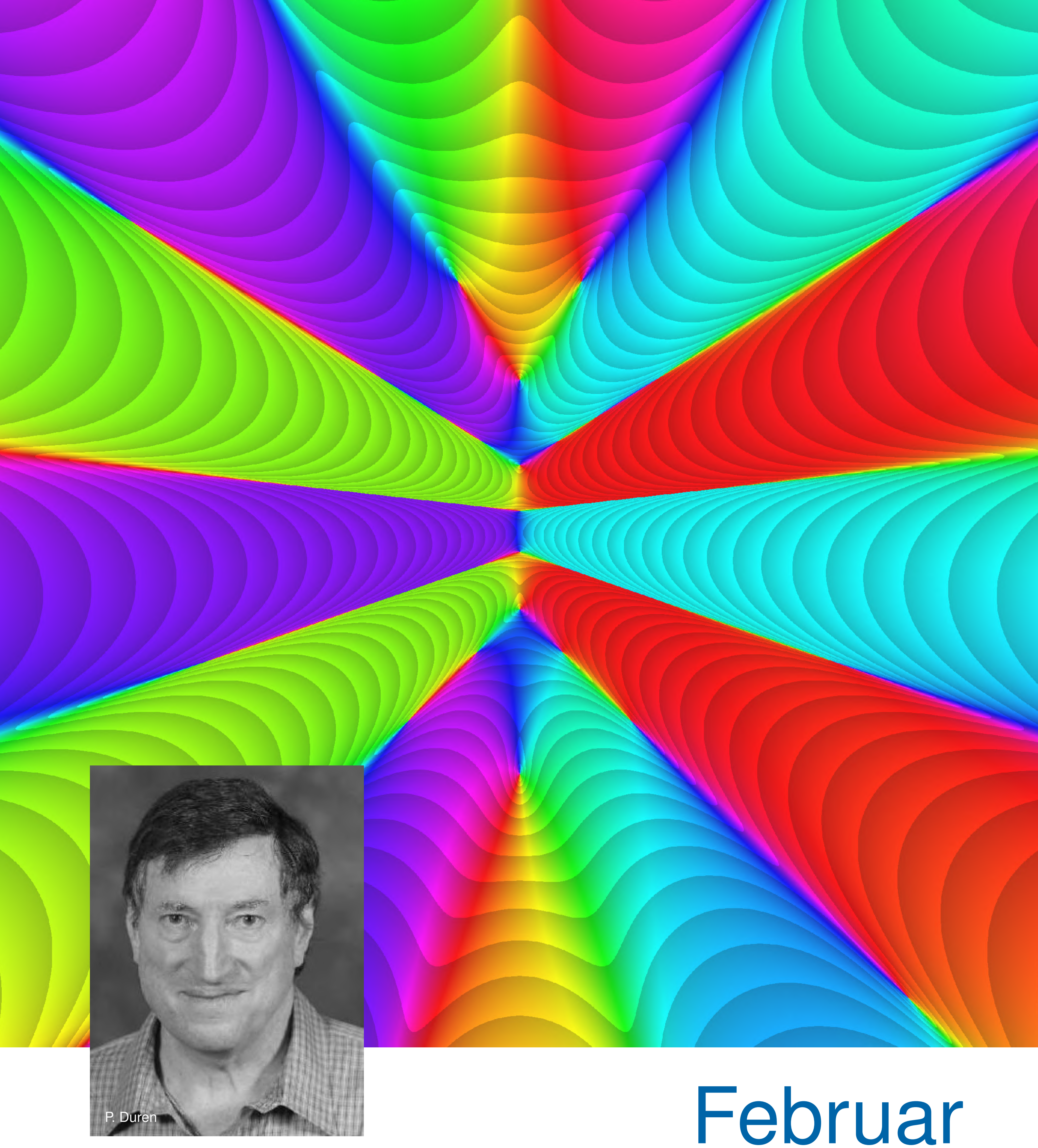


P. Duren

Februar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
28													

Harmonische Polynome

Eine reellwertige Funktion $u(x, y)$ heißt *harmonisch*, wenn sie die Laplacegleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

erfüllt. Die Funktion $u(x, y) = e^x \sin y$ ist dafür ein Beispiel, ebenso wie Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen von $z = x + \mathrm{i}y$. Allgemeiner kann man komplexwertige harmonische Funktionen untersuchen, darunter harmonische Abbildungen in der Ebene (also univalente komplexwertige harmonische Funktionen) und harmonische Polynome. Harmonische Abbildungen wurden durch Differentialgeometer untersucht, weil diese an einer sogenannten isothermalen Parametrisierung von Minimalflächen interessiert waren. Ab Mitte der 1980er Jahre befassten sich auch Funktionentheoretiker intensiver mit diesen Abbildungen, insbesondere motiviert durch die Entdeckung, dass viele Aussagen über konforme Abbildungen auch für harmonische Abbildungen gelten. Eine umfassende Darstellung dieses Gebiets gibt Peter Durens Buch *Harmonic Mappings in the Plane*.

In diesem Monat beschäftigen wir uns mit komplexen harmonischen Polynomen, also Polynomen in zwei reellen Variablen x, y, die die Laplacegleichung erfüllen. Solche Polynome können geschrieben werden als

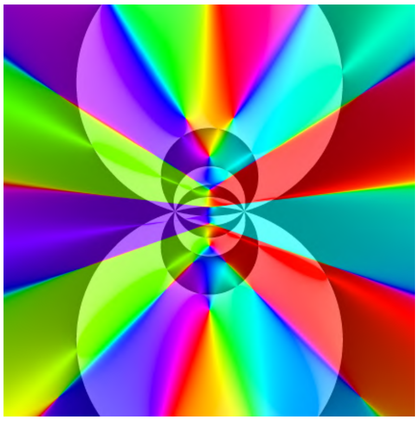
$$P(z) = \overline{S(z)} + T(z), \qquad z = x + \mathrm{i}y,$$

mit $S(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ und $T(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Ein Beispiel eines solchen Polynoms ist

$$P(z) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z + 1/2)^n\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - 1/2)^n\right).$$

Wenn wir $n = 7$ wählen, erhalten wir das Bild des Monats. Im Bild auf der Rückseite sehen wir außerdem, dass in den helleren Regionen der holomorphe Summand dominiert (die Farben gehen in der gewöhnlichen Ordnung um eine Nullstelle), während in den dunkleren Regionen der antiholomorphe Anteil überwiegt (die Farbreihenfolge ist umgekehrt).

In diesen Bildern sehen wir, dass die Nullstellen von P auf Strahlen liegen, die von der imaginären Achse ausgehen. Wieviele Nullstellen kann es geben? Für ein allgemeines harmonisches Polynom mit $n > m$ zeigte A. S. Wilmshurst, dass es höchstens n^2 Nullstellen geben kann. In seiner Dissertation konstruierte er 1994 Beispiele wie das vorliegende (das wir leicht modifiziert haben) und vermutete, dass $P = \overline{S} + T$ höchstens $m(m-1) + 3n - 2$ verschiedene Nullstellen haben kann, wenn S Grad m und T Grad n hat. Obwohl sich diese Vermutung schließlich als falsch herausgestellt hat, hat sie weitere Untersuchungen über die Nullstellen harmonischer Polynome angeregt.



Peter Larkin Duren (1935 – 2020)

wurde in New Orleans geboren. Sein Vater William Larkin Duren Jr. war Mathematiker und von 1955–1956 Präsident der Mathematical Association of America (MAA). Peter Duren studierte an der Harvard Universität und promovierte am Massachusetts Institute of Technology (MIT). Außer seiner Mathematikprofessur an der Universität Michigan hatte er Gastprofessuren u.a. am Imperial College London, am Institute for Advanced Study in Princeton, an der Université de Paris-Sud, der ETH, in Stanford und am Mittag-Leffler-Institut inne. Er war Herausgeber mehrerer Zeitschriften, darunter der Proceedings of the American Mathematical Society, des Michigan Mathematical Journal und des American Mathematical Monthly. Peter Duren war Autor von fünf Büchern und Koautor eines weiteren und hatte 25 Doktoranden. Er war Mitglied im Vorstand und mehreren Kommissionen der American Mathematical Society sowie im Leitungsgremium der MAA.

Zu seinen vielseitigen Interessensgebieten gehörten Wandern, Lesen, Vogelbeobachtung, Gärtnern, Fotografie, Briefmarkensammeln, Holzbearbeitung und Astronomie; außerdem war er für die Vorführung von Zaubertricks bekannt. In seinem Nachruf ist zu lesen, dass er „oft sagte, er sei wirklich glücklich, dass er genau von dem leben könne, was er am liebsten tut.“