

COMPLEX BEAUTIES

2022

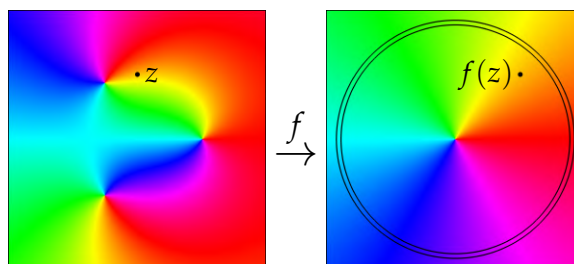


Komplexe Zahlen und Farben

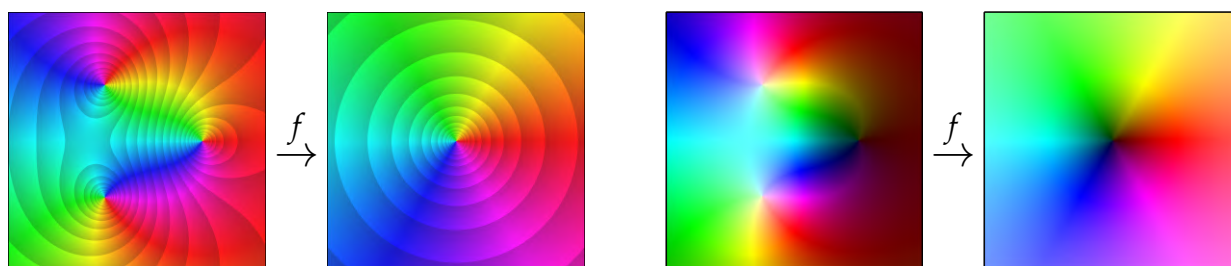
Mit der vorliegenden zwölften Ausgabe haben die „Complex Beauties“ nun schon eine gewisse Tradition: insgesamt haben wir 144 komplexe Funktionen vorgestellt. Die Vorderseiten der Kalenderblätter zeigen ihre „Phasenporträts“, Erläuterungen findet man auf der Rückseite. Dazu gibt es biographische Informationen über Mathematikerinnen und Mathematiker, deren Forschungen mit den abgebildeten Funktionen im Zusammenhang stehen. Auch wenn die fachlichen Erklärungen mitunter sehr anspruchsvoll sind, hoffen wir, dass sich ein breiter Leserkreis an den Bildern erfreuen kann und viele Mathematik-Interessierte einen Einblick in klassische und aktuelle mathematische Themen erhalten.

Unser besonderer Dank gilt den diesjährigen Gastautoren: Olivier Sète und Jan Zur haben die Monate Juni (Satz von Kantorowitsch) und Juli (Kaustiken und Katastrophen) gestaltet, der Beitrag für Oktober (nichtlineare Schrödinger-Gleichung) wurde von Andrei Bogatyrev verfasst. Das Thema für August (Mehrschrittverfahren) wurde durch Folkmar Bornemann angeregt und betreut und Walter Bergweiler danken wir für die Beratung zum Beitrag des Monats Dezember.

Die Konstruktion eines *Phasenporträts* beruht auf der Interpretation komplexer Zahlen als Punkte einer Ebene. Die horizontale Koordinate x eines Punktes, der die Zahl z repräsentiert, wird *Realteil* von z genannt, seine vertikale Koordinate y heißt *Imaginärteil* von z , und man schreibt $z = x + iy$. Alternativ lässt sich die Lage des Punktes auch durch seinen Abstand vom Koordinatenursprung ($|z|$, *Betrag* von z) und einen Winkel (*Argument* von z) angeben. Das Phasenporträt (im linken Bild) einer komplexen Funktion $w = f(z)$ entsteht, indem alle Punkte z ihres Definitionsbereiches nach dem Argument des Funktionswertes $f(z)$ gefärbt werden. Das kann man sich so vorstellen, dass zunächst die Farben des Farbkreises strahlenförmig vom Koordinatenursprung aus auf die Punkte der komplexen w -Ebene übertragen werden (rechtes Bild). Punkte mit gleichem Argument (oder gleicher *Phase* $w/|w|$) sind also gleich gefärbt. Im zweiten Schritt erhält dann jeder Punkt z des Definitionsgebiets von f die Farbe seines Funktionswertes $f(z)$ in der w -Ebene.



Das Phasenporträt kann als Fingerabdruck der Funktion betrachtet werden. Obwohl es nur einen Teil der Daten kodiert (das Argument) und den Betrag unterdrückt, können Funktionen einer wichtigen Klasse (*analytische* und allgemeiner *meromorphe* Funktionen) bis auf einen konstanten positiven Faktor aus ihrem Phasenporträt eindeutig rekonstruiert werden.



Mit Hilfe verschiedener Modifikationen der Farbkodierung lassen sich Eigenschaften der Funktion leichter ablesen. In diesem Kalender werden drei Farbschemata verwendet: das oben erklärte Phasenporträt und die beiden in der unteren Abbildung gezeigten Varianten. Die linke Version bezieht auch Niveaulinien des Betrags der Funktion in die Darstellung ein, in der rechten wird der Betrag als Grauwert kodiert, wobei helle Farben großen und dunkle Farben kleinen Werten entsprechen.

Eine mit Phasenporträts illustrierte Einführung in die Funktionentheorie gibt E. Wegert, *Visual Complex Functions – An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel 2012. Weitergehende Informationen zum Kalender (auch frühere Jahrgänge) und zum Buch findet man unter

www.mathe-kalender.de,

www.visual.wegert.com.

Wir danken allen treuen Lesern und dem Verein der Freunde und Förderer der TU Bergakademie Freiberg e. V. für ihre wertvolle Unterstützung des Projekts.