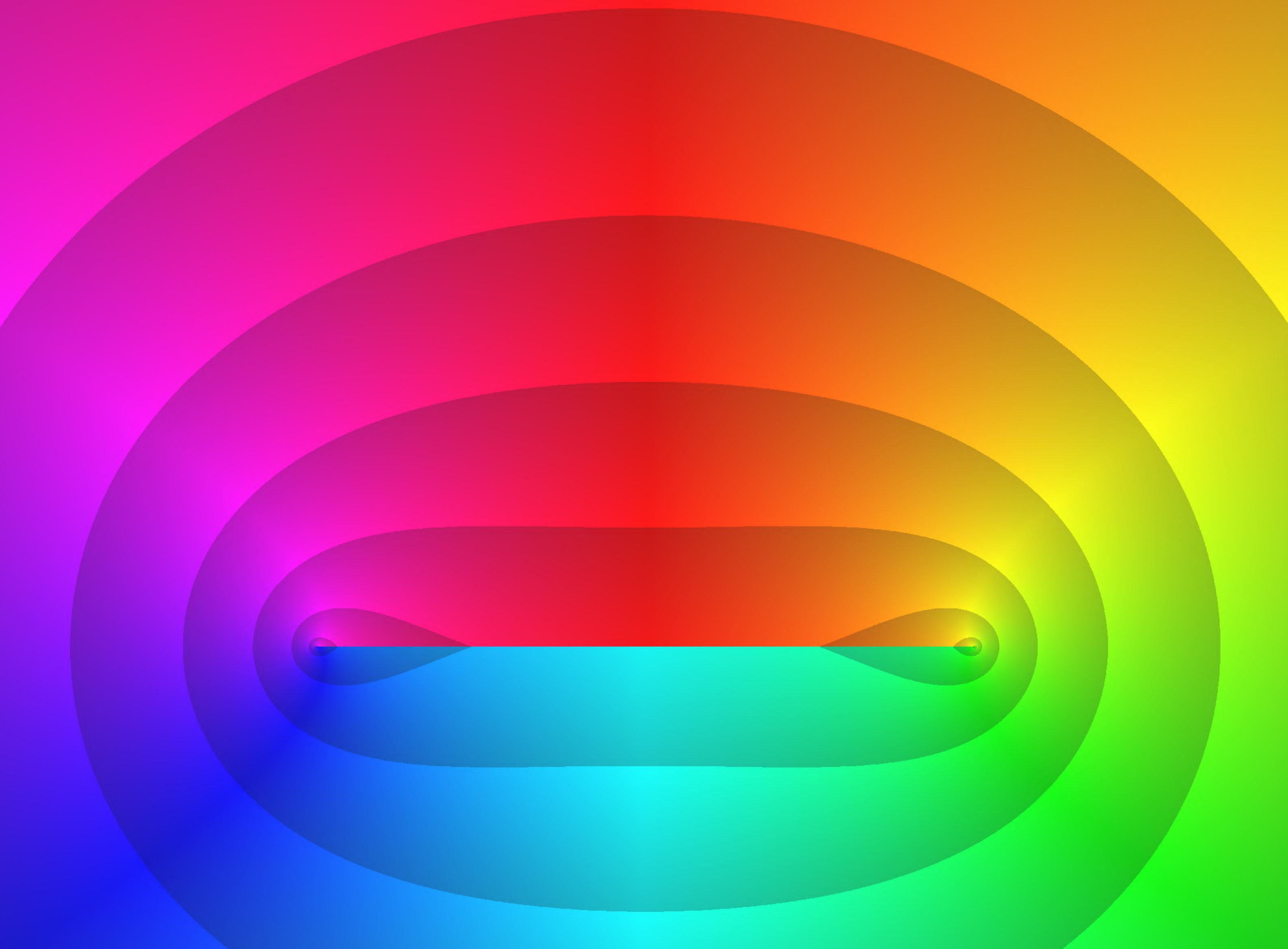

April

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30								

Die Sprungrelationen von Plemelj-Sochocki

Ist f eine auf einem reellen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, so definiert das Cauchy-Integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \frac{f(t)}{t - z}\, dt \tag{1}$$

mit der Dichte f eine in $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ analytische Funktion. Für $z \in [a, b]$ wird das Integral im Allgemeinen nicht existieren; beispielsweise besitzt der Integrand für $f(t) \equiv 1$ in $t = z$ eine nicht integrable Polstelle 1. Ordnung.

Ist aber f auf $[a, b]$ hölderstetig (d.h. es gilt $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\alpha}$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit Konstanten $C > 0$ und $\alpha \in (0, 1]$), so hat die Funktion F Grenzwerte, wenn sich z von oben oder unten an einen Punkt x in (a, b) annähert. Diese Grenzwerte $F(x + \mathrm{i}\,0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F(x + \mathrm{i}\varepsilon)$ und $F(x - \mathrm{i}\,0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F(x - \mathrm{i}\varepsilon)$ sind im Allgemeinen voneinander verschieden. Es zeigt sich nun, dass ihre Differenz genau der gegebenen Dichte f am Punkt x gleich ist,

$$F(x + \mathrm{i}\,0) - F(x - \mathrm{i}\,0) = f(x), \qquad x \in (a, b). \tag{2}$$

Außerdem existiert das Integral (1) dann auch für $z \in (a, b)$, wenn man es im Sinne des *Cauchyschen Hauptwertes* (valeur principale, v.p.) auffasst, d.h. als Grenzwert für $\varepsilon \to 0+$ der Integrale, bei denen ein um z symmetrisches Intervall der Länge 2ε aus dem Integrationsbereich $[a, b]$ entfernt wurde. Für die Summe des oberen und unteren Grenzwertes von F gilt dann

$$F(x + \mathrm{i}\,0) + F(x - \mathrm{i}\,0) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\, \text{v.p.} \int_a^b \frac{f(t)}{t - x}\, dt, \qquad x \in (a, b). \tag{3}$$

Die Beziehungen (2) und (3) sind als *Sprungrelationen* von Plemelj-Sochocki bekannt. Sie wurden erstmals 1868 von Julian Sochocki gefunden und 1908 durch Josip Plemelj bei der Lösung einer Klasse von Randwertproblemen wiederentdeckt.

Das Bild des Monats stellt die Funktion F für $a = -1$, $b = 1$ und $f(t) \equiv 1$ dar. Das Integral (1) lässt sich in diesem Fall explizit berechnen,

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \log \frac{z + 1}{z - 1}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

wobei $\log$ den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Bei der Abbildung F bildet die Möbiustransformation $w = (z + 1)/(z - 1)$ zunächst $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ab. Strebt nun z von oben (unten) gegen einen Punkt aus $(-1, 1)$, so konvergiert w von unten (oben) gegen die negative reelle Achse. Wegen $\log w = \log |w| + \mathrm{i} \arg w$ folgt $F(x + \mathrm{i}\,0) - F(x - \mathrm{i}\,0) = 1$.

Julian Karol Sochocki (1842 – 1927)

wurde in Warschau geboren, wo er aufwuchs und das Gymnasium abschloss. 1860 schrieb er sich an der St. Petersburger Universität in Mathematik und Physik ein, musste die Universität aber bereits im folgenden Jahr verlassen, nachdem er an einem Requiem polnischer Studenten für erschossene Unabhängigkeitskämpfer teilgenommen hatte. Er widmete sich daraufhin dem Selbststudium und konnte erst 1865 wieder nach St. Petersburg zurückkehren. Im Jahr 1868 verteidigte er seine Magisterarbeit (entspricht einer deutschen Promotion) „Theorie der Residuen und einige Anwendungen“. Sie ist praktisch die erste funktionentheoretische Forschungsarbeit in russischer Sprache und enthält eine Reihe später anderen Mathematikern zugeschriebene Ergebnisse, darunter den Satz von Casorati-Weierstraß. 1873 verteidigte Sochocki seine Doktorarbeit (entspricht einer deutschen Habilitation) „Über bestimmte Integrale und Funktionen mit Anwendungen auf Reihenentwicklungen“, in der auch der später nach ihm und Plemelj benannte Satz vorkommt.

Ab 1868 hielt Sochocki sehr erfolgreiche Vorlesungen an der Universität von St. Petersburg, 1873 wurde er außerordentlicher und 1882 ordentlicher Professor. Ab 1892 war er Präsident der St. Petersburger Mathematischen Gesellschaft.

Steffens, K.-G.: The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein. Birkhäuser 2006.