k\varphi) d\varphi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

und

$$c_{2k} = \frac{\int_0^{2\pi} u(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \sin^2(k\varphi) d\varphi}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

4.4 Superpositionsprinzip und Verarbeiten der Anfangsbedingungen

Mit Hilfe des Separationsansatzes erhalten wir Produktlösungen vorgelegter partieller Differentialgleichungen. In Abschnitt 4.2 haben wir Eigenwerte und Eigenfunktionen kennengelernt.

Schwingungen einer kreisförmigen Membran:

Eigenwerte: $\lambda_{lk}, l, k \geq 0,$

Eigenfunktionen: $w_{lk}(r, \varphi) = R_{lk}^{(1)}(r) \Phi_k(\varphi)$ von

$$w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\varphi\varphi} = \lambda_{lk} w, \quad l, k \geq 0.$$

Schwingungen einer rechteckigen Membran:

Eigenwerte: $\lambda_{lk} = -\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2,$

Eigenfunktionen: $w_{lk}(x, y) = \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$ von

$$w_{xx} + w_{yy} = \lambda_{lk} w, \quad l, k \geq 1.$$

Wärmeleitung in einem kreisförmigen Draht:

Eigenwerte: $\lambda_k = -k^2,$

Eigenfunktionen: $\Phi_k(\varphi) = c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi)$ von

$$\Phi'' = \lambda_k \Phi.$$

Es müssen jetzt noch die Differentialgleichungen

$$T''(t) - \lambda_{lk} T(t) = 0 \quad (\lambda_{lk} \leq 0!)$$

in den ersten beiden Fällen und

$$T'(t) + \frac{k^2}{R^2}T(t) = 0$$

im dritten Fall gelöst werden. Im dritten Fall ergibt sich die Lösung $T_k(t) = e^{-\frac{k^2}{R^2}t}$. In den ersten beiden Fällen ergibt sich

$$T_{lk}(t) = f_{lk} \cos(\sqrt{-\lambda_{lk}}t) + g_{lk} \sin(\sqrt{-\lambda_{lk}}t).$$

Damit ergeben sich in den ersten beiden Fällen die Produktlösungen

$$\begin{aligned} u_{lk}(r, \varphi, t) &= R_{lk}^{(1)}(r) \Phi_k(\varphi) T_{lk}(t), \\ u_{lk}(x, y, t) &= \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) T_{lk}(t), \end{aligned}$$

bzw. im dritten Fall

$$u_k(\varphi, t) = \Phi_k(\varphi) T_k(t) = \Phi_k(\varphi) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}.$$

Alle Produktlösungen erfüllen die homogene Randbedingung (festes Eingespanntsein der kreisförmigen oder der rechteckigen Membran) bzw. die Periodizitätsbedingung $u_k(\varphi, t) = u_k(\varphi + 2\pi, t)$. Es kommt jetzt das *Superpositionsprinzip* zur Anwendung. Hat man eine Differentialgleichung ohne Quelle, für unsere drei Beispiele

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad u_t - \frac{1}{R^2}u_{\varphi\varphi} = 0,$$

dann ist die *Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung*. Formal können wir auch die Linearkombination aller unendlich vielen Produktlösungen ($u_{lk}(r, \varphi, t)$ im ersten Fall, $u_{lk}(x, y, t)$ im zweiten Fall, $u_k(\varphi, t)$ im dritten Fall) bilden und erhalten sogenannte *formale*

Lösungen in Form von Reihen

$$\begin{aligned}u(r, \varphi, t) &= \sum_{l, k \geq 0} R_{lk}^{(1)}(r) \left(c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi) \right) \\ &\quad \times \left(f_{lk} \cos(\sqrt{-\lambda_{lk}t}) + g_{lk} \sin(\sqrt{-\lambda_{lk}t}) \right), \\ u(x, y, t) &= \sum_{l, k \geq 0} \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right) \\ &\quad \times \left(f_{lk} \cos(\sqrt{-\lambda_{lk}t}) + g_{lk} \sin(\sqrt{-\lambda_{lk}t}) \right), \\ u(\varphi, t) &= \sum_{k \geq 0} \left(c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi) \right) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}.\end{aligned}$$

Diese Darstellungen heißen *formale Lösungen*, weil bis jetzt noch keine Konvergenzuntersuchungen der Reihen durchgeführt wurden. Es könnte also im Prinzip auch möglich sein, daß die obigen Reihenlösungen divergieren.

Wenden wir uns zuerst den Anfangsbedingungen in allen drei Beispielen zu.

Nach Beispiel 2 aus Abschnitt 3.5 gilt für die Wärmeleitung im kreisrunden Draht die Anfangsbedingung

$$u(\varphi, 0) = u_0(\varphi) \quad \text{mit der Verträglichkeitsbedingung} \quad u_0(\varphi) = u_0(\varphi + 2\pi).$$

Setzen wir nun $u_0(\varphi)$ als zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ voraus, dann ist $u_0(\varphi)$ eine Vergleichsfunktion und läßt sich nach dem Entwicklungssatz nach den Eigenfunktionen entwickeln, also gilt

$$u_0(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos(k\varphi) + g_k \sin(k\varphi).$$

Setzen wir in der Lösungsdarstellung

$$u(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi) \right) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}$$

$t = 0$ und führen einen Koeffizientenvergleich durch (das ist möglich, da das *System der Eigenfunktionen für das entsprechende Sturm-Liouville Problem vollständig ist*, wir sind auf die Vollständigkeit von Systemen von Eigenfunktionen nicht eingegangen, das muß aber gewährleistet sein), dann ergeben sich die Beziehungen $c_{1k} = f_k$ und $c_{2k} = g_k$. Damit erhalten wir als *formale Lösung der Wärmeleitung im kreisrunden Draht*

$$u(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cos(k\varphi) + g_k \sin(k\varphi) \right) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}.$$

Wenden wir uns noch den Schwingungen einer kreisförmigen, fest eingespannten Membran zu. Nach Beispiel 1 aus Abschnitt 3.5 gelten die Anfangsbedingungen $u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi)$ und $u_t(r, \varphi, 0) = u_1(r, \varphi)$ mit der Verträglichkeitsbedingung $u_0(1, \varphi) = u_1(1, \varphi) = 0$ ($R = 1$ gewählt). Sind nun $u_0(r, \varphi)$ und $u_1(r, \varphi)$ zweimal stetig differenzierbar, dann sind diese Funktionen Vergleichsfunktionen und lassen sich deshalb nach den Eigenfunktionen $w_{lk}(r, \varphi) = R_{lk}^{(1)}(r)\Phi_k(\varphi)$ entwickeln, und es gelten die folgenden Darstellungen:

$$u_0(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{lk} R_{lk}^{(1)}(r) \cos(k\varphi) + b_{lk} R_{lk}^{(1)}(r) \sin(k\varphi),$$

$$u_1(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} d_{lk} R_{lk}^{(1)}(r) \cos(k\varphi) + e_{lk} R_{lk}^{(1)}(r) \sin(k\varphi).$$

Schauen wir uns die formale Lösungsdarstellung für $u = u(r, \varphi, t)$ an, dann ergeben sich daraus

$$u(r, \varphi, 0) = \sum_{l,k \geq 0} R_{lk}^{(1)}(r) \left(c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi) \right) f_{lk},$$

$$\text{bzw. } u_t(r, \varphi, 0) = \sum_{l,k \geq 0} R_{lk}^{(1)}(r) \left(c_{1k} \cos(k\varphi) + c_{2k} \sin(k\varphi) \right) \sqrt{-\lambda_{lk}} g_{lk}.$$

Nach Koeffizientenvergleich (Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen für das entsprechende Sturm-Liouvillesche Randwertpro-

blem ist gesichert) bekommen wir

$$c_{1k}f_{lk} = a_{lk}, \quad c_{2k}f_{lk} = b_{lk}, \quad c_{1k}g_{lk} = \frac{d_{lk}}{\sqrt{-\lambda_{lk}}}, \quad c_{2k}g_{lk} = \frac{e_{lk}}{\sqrt{-\lambda_{lk}}}.$$

Somit ergibt sich die formale Lösung

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{l,k \geq 0} R_{lk}^{(1)}(r) \left(a_{lk} \cos(k\varphi) + b_{lk} \sin(k\varphi) \right) \cos(\sqrt{-\lambda_{lk}}t) \\ + R_{lk}^{(1)}(r) \left(d_{lk} \cos(k\varphi) + e_{lk} \sin(k\varphi) \right) \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_{lk}}t)}{\sqrt{-\lambda_{lk}}}.$$

Entsprechend leitet man die formale Lösung für die Schwingungen einer rechteckigen, fest eingespannten Membran her.

Merke: Wir haben zur Herleitung von formalen Lösungen für verschiedene Modelle einen Koeffizientenvergleich durchgeführt. Dieser ist möglich, da in unseren Beispielen das System der Eigenfunktionen für das entsprechende Sturm-Liouvillesche Randwertproblem vollständig ist.

4.5 Differenzierbarkeitseigenschaften formaler Lösungen

Am Ende der mathematischen Behandlung von Modellen müssen Konvergenzuntersuchungen der formalen Lösungen durchgeführt werden. Wenden wir uns der formalen Lösung für die Wärmeleitung im kreisrunden Draht

$$u(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cos(k\varphi) + g_k \sin(k\varphi) \right) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}$$

zu. Diese soll die Differentialgleichung

$$u_t - \frac{1}{R^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und } \varphi \in \mathbb{R}^1$$

(u ist 2π -periodisch in φ) lösen.

Wir setzen jetzt voraus, daß sich die Fourierkoeffizienten f_k und g_k

wie $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ verhalten, das heißt, $|f_k|, |g_k| \leq \frac{C}{k^2}$ für $k \geq 1$ mit einer von k unabhängigen Konstanten C . Dann konvergiert die Reihe

$$u(\varphi, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos(k\varphi) + g_k \sin(k\varphi)$$

(Anwendung des Majorantenkriteriums für Funktionenreihen). Für $t > 0$ kann bei der Berechnung der partiellen Ableitungen erster Ordnung die Reihe

$$u(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cos(k\varphi) + g_k \sin(k\varphi) \right) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}$$

gliedweise differenziert werden, das heißt,

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi}^l u(\varphi, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k d_{\varphi}^l \cos(k\varphi) + g_k d_{\varphi}^l \sin(k\varphi) \right) e^{-\frac{k^2}{R^2}t}, \\ \partial_t^l u(\varphi, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(f_k \cos(k\varphi) + g_k \sin(k\varphi) \right) d_t^l e^{-\frac{k^2}{R^2}t}. \end{aligned}$$

Diese Reihen konvergieren für jedes feste $t > 0$ gleichmäßig bez. φ , da $e^{-\frac{k^2}{R^2}t} k^p$ für jede Potenz p für festes $t > 0$ und hinreichend großes k beliebig klein ausfällt und schneller fällt als jede negative Potenz k^{-m} . Bei jeder zusätzlichen Differentiation entsteht eine zusätzliche Potenz von k .

Fazit: Die formale Lösung der Wärmeleitung in einem kreisrunden Draht stellt eine klassische Lösung dar, die für $t > 0$ unendlich oft differenzierbar in t und φ ist. Das Problem der Wärmeleitung in einem kreisrunden Draht ist korrekt gestellt.

Die Konvergenzuntersuchungen für die formalen Lösungen der fest eingespannten kreisförmigen oder rechteckigen Membran gestalten sich schwieriger. Man kann aber auch unter gewissen Voraussetzungen an die Fourierkoeffizienten $a_{lk}, b_{lk}, d_{lk}, e_{lk}$ aus Abschnitt 4.4 die Existenz klassischer Lösungen und die Korrektheit der gemischten Probleme nachweisen.

4.6 Behandlung von inhomogenen Rand-Anfangswertproblemen

Bis jetzt haben wir die Fouriersche Methode nur für Modelle ohne Quellen und Senken untersucht. In diesem Abschnitt wenden wir uns einem Modell mit einer Quelle oder Senke $F = F(t, x)$ zu.

Wir betrachten dazu die Modellierung der Schwingungen einer gedämpften Saite (Dämpfung ku_t) unter Einfluß einer äußeren Kraft F (z.B. hervorgerufen durch ein angelegtes Magnetfeld), die zusätzlich Schwingungen erzeugt.

Modell:

Partielle Differentialgleichung:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ku_t = F(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

$$\text{Anfangsbedingungen:} \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x).$$

$$\text{Eine Randbedingung:} \quad u(t, 0) = r(t), \quad u(t, L) = s(t), \quad t \geq 0.$$

Verträglichkeitsbedingungen:

$$f(0) = r(0), \quad f(L) = s(0), \quad g(0) = r'(0), \quad g(L) = s'(0).$$

1. Schritt: *Transformation auf verschwindende Randdaten*

Es sei $U = U(t, x)$ eine Funktion, die wie folgt definiert ist:

$$U(t, x) = \frac{L-x}{L} r(t) + \frac{x}{L} s(t).$$

Diese Funktion erfüllt $U(t, 0) = r(t)$, $U(t, L) = s(t)$, damit ist die Randbedingung erfüllt. Wir betrachten die neue Funktion $w(t, x) :=$

$u(t, x) - U(t, x)$. Diese löst das Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
 w_{tt} - c^2 w_{xx} + kw_t &= F_1(t, x), \quad w(0, x) = f_1(x), \quad w_t(0, x) = g_1(x), \\
 w(t, 0) = w(t, L) &= 0 \quad \text{mit} \\
 f_1(x) &= f(x) - \left(\frac{L-x}{L} r(0) + \frac{x}{L} s(0) \right), \\
 g_1(x) &= g(x) - \left(\frac{L-x}{L} r'(0) + \frac{x}{L} s'(0) \right), \\
 F_1(t, x) &= F(t, x) - \left(\frac{L-x}{L} r''(t) + \frac{x}{L} s''(t) \right) \\
 &\quad - k \left(\frac{L-x}{L} r'(t) + \frac{x}{L} s'(t) \right).
 \end{aligned}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen $f_1(0) = f_1(L) = g_1(0) = g_1(L) = 0$ sind erfüllt.

2. Schritt: *Splitten in zwei Rand-Anfangswertprobleme*

Für w wählen wir den Ansatz $w = w_1 + w_2$, wobei w_1 und w_2 die folgenden Rand-Anfangswertprobleme lösen:

$$\begin{aligned}
 w_{1,tt} - c^2 w_{1,xx} + kw_{1,t} &= F_1(t, x), \\
 w_1(x, 0) = w_{1,t}(x, 0) &= 0, \quad w_1(0, t) = w_1(L, t) = 0
 \end{aligned}$$

(homogene Rand- und Anfangsbedingungen, aber inhomogene Differentialgleichung);

$$\begin{aligned}
 w_{2,tt} - c^2 w_{2,xx} + kw_{2,t} &= 0, \\
 w_2(x, 0) = f_1(x), \quad w_{2,t}(x, 0) &= g_1(x), \quad w_2(0, t) = w_2(L, t) = 0
 \end{aligned}$$

(homogene Differentialgleichung und Randbedingung, aber inhomogene Anfangsbedingungen).

Das gemischte Problem für w_2 haben wir schon gelöst.

Es bleibt nur noch das folgende gemischte Problem ($v := w_1$) zu lösen:

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + kv_t = F_1(t, x), \quad v(0, x) = v_t(0, x) = 0, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0.$$

3. Schritt: *Sturm - Liouvillesches Eigenwertproblem*

Wir untersuchen das Eigenwertproblem $+c^2 X'' - \lambda X = 0$, $X(0) = X(L) = 0$. Wie gehabt müssen die Eigenwerte $\lambda_l = -(\frac{lc\pi}{L})^2$ und zugehörigen Eigenfunktionen $X_l = X_l(x) = \sin(\frac{l\pi}{L}x)$ bestimmt werden.

4. Schritt: *Gesonderte Behandlung der Quelle/Senke*

Die rechte Seite F_1 ist bez. x auf dem Intervall $(0, L)$ definiert. Durch ungerade Fortsetzung

$$F_1(t, -x) = -F_1(t, x), \quad x \in (0, L),$$

erhalten wir eine neue Funktion

$$\tilde{F}_1(t, x) = \begin{cases} F_1(t, x), & x \in (0, L), \\ -F_1(t, -x), & x \in (-L, 0). \end{cases}$$

Nach der Theorie trigonometrischer Fourierreihen (siehe Grundkurs Höhere Mathematik) läßt sich \tilde{F}_1 in eine reine Sinusreihe entwickeln, das heißt, $\tilde{F}_1(t, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{F}_{1,l}(t) X_l(x)$.

Nach Anwendung des Superpositionsprinzips erhalten wir den Lösungsansatz $v(t, x) = \sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) X_l(x)$. Einsetzen dieses Ansatzes in die partielle Differentialgleichung und formales Differenzieren der Lösung (formal bedeutet: Vertauschung von unendlicher Summation und partieller Differentiation nach t oder x) liefern

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} + kv_t &= \sum_{l=1}^{\infty} T_l''(t) X_l(x) - \sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) c^2 X_l''(x) \\ &+ k \sum_{l=1}^{\infty} T_l'(t) X_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{F}_{1,l}(t) X_l(x) = \tilde{F}_1(t, x). \end{aligned}$$

5. Schritt: *Cauchy-Probleme zur Berechnung der Funktionen $T_l = T_l(t)$*

Verwenden wir schließlich $c^2 X_l'' = \lambda_l X$, dann erhalten wir nach Koeffizientenvergleich der Eigenfunktionen $X_l = X_l(x)$ (das System der Eigenfunktionen $\{X_l\}_{l \geq 1}$ ist vollständig bez. dem Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem aus dem 3. Schritt) die Cauchy-Probleme

$$T_l'' - \lambda_l T_l + k T_l' = \tilde{F}_{1,l}(t), \quad T_l(0) = T_l'(0) = 0, \quad l \geq 1$$

($T_l(0) = T_l'(0) = 0$ entspricht den Cauchy-Bedingungen $w_1(x, 0) = w_{1,t}(x, 0) = 0$!).

Mit Hilfe der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind die Funktion $T_l(t)$ zu gegebenen $\tilde{F}_{1,l}(t)$ zu bestimmen.

6. Schritt: *Konvergenzuntersuchung der formalen Lösungen*

Damit erhalten wir die formale Lösung

$$v(t, x) = w_1(t, x) = \sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) X_l(x).$$

Konvergenzuntersuchungen sollten angeschlossen werden.

Fazit: *Damit schließen wir die Erklärungen zur Fourierschen Methode ab.*

4.7 Noch einmal zur Modellierung

4.7.1 Plattentheorie

Zuerst wollen wir uns Modellierungen von Platten anschauen.

Modell 1: Wenden wir uns zuerst der *Durchbiegung* und den *Eigen-schwingungen* einer frei gelagerten Rechteckplatte zu.

Wir setzen dazu voraus, daß auf eine rechteckige Platte (als eben angesehen und in der $x - y$ -Ebene positioniert) eine Kraft senkrecht zur Platte wirkt. Uns interessiert nur die z -Komponente der Kraft, die mit $F = F(x, y)$ bezeichnet wird. Die rechteckige Platte fülle den Bereich $B = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$ aus. Nach Abschnitt 3.3 erhalten wir die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^4 w + 2\partial_x^2 \partial_y^2 w + \partial_y^4 w = \frac{F(x, y)}{N},$$

wobei N die *Plattensteifigkeit* und $w = w(x, y)$ die *Verschiebungen* bezeichnen. Der Prozeß ist natürlich stationär, so daß nur Randbedingungen von Interesse sind.

Wie sehen diese Randbedingungen aus? Zuerst beobachten wir, daß im Fall der frei gelagerten Platte die Ränder verschiebungsfrei sind, d.h.

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0$$

für $x \in [0, a]$ und für $y \in [0, b]$.

Wir benötigen jedoch noch eine zweite Randbedingung. Diese resultiert aus der Tatsache, daß wegen des freien Lagerns das Moment M_y für $x = 0$ bzw. das Moment M_x für $y = 0$ verschwindet. Zusammen mit der Verschiebungsfreiheit des Randes der Platte ergibt sich sofort

$$\Delta w(0, y) = \Delta w(a, y) = \Delta w(x, 0) = \Delta w(x, b) = 0$$

für $x \in [0, a]$ und für $y \in [0, b]$.

Damit können bei der frei gelagerten Rechteckplatte die Verschiebungen zum Rand hin eine nicht horizontale Tangente besitzen. Zur Berechnung der *Eigenschwingungen* der frei gelagerten Platte haben wir das Modell

$$\rho h \partial_t^2 w + N(\partial_x^4 w + 2\partial_x^2 \partial_y^2 w + \partial_y^4 w) = 0,$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } w(0, x, y) = f(x, y), \quad w_t(0, x, y) = g(x, y),$$

$$\text{Randbedingungen: } w(t, x, y) = \Delta w(t, x, y) = 0 \text{ auf dem Rand der Platte}$$

zu untersuchen, wobei die Verträglichkeitsbedingungen zwischen Anfangs- und Randbedingungen erfüllt sein sollten.

Beachte: Das Randwertproblem der Durchbiegung einer frei drehbar gelagerten Rechteckplatte unter Auftreten einer Belastung $f =$

$f(x, y)$, d.h. das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\partial_x^4 w + 2\partial_x^2 \partial_y^2 w + \partial_y^4 w &= f(x, y), \\ w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) &= 0 \\ \text{für } x \in [0, a] \text{ und für } y \in [0, b], \\ \Delta w(0, y) = \Delta w(a, y) = \Delta w(x, 0) = \Delta w(x, b) &= 0 \\ \text{für } x \in [0, a] \text{ und für } y \in [0, b],\end{aligned}$$

läßt sich nicht ohne weiteres durch den Separationsansatz lösen. Schon Navier (1821) hat aber gezeigt, daß der Doppelreihenansatz

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} C_{np} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right)$$

zum Ziel führt. Falls die Belastung f eine Vergleichsfunktion ist, d.h. den obigen homogenen Randbedingungen genügt, dann kann die Fourierreihenentwicklung

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_{np} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right)$$

benutzt werden, um die unbekanntenen Fourierkoeffizienten C_{np} zu berechnen.

Modell 2: Wenden wir uns nun der *Durchbiegung* und den *Eigen-schwingungen* einer fest gelagerten Kreisplatte zu.

Wir setzen dazu voraus, daß auf eine kreisförmige Platte (als eben angesehen und in der $x - y$ -Ebene positioniert) eine radialsymmetrische Kraft senkrecht zur Platte wirkt. Uns interessiert nur die z -Komponente der Kraft, die mit $F = F(r)$ bezeichnet wird. Dann ist zu erwarten, daß auch die Durchbiegung $w = w(r)$ nur vom Polarabstand abhängt. Die kreisförmige Platte fülle den Bereich $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ aus. Nach Abschnitt 3.3 und der Wahl angepaßter Koordinaten erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$d_r^4 w + \frac{2}{r} d_r^3 w - \frac{1}{r^2} d_r^2 w + \frac{1}{r^3} d_r w = \frac{F(r)}{N},$$

wobei wiederum N die *Plattensteifigkeit* und $w = w(r)$ die *Verschiebungen* bezeichnen. Der Prozeß ist natürlich stationär, so daß nur Randbedingungen von Interesse sind.

Wie sehen diese Randbedingungen aus? Zuerst beobachten wir, daß im Fall der fest gelagerten kreisförmigen Platte der Rand verschiebungsfrei ist, d.h. $w(r = R) = 0$. Wir benötigen jedoch noch eine zweite Randbedingung. Diese drückt aus, daß bei der am Rand fest gelagerten kreisförmigen Platte die Verschiebungen zum Rand hin eine horizontale Tangente besitzen, d.h. $d_r w(r = R) = 0$. Wie bei der Modellierung der schwingenden Membran (vgl. mit Abschnitt 4.2, Modell 3) benötigen wir noch Bedingungen in $r = 0$, die aus der Familie aller Lösungen obiger Differentialgleichung die richtigen Lösungen herausfiltern. Solche Bedingungen sind z.B. $w(r = 0)$, $d_r^2 w(r = 0)$ sind endlich oder $w(r = 0)$, $d_r w(r = 0) = 0$ sind endlich.

Zur Berechnung der *Eigenschwingungen* der fest gelagerten kreisförmigen Platte haben wir das Modell

$$\rho h \partial_t^2 w + N \left(d_r^4 w + \frac{2}{r} d_r^3 w - \frac{1}{r^2} d_r^2 w + \frac{1}{r^3} d_r w \right) = 0,$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } w(0, r) = f(r), \quad w_t(0, r) = g(r),$$

$$\text{Randbedingungen: } w(t, r = R) = d_r w(t, r = R) = 0 \text{ auf dem Rand der Platte}$$

zu untersuchen, wobei die Verträglichkeitsbedingungen zwischen Anfangs- und Randbedingungen erfüllt sein sollten.

4.7.2 Halbleitertechnik

Zuerst wollen wir uns ein einfaches Modell aus der Halbleitertechnik anschauen.

Modell 3: Eine Anwendung aus der Transistor-Theorie zur Ladungsdiffusion in Transistoren

Das folgende mathematische Modell ist entnommen

Lindmayer/Wrigley, Fundamentals of Semiconductor Devices, Princeton, 1965.

Partielle Differentialgleichung:

$$p_t - D \left(p_{xx} - \frac{\eta}{L} p_x \right) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

eine Anfangsbedingung: $p(x, 0) = \frac{KL}{D} \left(\frac{1 - e^{-\eta(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}}}{\eta} \right), \quad 0 \leq x \leq L;$

Randbedingung: $p(0, t) = p(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$

Hierbei beschreibt $p = p(x, t)$ die Konzentration der positiven Ladungsträger, K , D und η sind positive Konstanten. Die Verträglichkeit zwischen Rand- und Anfangsbedingung ist erfüllt.

- Wir wählen den Lösungsansatz $p(x, t) = e^{\frac{\eta x}{2L} - \frac{D\eta^2}{4L^2}t} u(x, t)$ mit einer zu bestimmenden Funktion $u = u(x, t)$.

- Dann erhalten wir für diese Funktion das neue Modell $u_t - Du_{xx} = 0$ mit der Anfangsbedingung und Randbedingung $u(x, 0) = f(x) = \frac{KL}{D\eta} e^{-\frac{\eta x}{2L}} \left(1 - e^{-\eta(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}} \right), u(0, t) = u(L, t) = 0.$

- Man findet eine formale Lösung $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}.$

Benutzen wir die Fourierreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ dann ergibt sich sofort für die gesuchte}$$

Konzentration positiver Ladungsträger

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{\eta x}{2L}} e^{-\frac{D}{L^2}(n^2\pi^2 + \frac{\eta^2}{4})t}.$$

- Die Konzentration der Löcher (der positiven Ladungsträger) erleidet einen Kollaps für $t \rightarrow \infty$. Der Entladungsstrom $I = I(t)$ fließt und berechnet sich durch

$$I(t) = I_p \frac{D}{K} p_x(x, t) \Big|_{x=0} \quad \text{für } t > 0.$$

Das Auftreten des exponentiell fallenden zeitabhängigen Faktors gestattet, $p_x(0, t)$ durch gliedweise Differentiation der gewonnenen Reihe für $p = p(x, t)$ zu berechnen. Man erhält

$$I(t) = I_p \frac{D}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} f_n e^{-\frac{D}{L^2}(n^2\pi^2 + \frac{\eta^2}{4})t}.$$

- Bei der Transistorenherstellung interessiert die Größe Q (*reclaimable charge* (*zurückgewonnene Ladung*)), die definiert ist durch

$$Q = \int_0^{\infty} I(t)dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R I(t)dt.$$

Wir können in der letzten Beziehung gliedweise integrieren und erhalten

$$Q = I_p \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{Ln\pi}{n^2\pi^2 + \frac{\eta^2}{4}}.$$

Die nachfolgenden Ideen zur mathematischen Modellierung von Halbleitern sind dem Buch (Kapitel 5)

Peter A. Markowich, Applied Partial Differential Equations, Springer, 2007

entnommen.

Das älteste und heute noch bedeutendste Modell ist das Konvektion-Diffusion-Poisson System. Die Ursachen für einen Stromfluß im Halbleiter sind einerseits die Diffusion von Elektronen und Löchern, und andererseits die Konvektion geladener Teilchen im elektrischen Feld. Es seien $n = n(x, t)$ die Dichte der Elektronen, $p = p(x, t)$ die Dichte der Löcher, $V = V(x, t)$ das elektrische Potential, J_n das Vektorfeld der Elektronenflußdichte und J_p das der Flußdichte der Löcher. Dann gelten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} J_n &= D_n \text{grad } n - \mu_n n \text{grad } V, \\ J_p &= -D_p \text{grad } p - \mu_p p \text{grad } V. \end{aligned}$$

Hier bezeichnen D_n und D_p Diffusionskoeffizienten und μ_n und μ_p die Beweglichkeiten von Elektronen und Löcher. Die Terme $D_n \text{grad } n$ und $D_p \text{grad } p$ bezeichnen Diffusionsströme, die Terme $\mu_n n \text{grad } V$ und $\mu_p p \text{grad } V$ Konvektionsströme, die durch das elektrische Feld $E = -\text{grad } V$ erzeugt werden. Die totale Flußdichte ist

$$J = J_n + J_p.$$

Die folgenden Kontinuitätsgleichungen für die beiden Typen von Ladungsträgern werden vorausgesetzt:

$$n_t = \operatorname{div} J_n + R, \quad p_t = -\operatorname{div} J_p + R.$$

Hier bezeichnet R die sogenannte Rekombination-Erzeugungsrate. In den meisten Anwendungen ist $R = R(n, p)$ eine Funktion von n und p . Ein vollständiges System zur Modellierung von Halbleitern erhält man durch Hinzunahme der Poissonschen Gleichung für das elektrische Potential

$$\lambda^2 \Delta V = n - p - C(x).$$

Hier bezeichnet $C = C(x)$ die Dotierungsdichte und λ die Debye-Länge. Setzen wir die Gleichungen für die Flußdichten J_n und J_p in die Kontinuitätsgleichungen ein, dann erhalten wir ein partielles Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Funktionen $n = n(x, t)$, $p = p(x, t)$ und $V = V(x, t)$:

$$\begin{aligned} n_t &= \operatorname{div} (D_n \operatorname{grad} n - \mu_n n \operatorname{grad} V) + R(n, p), \\ p_t &= \operatorname{div} (D_p \operatorname{grad} p - \mu_p p \operatorname{grad} V) + R(n, p), \\ \lambda^2 \Delta V &= n - p - C(x). \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare partielle Differentialgleichungssystem 2. Ordnung ist parabolisch-elliptisch gekoppelt, jede partielle Differentialgleichung hängt von allen gesuchten Funktionen n , p und V ab. Die Diffusion-Konvektionsgleichungen für n und p sind parabolisch. Die Poisson-Gleichung für V ist elliptisch. Die Nebenbedingungen hängen von der Geometrie ab. Untersucht man obiges partielles Differentialgleichungssystem im \mathbb{R}^3 , dann darf man noch zwei Anfangsbedingungen

$$n(x, 0) = n_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad n_0(x) \geq 0, \quad p_0(x) \geq 0$$

stellen.

4.7.3 Partielle Differentialgleichungen in der Bildverarbeitung

Ein Schwarzweißbild kann mathematisch als eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ modelliert werden, die jedem Punkt eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^2$ einen Grauwert zuordnet. Typischerweise ist G ein Rechteck und der Grauwert liegt zwischen 0 und 1, wobei 0 für Weiß und 1 für Schwarz steht. Was hier nicht betrachtet werden soll sind Farbbilder; diese können durch \mathbb{R}^3 -wertige Funktionen beschrieben werden, wobei die Funktionswerte die Intensitäten von Rot, Gelb und Blau angeben. Zahlreiche Verfahren der Bildverarbeitung beruhen auf partiellen Differentialgleichungen, siehe dazu beispielsweise

- Peter A. Markowich: Applied partial differential equations. A visual approach. Springer-Verlag 2007 (Kapitel 10),
- Gilles Aubert und Pierre Kornprobst: Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Springer-Verlag 2006.

Für die praktische Umsetzung dieser Verfahren ist es dann notwendig, das Bild zu diskretisieren, d.h. im Computer werden nur die Funktionswerte $u(x, y)$ an endlich vielen, regelmäßig angeordneten Punkten $(x, y) \in G$ gespeichert und für Berechnungen verwendet.

Eine Grundaufgabe der Bildverarbeitung ist das Entrauschen von Bildern, die durch kleine Störungen („Griesel“) verunreinigt sind. Ist u_0 das gestörte Bild, so bestimmt man die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u \\ u|_{G \times \{t=0\}} &= u_0\end{aligned}$$

für einen Zeitpunkt $t > 0$. Kleine Störungen haben sich dann verlaufen. Allerdings darf t nicht zu groß gewählt werden, weil sonst das gesamte Bild unscharf wird. Ein Nachteil dieser Methode liegt in der Isotropie des Laplaceoperators, der keine Vorzugsrichtungen kennt. Aus diesem

Grunde werden auch Kanten im Bild verwaschen. Ein verbesserter Ansatz besteht deshalb darin, Δu durch u_{ll} zu ersetzen, was die zweite Ableitung tangential zur Höhenlinie $L_a(t) := \{(x, y) \in G : u(x, y, t) = a\}$ bedeuten soll. Entlang von Kanten lassen sich nämlich konstante Grauwerte beobachten. Schreibt man dies wieder in kartesischen Koordinaten (x, y) , erhält man die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$u_t = |\text{grad } u| \operatorname{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right),$$

die unter derselben Anfangsbedingung wie oben gelöst werden kann. Die Grauwerte breiten sich nun tangential, aber nicht orthogonal zu den Höhenlinien $L_a(t)$ aus.

Ein weiterer Ansatz sucht ein Minimum des Funktionals

$$F(u) := \int_G \left(|\text{grad } u| + \frac{\lambda}{2} (u - u_0)^2 \right) dx dy$$

in einer geeigneten Menge von Funktionen u . Der erste Summand wird dabei klein, wenn die Funktion u möglichst wenige schnelle Änderungen auf kleinem Raum aufweist, wie es bei verrauschten Bildern vorkommt, der zweite Summand sorgt dafür, dass u in der Nähe des gegebenen Bildes u_0 ist. Der positive Parameter λ beschreibt die Wichtung zwischen diesen beiden miteinander konkurrierenden Problemen. Die Lösung eines solchen Minimierungsproblems erfüllt stets eine partielle Differentialgleichung, die als zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung bezeichnet wird und im vorliegenden Fall lautet

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) + \lambda(u - u_0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial G} &= 0. \end{aligned}$$

Eine andere Grundaufgabe ist die Segmentierung von Bildern, d.h.

die Identifizierung von Objekten und Hintergrund. Das sogenannte Mumford-Shah-Funktional

$$F(u, K) = \int_{G \setminus K} (u - u_0)^2 dx dy + \alpha \int_{G \setminus K} |\text{grad } u|^2 dx dy + \beta \int_K ds,$$

das minimiert werden soll, hängt außer von u auch von der gesuchten Menge K der Kanten ab. Damit erreicht man, dass u außerhalb der Kanten das gegebene Bild gut approximiert und keine sprunghaften Veränderungen aufweist, das dritte Integral stellt die Gesamtlänge der Kanten dar und sorgt dafür, dass keine überflüssigen Kanten gefunden werden. Die positiven Parameter α und β wichten diese drei Forderungen gegeneinander. Auch zu diesem Funktional lassen sich zugehörige Euler-Lagrange-Gleichungen aufschreiben. Ein Minimum erfüllt danach (unter gewissen Regularitätsannahmen) stets die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha \Delta u &= u - u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial G \text{ und auf beiden Seiten von } K, \\ e(u^+) - e(u^-) + \beta \kappa &= 0 \quad \text{auf } K, \end{aligned}$$

wobei $e(u) = (u - u_0)^2 + \alpha |\text{grad } u|^2$, $e(u^\pm)$ für die Grenzwerte dieses Ausdrucks von beiden Seiten der Kurven von K stehen und κ die Krümmung einer Kurve bedeutet.

Eine zusätzliche Schwierigkeit dieser Gleichungen besteht darin, dass Randbedingungen auf noch zu bestimmenden Rändern auftreten, man spricht von einem freien Randwertproblem.

5 Integraltransformationen

5.1 Grundlegende Ideen und Beispiele

Eine Integraltransformation ist z.B. definiert durch

$$F(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt.$$

Dabei ist $f = f(t)$ aus dem *Originalraum* aller Funktionen, die transformierbar sind. Die Funktion $F = F(s)$ heißt *Bildfunktion*. Mit $K = K(s, t)$ bezeichnen wir die *Kernfunktion*. In den Anwendungen treten eine Reihe von Integraltransformationen auf:

Beispiele:

$K(s, t)$	a	b	Bezeichnung
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ist}$	$-\infty$	$+\infty$	Fouriertransformation
e^{-st}	0	$+\infty$	Laplacetransformation
t^{s-1}	0	$+\infty$	Mellintransformation
$\cos(st)$	0	$+\infty$	Kosinustransformation
$\sin(st)$	0	$+\infty$	Sinustransformation
$t J_\nu(st)$	0	$+\infty$	Hankeltransformation
↑ Besselfunktionen 1. Art			
$\sqrt{st} K_\nu(st)$	0	$+\infty$	Meijertransformation
↑ Kelvinfunktionen			

Wir werden uns in diesem Abschnitt nur mit der Fourier- und mit der Laplacetransformation beschäftigen. Wir werden keine Untersuchungen anstellen, welche Funktionen jeweils transformierbar sind, sondern wie folgt verfahren:

- Mit O bezeichnen wir den Originalraum aller Funktionen, die transformierbar sind.
- Mit B bezeichnen wir den Raum aller Bildfunktionen.
- Mit T bezeichnen wir die jeweilige Integraltransformation, die mit den obigen Bezeichnungen wie folgt dargestellt werden kann:

$$f \in O \rightarrow F = Tf \in B.$$

Philosophie:

- Ein Ausgangsproblem ist schwer zu lösen (es soll eine Lösung $f = f(t)$ gefunden werden).
- Anwendung einer geeigneten Integraltransformation überführt das Ausgangsproblem in ein transformiertes Hilfsproblem. Dieses ist leichter lösbar und liefert eine Lösung $F(s)$.
- Schwierig ist i.allg. die Rücktransformation, das heißt, eine inverse Integraltransformation liefert eine Funktion $f = T^{-1}F$.
- Schließlich bleibt zu überprüfen, ob die gewonnene Funktion tatsächlich eine Lösung des Ausgangsproblems ist.

Anwendungsprinzipien:

- Das Ausgangsproblem sollte linear sein, z.B. eine lineare gewöhnliche oder eine lineare partielle Differentialgleichung.
- Es gibt keine allgemeine Antwort auf die Frage, welche Integraltransformation auf welches Problem optimal anwendbar ist. Für jede Integraltransformation müssen spezielle Eigenschaften studiert werden, z.B. welche Funktionen sind transformierbar, Vertauschung von Grenzprozessen, Umkehrformeln, inverse Integraltransformationen.
- Die Anwendung von Integraltransformationen ist ein Probierversahren, das heißt, am Ende muß untersucht werden, ob der Kandidat für die Lösung tatsächlich das Ausgangsproblem löst, und ob während der Anwendung der Integraltransformation eingeführte Voraussetzungen wirklich erfüllt sind.

5.2 Die Fouriertransformation

Üblicherweise verwendet man nicht die Variablen t und s , sondern die Variablen x und ξ . Die Integraltransformation lautet dann

$$F(f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Dabei sind x und $\xi \in \mathbb{R}^1$ reelle Variablen. Man nennt x die *physikalische Variable* und ξ die *Phasenvariable*.

Es gelten folgende *Rechenregeln*:

- 1: $i^k d_\xi^k F(f)(\xi) = F(x^k f)(\xi)$, d.h. wenn die Fouriertransformierten von f und $x^k f$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel,
- 2: $(i\xi)^k F(f)(\xi) = F(d_x^k f)(\xi)$, d.h. wenn die Fouriertransformierten von f und $d_x^k f$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel.

Bei beiden Regeln setzen wir voraus, daß f aus dem Originalraum und die Fouriertransformierte $F(f)$ aus dem Bildraum bekannt sind.

Was besagen diese Rechenregeln?

zu 1) Bilden wir die Fouriertransformierte einer Originalfunktion f multipliziert mit der k -ten Potenz der physikalischen Variablen, dann entspricht das der k -ten Ableitung der Fouriertransformierten $F(f)$ nach der Phasenvariablen multipliziert mit i^k .

zu 2) Bilden wir die Fouriertransformierte der k -ten Ableitung einer Originalfunktion f nach der physikalischen Variablen, dann entspricht das der Fouriertransformierten $F(f)$ von f multipliziert mit $(i\xi)^k$.

Merke: Damit sind die Differentiation und die Multiplikation mit der Variablen zueinander duale Operationen im Originalraum und im Bildraum.

Differentiation in O nach der physikalischen Variablen $\hat{=}$ Multiplikation mit ξ im Bildraum B ,

Multiplikation mit der physikalischen Variablen x in $O \hat{=}$ Differentiation im Bildraum B nach der Phasenvariablen.

Frage: Welche Funktionen f aus dem Originalraum O erfüllen obige Rechenregeln?

Antwort: Es sei $f = f(x)$ n Mal stetig differenzierbar und $\frac{d^k f}{dx^k} \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ für $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, d.h. alle Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ streben gegen 0 für x gegen $\pm\infty$. Dann gelten die obigen Regeln für $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Machen wir uns die Rechenregel 1 plausibel: Es gilt

$$F(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Differenzieren wir k Mal nach ξ , dann gilt

$$d_{\xi}^k F(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_{\xi}^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

Setzen wir jetzt voraus, daß die unbestimmte Integration $\int_{-\infty}^{+\infty}$ und die Differentiation d_{ξ}^k vertauschbar sind (das gilt unter den oben gemachten Voraussetzungen an f), dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\xi}^k F(f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{\xi}^k e^{-ix\xi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} (-ix)^k f(x) dx \end{aligned}$$

bzw. nach Multiplikation mit i^k

$$i^k d_{\xi}^k F(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} (x^k f)(x) dx = F(x^k f)(\xi).$$

Machen wir uns die Rechenregel 2 plausibel: Es gilt

$$\begin{aligned} (i\xi)^k F(f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^k e^{-ix\xi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \partial_x^k (e^{-ix\xi}) f(x) dx. \end{aligned}$$

Die gemachten Voraussetzungen an f sichern, daß man k Mal die partielle Integration anwenden kann und somit ∂_x^k von $e^{-ix\xi}$ auf f hinüberwälzt. In jedem Schritt entsteht eine -1 , also in k Schritten $(-1)^k$. Die Randterme verschwinden auf Grund der gemachten Voraussetzung $\frac{d^k f}{dx^k} \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ für $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} (i\xi)^k F(f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \partial_x^k (e^{-ix\xi}) f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1} \partial_x^{k-1} (e^{-ix\xi}) d_x f(x) dx = \dots = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} d_x^k f(x) dx = F(d_x^k f)(\xi). \end{aligned}$$

Beispiele:

- $F(\exp(-ax^2))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{\xi^2}{4a})$, $a > 0$, das heißt, *Gauß-Funktionen ergeben im Fourierbild wieder Gauß-Funktionen*,
 $a = \frac{1}{2}$, $F(\exp(-\frac{1}{2}x^2))(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)$;
- $F(\exp(-a|x|)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$, $a > 0$.

In der Signaltheorie wird mit $a \in \mathbb{R}$ folgende Transformationsregel häufig verwendet:

$$F(\delta_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ia\xi), \quad a = 0 \Rightarrow F(\delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Somit ist das Fourierbild der Diracschen δ_0 -Distribution die konstante Funktion $\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Fouriertransformierten:

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, d.h. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$. Dann ist $F(f)(\xi)$ als Funktion stetig auf $(-\infty, +\infty)$ und es gilt $F(f)(\xi) \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Natürlich steht die Frage nach der *inversen Fouriertransformation*. Diese wird mit F^{-1} bezeichnet und definiert durch

$$F^{-1}(G(\xi))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} G(\xi) d\xi.$$

Dabei ist G eine beliebige Funktion aus dem Bildraum B .

Naiv könnte man vermuten, daß folgende wichtige Beziehung gilt: $F^{-1}(F(f)) = f$!!!! Diese Beziehung heißt *Fouriersche Umkehrformel*.

Beachte:

- Für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt keine Fouriersche Umkehrformel!
- Aber: Die Fouriertransformation ist auf $L^1(\mathbb{R}) = \{f : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty\}$ umkehrbar eindeutig. Damit kann wenigstens eine Rücktransformation auf $F(L^1(\mathbb{R}))$, das heißt, auf der Menge aller Fouriertransformierten von $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen, definiert werden. Diese Rücktransformation stimmt aber nicht mit dem obigen Vorschlag für F^{-1} überein. In vielen Fällen ist die Rücktransformation definiert durch

$$\begin{aligned} F^{-1}(G(\xi))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{H.W.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} G(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M e^{ix\xi} G(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Mit dieser Rücktransformation F^{-1} gilt

$$F^{-1}(F(f)) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Mit $f(x+0)$ bzw. $f(x-0)$ bezeichnen wir den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert von f an der Stelle x . Damit kann die Fouriersche Umkehrformel $F^{-1}(F(f)) = f$ nicht gelten.

Ein letztes *wesentliches Hilfsmittel* ist der sogenannte *Faltungssatz*: Unter geeigneten Voraussetzungen an f und g , z.B. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

existiert die Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)f(y)dy.$$

Faltungssatz: In vielen Fällen gilt

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)\sqrt{2\pi}, \quad F^{-1}(F(f) \cdot F(g)) = (f * g)\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

d.h., z.B. für den Fall, falls wir f und g aus dem Raum $L^1(\mathbb{R})$ wählen, daß die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen aus $L^1(\mathbb{R})$ gleich dem Produkt der Fouriertransformierten multipliziert mit $\sqrt{2\pi}$ ist, und daß die inverse Fouriertransformierte des Produktes zweier Fouriertransformierten von Funktionen aus $L^1(\mathbb{R})$ gleich der Faltung beider Funktionen multipliziert mit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist.

5.3 Die partielle Fouriertransformation

Hat man eine Funktion f vorgelegt, die z.B. von zwei reellen Variablen x, y abhängt, also $f = f(x, y)$, dann wendet man mitunter die Fouriertransformation nur bez. x an. Man spricht dann von der *partiellen Fouriertransformation*. Diese ist definiert durch

$$F_x(f(x, y))(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x, y)dx.$$

Die Variable y ist als Parameter anzusehen, der im Transformationsprozeß nicht berücksichtigt wird.

Rechenregeln:

1. $i^k \partial_\xi^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(x^k f(x, y))(\xi, y)$, d.h. wenn die partiellen Fouriertransformierten von f und $x^k f$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel,
2. $\partial_y^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(\partial_y^k f(x, y))(\xi, y)$, d.h. wenn die partiellen Fouriertransformierten von f und $\partial_y^k f$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel,

3. $(i\xi)^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(\partial_x^k f(x, y))(\xi, y)$, d.h. wenn die partiellen Fouriertransformierten von f und $\partial_x^k f$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel,
4. $y^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(y^k f(x, y))(\xi, y)$, d.h. wenn die partiellen Fouriertransformierten von f und $y^k f$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel.

Bei allen vier Regeln setzen wir voraus, daß f aus dem Originalraum und die partielle Fouriertransformierte $F_x(f(x, y))$ aus dem Bildraum bekannt sind.

Merke: Man kann die Fouriertransformation auch für Funktionen mehrerer reeller Variablen definieren. Das geschieht durch

$$F(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $x \cdot \xi = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$. Entsprechend läßt sich auch die partielle Fouriertransformation für Funktionen mehrerer reeller Variablen definieren. Mit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ definieren wir

$$F(f(x, y))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x, y) dx.$$

Die Rechenregeln übertragen sich vom eindimensionalen Fall wie folgt:

1. $i^k \partial_{\xi_l}^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(x_l^k f(x, y))(\xi, y)$,
2. $\partial_{y_l}^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(\partial_{y_l}^k f(x, y))(\xi, y)$,
3. $(i\xi_l)^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(\partial_{x_l}^k f(x, y))(\xi, y)$,
4. $y_l^k F_x(f(x, y))(\xi, y) = F_x(y_l^k f(x, y))(\xi, y)$.

5.4 Anwendungsbeispiele der Fouriertransformation

Beispiel 1 Das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0.$$

Die Anwendung der partiellen Fouriertransformation bez. x liefert

$$F_x(u_{tt}) = (F_x(u))_{tt} = v_{tt}, \quad v = F_x(u), \quad F_x(-c^2 u_{xx}) = c^2 \xi^2 F_x(u) = c^2 \xi^2 v.$$

Damit erhalten wir das folgende Cauchy-Problem für v :

$$v_{tt} + c^2 \xi^2 v = 0, \quad v(0, \xi) = F(f)(\xi), \quad v_t(0, \xi) = F(g)(\xi).$$

Dieses Problem ist mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zu behandeln (Exponentialansatz, siehe Grundkurs Höhere Mathematik), ξ ist als Konstante anzusehen. Als Lösung erhalten wir

$$v(t, \xi) = \frac{1}{2} F(f)(\xi) (e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}) + \frac{F(g)(\xi)}{2ic\xi} (e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}).$$

Verwenden wir die inverse partielle Fouriertransformation F_ξ^{-1} , dann erhalten wir mit der Annahme $F_\xi^{-1}(F_x(u(t, x))) = u(t, x)$ (diese Annahme ist später zu überprüfen, damit erlauben wir nur solche Lösungen, für welche die Fouriersche Umkehrformel gilt)

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\xi) (e^{i\xi(x+ct)} + e^{i\xi(x-ct)}) d\xi \right) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(g)(\xi)}{i\xi} (e^{i\xi(x+ct)} - e^{i\xi(x-ct)}) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(g)(\xi) \left(\int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\xi y} dy \right) d\xi \end{aligned}$$

(hier verwenden wir die Beziehung

$$\frac{1}{i\xi} (e^{i\xi(x+ct)} - e^{i\xi(x-ct)}) = \int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\xi y} dy,$$

und nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhalten wir)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} F(g)(\xi) d\xi dy \\
 &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F^{-1}(F(g))(y) dy \\
 &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy.
 \end{aligned}$$

Das ist die *D'Alembertsche Lösungsdarstellung für die Wellengleichung im 1-d Fall*. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß auch für die Daten f und g die Fouriersche Umkehrformel $F^{-1}(F(f)) = f$ und $F^{-1}(F(g)) = g$ gilt.

Beispiel 2 Das Dirichlet-Problem für die Potentialgleichung in der Halbebene

Vorgelegt sei das Dirichlet-Problem für die Potentialgleichung in der Halbebene $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $y \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ mit den folgenden Nebenbedingungen:

Randbedingung vom Dirichlet-Typ: $u(x, 0) = f(x)$,
 und der Abklingbedingung: $u(x, y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$.

Wir wenden die partielle Fouriertransformation bez. x an und erhalten mit $v(\xi, y) := F_{x \rightarrow \xi}(u(x, y))(\xi, y)$, die Variable y ist als Parameter zu behandeln, das Bildproblem

$$v_{yy} - \xi^2 v = 0, \quad v(\xi, 0) = F(f)(\xi), \quad v(\xi, y) \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow \infty.$$

Mit Hilfe der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten wir als Lösung

$$v(\xi, y) = c_1(\xi)e^{-|\xi|y} + c_2(\xi)e^{|\xi|y}.$$

Da $v(\xi, y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$ vorausgesetzt wurde, folgt unmittelbar $c_2(\xi) \equiv 0$. Nutzen wir $v(\xi, 0) = F(f)(\xi)$, dann ergibt sich sofort $v(\xi, y) = F(f)(\xi)e^{-|\xi|y}$.

Für die Funktion $e^{-|\xi|y}$ gilt die Fouriersche Umkehrformel $F_x(F_\xi^{-1}(e^{-|\xi|y})) = e^{-|\xi|y}$, $y > 0$. Damit erhalten wir, die Fouriertransformation wirkt bezüglich der x -Variable, die inverse Fouriertransformation bezüglich der ξ -Variable, die Variable y ist als Parameter anzusehen und wird bei der Transformation nicht berücksichtigt,

$$v(\xi, y) = F(f)(\xi)F_x(F_\xi^{-1}(e^{-|\xi|y})).$$

Somit ist der *Faltungssatz anwendbar* und liefert

$$\begin{aligned} u(x, y) &= F_\xi^{-1}(v(\xi, y)) = F_\xi^{-1}\left(F(f)(\xi)F_x(F_\xi^{-1}(e^{-|\xi|y}))\right) \\ &= F^{-1}(F(f)(\xi)) * F_\xi^{-1}\left(F_x(F_\xi^{-1}(e^{-|\xi|y}))\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = f(x) * F_\xi^{-1}(e^{-|\xi|y}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

sofern für f die Fouriersche Umkehrformel $F^{-1}(F(f)) = f$ gilt. Die Faltung wirkt bezüglich der x -Variable. Nach unseren Beispielen aus Abschnitt 5.2 wissen wir $F^{-1}(e^{-|\xi|y}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2}$. Damit erhalten wir die sogenannte *Poissonsche Integralformel in der Halbebene* für die Lösung

$$u(x, y) = f(x) * \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{(x-z)^2 + y^2} dz.$$

Die Faltung wirkt bezüglich der x -Variablen, die Variable y ist als Parameter anzusehen.

Beispiel 3 Das Cauchy-Problem für die Diffusionsgleichung

Vorgelegt sei das Cauchy-Problem für die Diffusionsgleichung

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad k > 0.$$

Nach Anwendung der partiellen Fouriertransformation bez. x bekommen wir das Bildproblem

$$v_t + k\xi^2 v = 0, \quad v(\xi, 0) = F(f)(\xi).$$

Wir erhalten sofort die Lösung $v(\xi, t) = F(f)(\xi)e^{-k\xi^2 t}$ bzw.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\xi) e^{ix\xi - k\xi^2 t} d\xi.$$

Nach Anwendung des Faltungssatzes erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y, t)dy$$

mit $g(x, t) = F_{\xi}^{-1}(e^{-k\xi^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$

Damit bekommen wir die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy.$$

Fundamentallösung oder Elementarpotential der Diffusionsgleichung

5.5 Die Laplacetransformation

Die Laplace-Transformierte $L(f)(s)$ einer Funktion $f = f(x)$ ist definiert durch

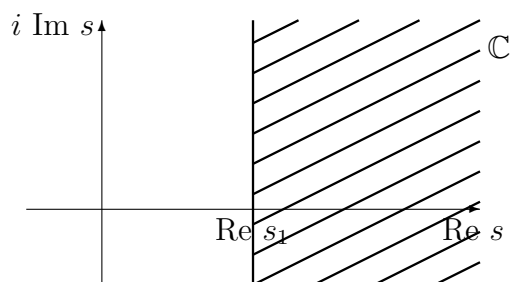
$$L(f)(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-sx} f(x) dx.$$

Die Originalfunktion f ist definiert auf dem Intervall $(0, \infty)$. Die Bildfunktion $L(f)(s)$ ist definiert für komplexe Zahlen s .

Die Funktion f gehört zum Originalraum \mathcal{L}_a , falls eine komplexe Zahl $s_1 \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\int_0^{\infty} |e^{-s_1 x} f(x)| dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M |e^{-s_1 x} f(x)| dx < \infty.$$

Dann existiert die Laplace-Transformierte $L(f)(s)$ für alle $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_1$. Das Laplace-Integral konvergiert für $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_1$ absolut.



In der Halbebene $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_1$ konvergiert das Laplace-Integral absolut.

Frage: Warum spielt der Realteil $\operatorname{Re} s$ der komplexen Variablen s eine wesentliche Rolle für die Konvergenz des Laplace-Integrals?

Antwort: Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \right| &\leq \int_0^\infty |e^{-sx} f(x)| dx = \int_0^\infty |e^{-x \operatorname{Re} s} f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |e^{-x \operatorname{Re} s_1} f(x)| \underbrace{|e^{+x(\operatorname{Re} s_1 - \operatorname{Re} s)}|}_{\leq 1} dx < \infty. \end{aligned}$$

Rechenregeln und Beispiele

- $L(1) = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-sx} dx$
 $= \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} e^{-sx} \Big|_0^M = \frac{1}{s}$ für $\operatorname{Re} s > 0$, $L(1) = \frac{1}{s}$.
- Dämpfungssatz: $L(e^{-ax} f(x)) = L(f)(s + a)$.
- $L(e^{-ax}) = L(e^{-ax} \cdot 1) = L(1)(s + a) = \frac{1}{s+a}$ für $\operatorname{Re}(s + a) > 0$.
- $L(\cos x) = L\left(\frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}\right) = \frac{1}{2} L(e^{ix}) + \frac{1}{2} L(e^{-ix}) =$
 $\frac{1}{2} \frac{1}{s-i} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+i} = \frac{s}{s^2+1}$ für $\operatorname{Re} s > 0$.
- $L(e^{-ax} \cos x) = \frac{s+a}{(s+a)^2+1}$ für $\operatorname{Re}(s + a) > 0$.
- Verschiebungssätze: $L(f(x - h))(s) = e^{-hs} L(f)(s)$,
 $L(f(x + h))(s) = e^{hs} \left(L(f)(s) - \int_0^h e^{-sx} f(x) dx \right)$ für $h \geq 0$.

- Multiplikationssatz: $L(x^n f)(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f)(s)$.
- $L(x^n) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$,
allgemein: $L(x^{\alpha-1}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}$ für $\operatorname{Re} \alpha > 0$ und $\operatorname{Res} > 0$, hier verwenden wir für alle komplexen Zahlen α mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$ die Definition der Gamma-Funktion

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

- Ähnlichkeitssatz: $L(f(ax)) = \frac{1}{a} (L(f))\left(\frac{s}{a}\right)$, $a > 0$.
- $L(\cos(ax)) = \frac{1}{a} \frac{\frac{s}{a}}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + a^2}$.
- Integrationsatz: $L\left(\int_0^x f(t) dt\right)(s) = \frac{1}{s} L(f)(s)$.
Stammfunktion von f
- Differentiationsatz: $L(f^{(n)}(x)) = s^n L(f)(s) - (s^{n-1} f(+0) + s^{n-2} f'(+0) + \dots + s f^{(n-2)}(+0) + f^{(n-1)}(+0))$, d.h. wenn die Laplacetransformierten von f und $f^{(n)}$ existieren, dann erfüllen sie diese Regel.
- Faltungssatz: Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_a$, so existiert ihre endliche Faltung

$$f(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t) f_2(t) dt.$$
 Die Funktion f gehört auch zu \mathcal{L}_a und es gilt $L(f_1 * f_2)(s) = L(f_1)(s) \cdot L(f_2)(s)$.

Weitere bekannte Beispiele:

Vorgelegt sei die komplementäre Fehlerfunktion $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda$. Dann gilt für die Laplace-Transformierte:

- $L\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)(s) = \frac{1}{s} \exp(-x\sqrt{s})$, $x \geq 0$.

5.6 Umkehrung der Laplacetransformation

Methode 1 Komplexe Umkehrformel

Vorgelegt sei eine Funktion $f \in \mathcal{L}_a$. Es sei y ein Wert auf der reellen Achse, der in der Halbebene $\{s : \operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_1\}$ absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals liegt. Falls f von *beschränkter Schwankung* ist, dann gilt in einer Umgebung von x die komplexe Umkehrformel

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 : \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\ x = 0 : \frac{f(+0)}{2} \\ x < 0 : 0 \end{array} \right\} = L^{-1}(L(f)) = HW \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} e^{sx} L(f)(s) ds$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{y-iM}^{y+iM} e^{sx} L(f)(s) ds.$$

Methode 2 Umkehrung durch Reihenentwicklung

Wenn $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^{\lambda_k}}$, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ für $\{s \in \mathbb{C} : |s| \geq \operatorname{Re} s_1\}$

absolut konvergent ist, das heißt $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_k}{s^{\lambda_k}} \right| < \infty$, so ist $F(s) = L(f)(s)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{\lambda_k-1}}{\Gamma(\lambda_k)}.$$

Beachte: Diese zweite Methode der Umkehrung wird z.B. zur Behandlung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 d_x^2 u + x d_x u + (x^2 - k^2)u = 0$$

oder zur Behandlung der Laguerreschen Differentialgleichung

$$x d_x^2 u + (1-x) d_x u + \lambda u = 0$$

eingesetzt.

5.7 Anwendungsbeispiele der Laplacetransformation

Bestimmung der Temperaturverteilung in einem halbbunendlichen Medium, wenn die Temperatur in $x = 0$ vorgeschrieben ist

Vorgelegt sei die Wärmeleitungsgleichung im halbbunendlichen Medium $u_t - ku_{xx} = 0$ für $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ und } t > 0\}$. Dabei ist die Wärmeleitfähigkeit k positiv.

Anfangsbedingung: $u(0, x) = 0,$

Randbedingung: $u(t, 0) = f(t),$

Verträglichkeitsbedingung: $f(0) = 0,$

Abklingbedingung: $u(t, x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ und $t > 0.$

Die Laplacetransformation wird bez. der t -Variablen angewendet. Es gilt

$$\begin{aligned}L(-ku_{xx}) &= -k L(u)_{xx}, \\L(u_t) &= s L(u)(s, x) - u(+0, x) = s L(u)(s, x),\end{aligned}$$

hier verwenden wir die homogene Anfangsbedingung, wobei für die zweite Beziehung der Differentiationssatz angewendet wurde. Damit ergibt sich folgende gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung im Bildraum ($v = L(u)$):

$$v_{xx}(s, x) - \frac{s}{k} v(s, x) = 0.$$

Wir erhalten mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten die allgemeine Lösung

$$v(s, x) = c_1(s)e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} + c_2(s)e^{x\sqrt{\frac{s}{k}}}.$$

Abklingbedingung $v(s, x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ liefert $c_2(s) = 0$, da andernfalls $e^{x\sqrt{\frac{s}{k}}}$ für geeignete s : $\text{Res} \geq \text{Res}_1$ unbeschränkt wachsen kann.

Die Randbedingung $v(s, 0) = L(u(t, 0)) = L(f)(s)$ liefert $c_1(s) = L(f)(s).$

Damit haben wir als Lösung unseres transformierten Problems

$$v(x, s) = L(f)(s)e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}}.$$

Wir nehmen an, daß für $e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}}$ die Umkehrformel

$$e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} = L(L^{-1}(e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}}))$$

gilt. Dann dürfen wir den *Faltungssatz* anwenden und erhalten

$$v(x, s) = L(f * L^{-1}(e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}))).$$

Die Rücktransformation liefert

$$u(t, x) = L^{-1}(L(f * L^{-1}(e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}))).$$

Wir setzen voraus, daß die Umkehrformel

$$L^{-1}(L(f * L^{-1}(e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}})))) = f * L^{-1}(e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}})$$

gilt (das ist zu überprüfen) und erhalten

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f * \underbrace{L^{-1}(e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}})}_{\text{Berechnung ist nicht einfach}} \quad \left(= \frac{x}{2\sqrt{\pi kt^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right) \\ &= \int_0^t f(t - \tau) \frac{x}{2\sqrt{\pi k\tau^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4k\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Wenden wir jetzt die Koordinatentransformation $\frac{x^2}{4k\tau} = \lambda^2$ an, dann erhalten wir die Lösungsformel

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4k\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Bestimmung der Temperaturverteilung in einem halbumendlichen Medium, wenn der Wärmefluß in $x = 0$ vorgeschrieben ist

Vorgelegt sei das mathematische Modell

$u_t - ku_{xx} = 0$, $x > 0$, $t > 0$, mit der *Anfangsbedingung* $u(x, 0) = 0$, der *Randbedingung* $-\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = g(t)$ in $x = 0$ und für $t > 0$, dabei ist die Wärmeleitfähigkeit k positiv, $\alpha > 0$ ist die relative Wärmeübertragungszahl, und dem *Verhalten im Unendlichen* $u(x, t) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$, $t > 0$.

Gehen wir wie bei der Behandlung des vorigen Modells vor, dann erhalten wir als Lösung des transformierten Problems

$$U(x, s) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{s}} L(g)(s) \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{k}}\right).$$

Die neuerliche Anwendung des Faltungssatzes liefert

$$u(t, x) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_0^t g(t - \tau) \tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k\tau}\right) d\tau$$

bzw. nach Verwendung gleicher Variablentransformation

$$u(t, x) = \frac{x}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} g\left(t - \frac{x^2}{4k\lambda^2}\right) \lambda^{-2} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$