S. N. Bernstein

Januar

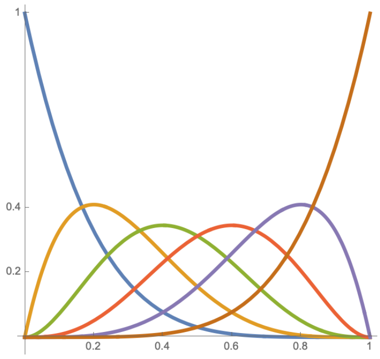
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31						

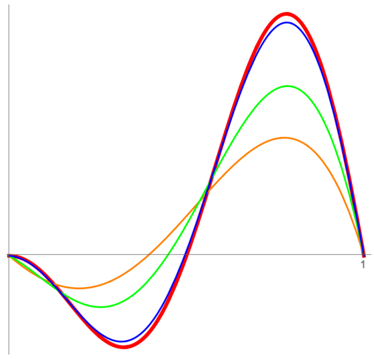
Bernstein-Polynome

Im Jahr 1885 bewies Karl Weierstraß einen Approximationssatz, der heute nach ihm benannt wird. Der Satz sagt aus, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig durch eine Folge von Polynomen approximiert werden kann. Sergei Bernstein gab 1911 einen konstruktiven Beweis dieses Satzes und erhielt dafür einen Preis der Belgischen Akademie der Wissenschaften. Er benutzte dieses Ergebnis für seine zweite Dissertation an der Universität Charkow (siehe unten). Der Schlüssel zu Bernsteins Beweis sind die sogenannten Bernstein-Polynome,

$$b_{n,m}(x) = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Der Wert des Bernstein-Polynoms $b_{n,m}$ kann als die Wahrscheinlichkeit für genau m Erfolge bei n identischen und unabhängigen Wiederholungen eines Zufallsexperiments interpretiert werden, wobei x die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg bei einer einzelnen Durchführung des Experiments ist (Binomialverteilung). Das Bild links zeigt die Bernsteinpolynome vom Grad 5.





Bernstein zeigte: Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so konvergiert die Folge der Polynome $B_n f$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f, wobei

$$B_n f(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) b_{n,m}(x).$$

Im Bild rechts erscheint der Graph einer Funktion f in rot, die Approximation $B_5 f$ in orange, $B_{10} f$ in grün, und $B_{100} f$ in blau.

Fünfzig Jahre nach ihrer Einführung wurden die Bernstein-Polynome wichtige Bausteine bei der Konstruktion von Bézier-Kurven, die in Computergraphik, Animation und Robotik benutzt werden.

Der Weierstraßsche Approximationssatz wurde 1937 durch Marshall H. Stone wesentlich verallgemeinert. Der Satz von Stone-Weierstraß impliziert im Speziellen, dass Polynome in z und $\overline{z}$ mit komplexen Koeffizienten dicht in der Algebra aller stetigen komplexen Funktionen auf der Einheitskreislinie sind. Das Bild des Montats zeigt das komplexe Bernstein-Polynom $b_{13,9}$.

Sergei Natanowitsch Bernstein (1880 – 1968)

wurde in einer jüdischen Familie in Odessa geboren. Sein Vater, ein Arzt und Universitätsdozent, starb, als Bernstein gerade elf Jahre alt war. Bernstein folgte seiner älteren Schwester nach Paris und studierte an der Sorbonne. Während eines dreisemestrigen Aufenthalts in Göttingen arbeitete er unter der Anleitung von David Hilbert und reichte dann seine Dissertation an der Sorbonne ein. Sie behandelte Differentialgleichungen und löste Hilberts neunzehntes Problem.

Bei der Rückkehr nach Russland musste Bernstein seine Abschlussprüfung wiederholen und noch eine Dissertation schreiben, weil ausländische Abschlüsse nicht anerkannt wurden. Er tat dies unter Verwendung seiner Arbeiten zur Approximationstheorie mit dem Beweis von Weierstraß' Satz.

Nach 25 Jahren Lehrtätigkeit in Charkow wurde der politische Druck auf Bernstein so groß, dass er nach Leningrad an die Akademie der Wissenschaften der UdSSR ging. Beim Angriff der Wehrmacht verlor Bernstein seinen Sohn. Später wechselte er nach Moskau, zuerst an die Universität und dann an das Steklow-Institut, wo er 1957 in den Ruhestand ging.

Sein umfangreiches mathematisches Werk umfasst gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Approximationstheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie. Er wurde in mehrere wissenschaftliche Akademien gewählt (Paris, Ukraine, UdSSR), erhielt Ehrendoktorwürden und viele Preise.

J. J. O'Connor und E. F. Robertson, *Sergei Natanovich Bernstein*, MacTutor History of Mathematics, (University of St Andrews, Scotland, 2010).