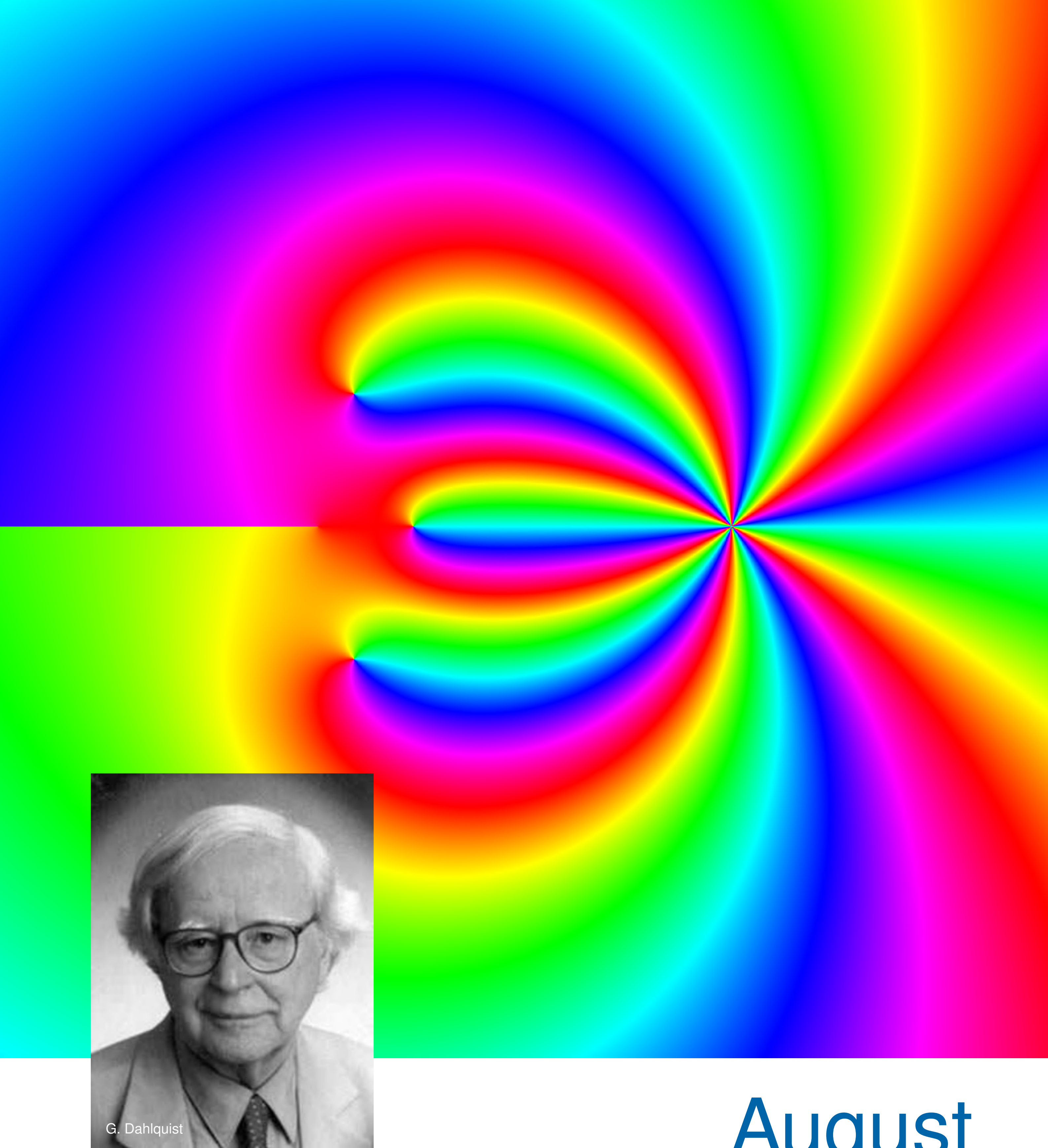

August

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

Mehrschritt-Verfahren

Viele Fragestellungen der angewandten Mathematik führen auf Anfangswertprobleme für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen,

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Probleme dieses Typs können nur in speziellen Fällen analytisch gelöst werden, meist muss man zu ihrer Lösung numerische Verfahren einsetzen. Zu den bekanntesten Näherungsverfahren zählen lineare *Mehrschrittverfahren* (MSV). Dabei berechnet man zu einer vorgegebenen Schrittweite h Näherungswerte y_j der gesuchten Lösung $y(t_j)$ an den Stellen $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Die Berechnung dieser Werte erfolgt mit einer m-stufigen Rekursion nach dem Schema

$$y_{j+m} = -\sum_{k=0}^{m-1} a_k\, y_{j+k} + h \sum_{k=0}^{m} b_k\, f_{j+k}, \tag{1}$$

wobei $f_{j+k} = f(t_{j+k}, y_{j+k})$ gesetzt wird. Die Startwerte $y_0, \ldots, y_{m-1}$ müssen zuvor geeignet festgelegt werden. Die Wahl der Koeffizienten a_k und b_k entscheidet über die Qualität des Verfahrens. Die *lokale Approximationsordnung* eines MSV charakterisiert die Differenz zwischen dem Näherungswert y_{j+m} und dem exakten Wert $y(t_{j+m})$ der Lösung in Abhängigkeit von der Schrittweite h. Das Verfahren besitzt die Ordnung p, falls für $h \to 0$ gilt $y_{j+m} - y(t_{j+m}) = \mathcal{O}(h^{p+1})$, wobei y_{j+m} aus (1) mit den exakten Werten der Lösung $y_{j+k} = y(t_{j+k})$, für $k = 0, \ldots, m-1$ berechnet wird.

Die Approximationsordnung kann mit Hilfe einer Taylorentwicklung bestimmt werden; bequemer ist aber die Verwendung der charakteristischen Polynome

$$\varrho(z) = z^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k, \qquad \sigma(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k.$$

Man kann zeigen, dass die Ordnung genau dann gleich p ist, wenn gilt

$$\frac{\varrho(z)}{\sigma(z)} - \log z = \mathcal{O}(|z-1|^{p+1}).$$

Um für $h \to 0$ die Konvergenz der Näherungslösung gegen die Lösung der Differentialgleichung zu sichern, muss außerdem ein *Stabilitätskriterium* erfüllt sein. Germund Dahlquist konnte 1956 zeigen, dass Mehrschrittverfahren der Form (1) genau dann konvergieren, wenn sie die Approximationsordnung $p \geq 1$ haben, alle Nullstellen des Polynoms ϱ in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe liegen und die Nullstellen auf deren Rand einfach sind.

Das Titelbild des Monats zeigt die Funktion $\varrho(z)/\sigma(z) - \log z$ für das implizite 4-Schritt-Adams-Moulton-Verfahren

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{720}\big(251\, f_{n+4} + 646\, f_{n+3} - 264\, f_{n+2} + 106\, f_{n+1} - 19\, f_n\big).$$

Wie aus der 6-fachen Nullstelle im Punkt $z = 1$ ersichtlich ist, hat es die Ordnung 5. Das Verfahren ist konvergent, denn $\varrho(z) = z^4 - z^3$ hat die dreifache Nullstelle 0 und die einfache Nullstelle 1.

Germund Dahlquist (1925 – 2005)

wurde in Uppsala geboren. Sein Vater war Pastor der lutherischen Kirche (der damaligen Staatskirche von Schweden), seine Mutter war Dichterin. Von 1942 bis 1949 studierte Dahlquist Mathematik an der Universität Stockholm, wo er besonders von Harald Bohr beeinflusst wurde. Danach arbeitete er an der Entwicklung des ersten elektronischen Binärcomputers in Schweden (BESK) mit. Dessen Verwendung zur Lösung von Differentialgleichungen (insbesondere für militärische Anwendungen und zur Wettervorhersage) führten ihn zum vertieften Studium numerischer Verfahren. Nach seiner Promotion wurde er 1959 an das *Royal Institute of Technology* in Stockholm berufen, wo er von 1963 bis 1990 Direktor des *Departments of Numerical Analysis and Computer Science* war.

Dahlquists bahnbrechende Arbeiten gelten als Meilensteine der numerischen Analysis. Das gemeinsam mit Ake Björck verfasste Buch *Numeriska metoder* (erste Auflage 1969) wurde in viele Sprachen übersetzt und ist in mehrfach aktualisierter Form noch heute ein Referenzwerk.

Dahlquist wurde die Ehrendoktorwürde der Universitäten Hamburg (1981), Helsinki (1994) und Linköping (1996) verliehen. Seit 1995 vergibt die *Society of Industrial and Applied Mathematics* (SIAM) alle zwei Jahre den „Germund-Dahlquist-Preis“.