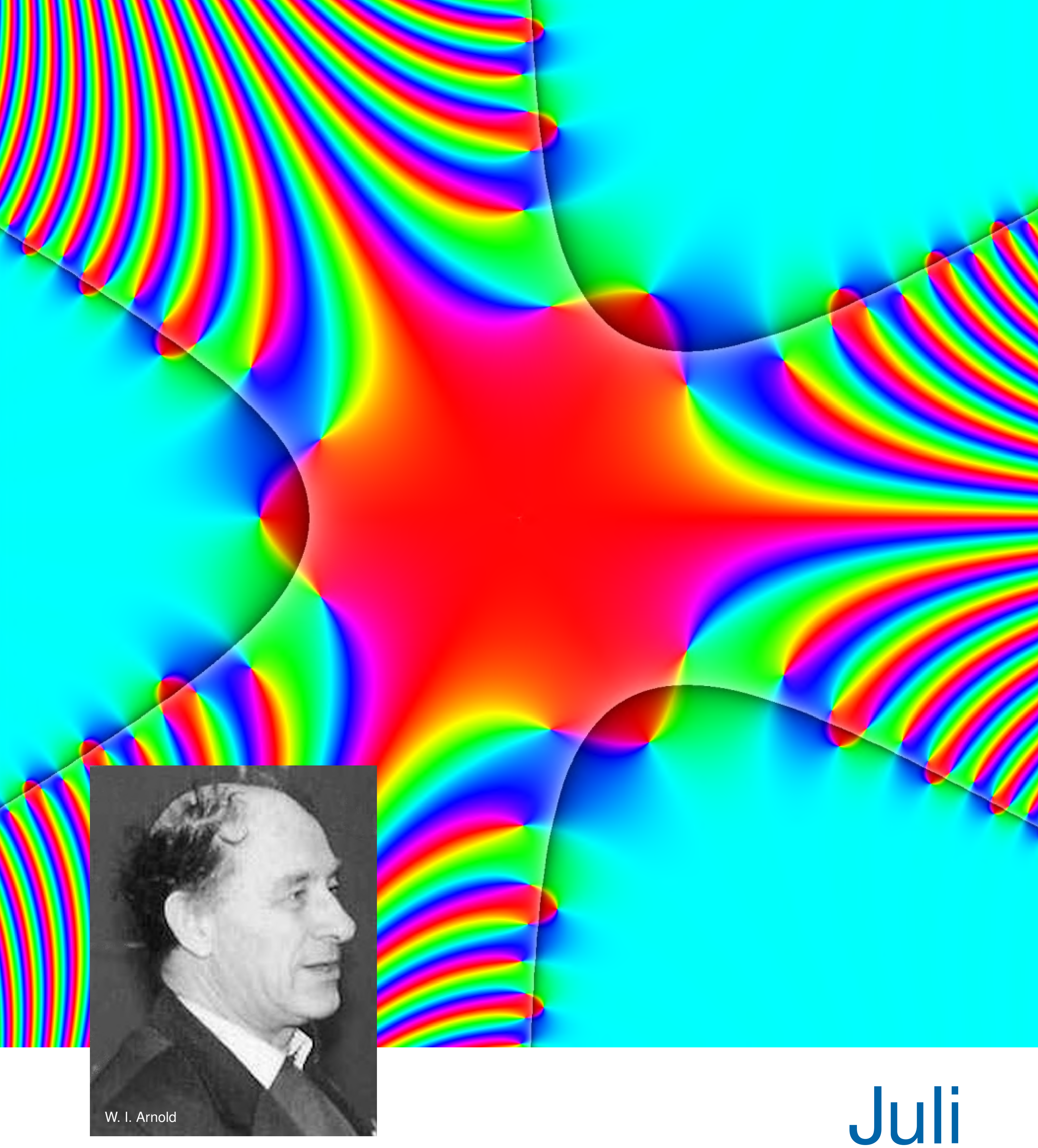


W. I. Arnold

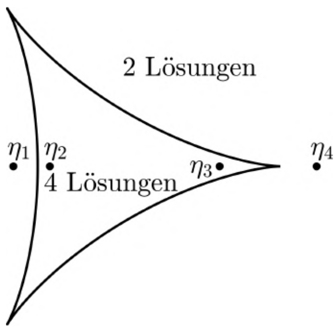
Juli

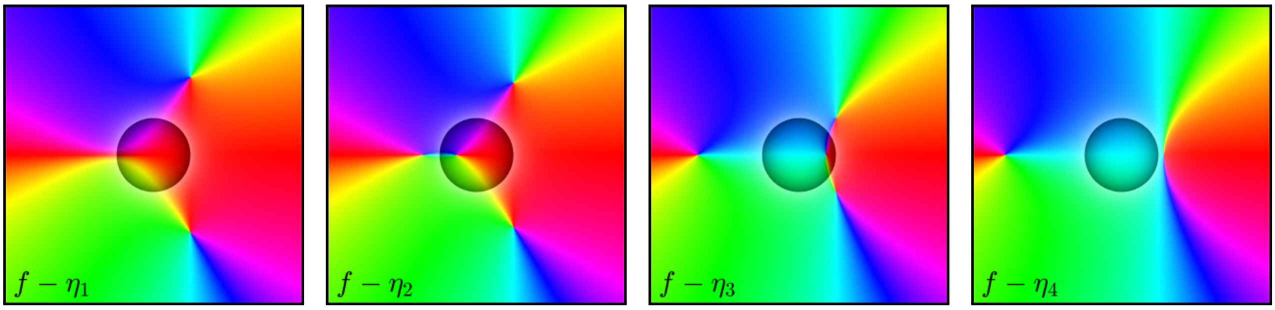
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

Kaustiken und Katastrophen (von Olivier Sète und Jan Zur)

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt die Gleichung $p(z) = \eta$ für ein analytisches Polynom p vom Grad $n \geq 1$ und jedes $\eta \in \mathbb{C}$ genau n Lösungen (mit Vielfachheiten gezählt). Für harmonische Polynome, also Funktionen der Form $f(z) = p(z) + \overline{q(z)}$ mit Polynomen p und q, hängt die Anzahl der Lösungen von $f(z) = \eta$ hingegen von η ab. Entscheidend hierfür ist die Lage von η bezüglich der Kaustik von f. Diese ist das Bild $f(\mathcal{C})$ der kritischen Menge $\mathcal{C} = \{z : J(z) = 0\}$ unter f, wobei J die Jacobi-Determinante von f bezeichnet. Typischerweise besteht $f(\mathcal{C})$ aus stückweise glatten Kurven mit Spitzen (engl. cusps). Die Anzahl der Lösungen von $f(z) = \eta$ ist gleich für alle η in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus f(\mathcal{C})$. Liegen hingegen η_1, η_2 in zwei benachbarten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus f(\mathcal{C})$, so unterscheidet sich die Anzahl der Lösungen von $f(z) = \eta_1$ und $f(z) = \eta_2$ um ± 2, wobei der Fall durch die Krümmung der Kaustik bestimmt ist. Dies gilt auch für allgemeinere harmonische Abbildungen. Die hier beschriebenen Veränderungen der Lösungszahl und das Verzweigungsverhalten von Lösungen werden im Rahmen der Katastrophentheorie genauer untersucht.

Zur Illustration betrachten wir $f(z) = \frac{1}{2}z^2 + \overline{z}$. Rechts sehen wir die Kaustik von f und die Punkte $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$. In den Phasenporträts der nicht-analytischen Funktionen $f - \eta_j$ färben wir Gebiete heller/dunkler, wenn f dort orientierungserhaltend/-umkehrend ist. Die kritische Menge $\mathcal{C}$ ist durch die Änderung von hell zu dunkel zu erkennen. Der Schritt von η_1 zu η_2 erzeugt zwei zusätzliche Nullstellen an der kritischen Menge. An einer Nullstelle ist $f - \eta_2$ orientierungserhaltend, an der anderen orientierungsumkehrend; bei letzterer wird der Farbkreis entgegen der gewohnten Richtung durchlaufen. Da η_2, η_3 in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus f(\mathcal{C})$ sind, haben $f - \eta_2$ und $f - \eta_3$ gleich viele Nullstellen. Den gleichen Effekt beobachten wir für η_1 und η_4. Der Schritt von η_4 zu η_3 führt über eine Spitze. Auch hier entstehen zwei Nullstellen, diesmal allerdings durch eine Bifurkation.





Das Titelbild zeigt die harmonische Abbildung $f(z) = \frac{1}{2}\phi(z)^2 + \overline{\phi(z)} - \eta$ mit $\phi(z) = e^{2z^3+1}$ und $\eta = 0.5$ im Bereich $|\mathrm{Re}(z)| \leq 2$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq 2$. An der kritischen Menge $\mathcal{C}$ sehen wir mehrere Nullstellen-Tripel als Resultat von Bifurkationen. Tatsächlich liegt η in der Nähe einer Spitze der Kaustik mit unendlich vielen Urbildern in $\mathcal{C}$.

Wladimir Igorewitsch Arnold (1937 – 2010)

wurde als Sohn der Kunsthistorikerin Nina Arnold und des Mathematikers Igor Arnold in Odessa geboren. Nach dem frühen Tod seines Vaters weckte sein Onkel bei ihm das Interesse an der Analysis. Daraufhin studierte Arnold mathematische Literatur aus der Hinterlassenschaft seines Vaters. Noch während seines Studiums bei Kolmogorow in Moskau löste er 1957 Hilberts 13. Problem. Von 1965 bis 1986 war Arnold Professor an der Moskauer Lomonossow-Universität, ab 1986 am Steklow-Institut und ab 1993 parallel an der Universität Paris 9 Dauphine.

Arnold war ein herausragender und vielseitiger Mathematiker. Er leistete wichtige Beiträge zu zahlreichen Gebieten, insbesondere Topologie, algebraische Geometrie, symplektische Geometrie, Differentialgleichungen, klassische Mechanik, Hydrodynamik, Singularitätentheorie (Katastrophentheorie) und zur Theorie dynamischer Systeme. Er gehörte zu den Schöpfern der KAM-Theorie (Kolmogorow, Arnold, Moser) und der topologischen Galois-Theorie.

Arnold wurde mit vielen Auszeichnungen geehrt. 1974 wurde er für die Fields-Medaille vorgeschlagen, die Verleihung wurde jedoch auf Druck der sowjetischen Führung blockiert.